Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Каменецкий, Рациональность производящих функций цикловых ладейных полиномов и цикловых перманентов тёплицевых матриц и циркулянтов, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 09:58:12

Рациональность производящих функций цикловых ладейных полиномов и цикловых перманентов тёплицевых матриц и циркулянтов

А. М. Каменецкий

Пусть $T_n^{(k)}$ – тёплицева $(n \times n)$ -матрица, имеющая единицы на диагонали $j - i = k$ (где i – номер строки и j – номер столбца) и нули в остальных местах, и пусть $P_n = T_n^{(1)} + T_n^{(1-n)}$ – циркулянт. Зафиксируем некоторые целые r и t , $0 \leq r \leq t$, и рассмотрим матрицы $A_n = A_{n,t}^{(r)} = \sum_{i=-r}^{-r+t} a_i P_n^i$ и $B_n = B_{n,t}^{(r)} = \sum_{i=-r}^{-r+t} a_i T_n^{(i)}$, где a_i – элементы некоторого коммутативного кольца (их можно считать формальными коммутирующими переменными). В настоящей статье вычисляются цикловые ладейные полиномы $R(x, z; A_n)$ и $R(x, z; B_n)$, а также цикловые перманенты $\text{per}(z; A_n)$ и $\text{per}(z; B_n)$ матриц A_n и B_n . Вычисление этих многочленов решает задачу перечисления перестановок с ограниченными позициями и фиксированным числом циклов [1].

ТЕОРЕМА 1. *Существуют не зависящие от n квадратные матрицы $K_t^{(s,r)} = K_t^{(s,r)}(z; a_{-r}x, \dots, a_{-r+t}x)$, $\Pi_t^{(s,r)} = \Pi_t^{(s,r)}(z; a_{-r}, \dots, a_{-r+t})$, $K_t^{(r)} = K_t^{(r)}(z; a_{-r}x, \dots, a_{-r+t}x)$, $\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(r)}(z; a_{-r}, \dots, a_{-r+t})$, а также $M_t^{(s,r)} = M_t^{(s,r)}(z)$, $\Sigma_t^{(s,r)} = \Sigma_t^{(s,r)}(z)$, $M_t^{(r)} = M_t^{(r)}(z)$ и $\Sigma_t^{(r)} = \Sigma_t^{(r)}(z)$ такие, что для любого $n \geq 1$ выполняются следующие равенства:*

- 1) $R(x, z; A_n) = \sum_{s=0}^{t-r} \text{tr}((K_t^{(s,r)})^n M_t^{(s,r)})$, $\text{per}(z; A_n) = \sum_{s=0}^{t-r} \text{tr}((\Pi_t^{(s,r)})^n \Sigma_t^{(s,r)})$,
- 2) $R(x, z; B_n) = \text{tr}((K_t^{(r)})^n M_t^{(r)})$, $\text{per}(z; B_n) = \text{tr}((\Pi_t^{(r)})^n \Sigma_t^{(r)})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Производящие ряды $\sum_{n=1}^{\infty} R(x, z; A_n) y^n$, $\dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} \text{per}(z; B_n) y^n$ участвующих в теореме многочленов являются рациональными функциями от y .*

Утверждение следствия 2 вытекает из правила суммирования геометрической прогрессии: $\sum_{n=1}^{\infty} \text{tr}(K^n M) y^n = \text{tr}((E - yK)^{-1} KM)$, где выражение в правой части равенства является, очевидно, рациональной функцией от y .

Известно (см., например, [1]), что коэффициенты разложения рациональной функции в степенной ряд удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям с постоянными коэффициентами. Это замечание приводит к простому эффективному вычислению многочленов теоремы для произвольно больших n .

Ниже мы приводим определение матриц, участвующих в формулировке теоремы, в случае $r = 0$. Явное определение остальных матриц, оценки их размеров, а также доказательство теоремы 1 приведены в работе [2]. Теорема 1 является обобщением результатов работы [3], в которой аналогичные выражения приведены для ладейных полиномов и перманентов без учета цикловой структуры.

Обозначим через N_t начальный отрезок натурального ряда, $N_t = \{1, \dots, t\}$. Определим $(t + r + 1)$ -элементное множество $S = N_t \cup \{v_1, \dots, v_r, w\}$, полученное из N_t добавлением еще $r + 1$ элементов, которые мы обозначаем формальными символами $v_1, \dots, v_r, w$. Для всяких целых t, r, s, d таких, что $t \geq 1$, $0 \leq r \leq t$, $0 \leq s \leq t - r$, $0 \leq d \leq t$, обозначим через $Q_{d,t}^{(s,r)}$ множество классов эквивалентности последовательностей $\bar{\alpha} = (x_1, \dots, x_{s+r+d})$, $x_j \in S$, удовлетворяющих следующим ограничениям: 1) для всяких $i \neq j$ либо $x_i \neq x_j$, либо $x_i = x_j = w$; 2) $x_{s+r+\ell} \neq w$ для всех ℓ , $1 \leq \ell \leq d$; 3) если $x_p = i \in N_r$, то $p = s + i$. При этом две последовательности $\bar{\alpha} = (x_1, \dots, x_{s+r+d})$ и $\bar{\beta} = (y_1, \dots, y_{s+r+d})$ считаются эквивалентными, если $x_i = y_i$ при $1 \leq i \leq s + r$ и $\{x_{s+r+1}, \dots, x_{s+r+d}\} = \{y_{s+r+1}, \dots, y_{s+r+d}\}$. Всюду далее $\{\bar{\alpha}\}$ обозначает мультимножество, составленное из элементов последовательности $\bar{\alpha}$.

Строки и столбцы матрицы $K_t^{(s,r)}(z; a_{-r}, \dots, a_{-r+t}) = (k_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}})$ нумеруются элементами конечного множества $\bigcup_{d=0}^t Q_{d,t}^{(s,r)}$. Для их определения зададим операцию “прибавления единицы” на множестве S следующим образом: для $i \in S$ положим формально $i + 1 = w$, если i является одним из элементов вида t или w , положим $v_j + 1 = v_j$, $1 \leq j \leq r$, и прибавление единицы понимается в обычном смысле, если $1 \leq i \leq t - 1$.

Для $\bar{\alpha} = (i_1, \dots, i_{s+d}) \in Q_{d,t}^{(s,0)}$ мы полагаем

$$k_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \begin{cases} a_0 z, & \text{если } \bar{\beta} = (i_1+1, \dots, i_{s+d}+1)^*, \\ a_{i_\ell}, & \text{если } 1 \leq \ell \leq s, i_\ell \in N_t, \bar{\beta} = (i_1+1, \dots, i_{\ell-1}+1, 1, i_{\ell+1}+1, \dots, i_{s+d}+1)^*, \\ a_{i_{s+\ell}}, & \text{если } 1 \leq \ell \leq d, i_{s+\ell} \in N_{t-1}, \\ & \bar{\beta} = (i_1+1, \dots, i_s+1, 1, i_{s+1}+1, \dots, \widehat{i_{s+\ell}+1}, \dots, i_{s+d}+1)^*, \\ 1, & \text{если } t \notin \{i_{s+1}, \dots, i_{s+d}\}, \bar{\beta} = (i_1+1, \dots, i_s+1, 1, i_{s+1}+1, \dots, i_{s+d}+1)^*, \\ 1 + a_t, & \text{если } t \in \{i_{s+1}, \dots, i_{s+d}\}, \bar{\beta} = (i_1+1, \dots, i_s+1, 1, i_{s+1}+1, \dots, i_{s+d}+1)^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где для всякой последовательности $\bar{\gamma} = (x_1, \dots, x_{s+d})$ мы обозначаем через $\bar{\gamma}^*$ ее подпоследовательность, получаемую вычеркиванием компонент $x_i = w$ для $i > s$. Определение матрицы $K_t^{(s,r)}$ для произвольного $r \geq 1$ несколько более громоздко, оно приведено в [2]. Матрица $\Pi_t^{(s,0)}$ является подматрицей матрицы $K_t^{(s,0)}(z; a_0, \dots, a_t)$ на множестве $Q_{0,t}^{(s,0)} = \{\bar{\alpha} \in Q_{0,t}^{(s,0)} \mid w \notin \{\bar{\alpha}\}\}$. Матрицы $M_t^{(s,r)}$, $\Sigma_t^{(s,r)}$, $M_t^{(r)}$ и $\Sigma_t^{(r)}$ определяются из следующих равенств, являющихся уточнением равенств теоремы 1:

$$\begin{aligned} R\left(x; z; \sum_{i=0}^t a_{-r+i} P_n^{-r+i}\right) &= \sum_{s=0}^{t-r} \sum_{\ell=0}^r \sum_{M_1} z^{|\left(\bar{\alpha}, v_1, \dots, v_r\right)_{\bar{\gamma}(s+r)}|} (K_t^{(s,r)})^n [L(\bar{\alpha}, \varphi_{\bar{\beta}}(N_r)) \mid L(\bar{\gamma})], \\ \text{per}\left(z; \sum_{i=0}^t a_{-r+i} x^i P_n^{-r+i}\right) &= \sum_{s=0}^{t-r} \sum_{\ell=0}^r x^{(s+\ell)n} \sum_{M_2} z^{|\left(\bar{\alpha}, v_1, \dots, v_r\right)_{\bar{\gamma}}|} (\Pi_t^{(s,r)})^n [L(\bar{\alpha}, \varphi_{\bar{\beta}}(N_r)) \mid L(\bar{\gamma})], \\ R\left(x; z; \sum_{i=0}^t a_{-r+i} T_n^{(-r+i)}\right) &= \sum_{\bar{\gamma} \in \bigcup_{\ell=r}^t Q_{\ell,t}, \bar{\gamma} \supseteq N_r} (K_t^{(r)})^n [L(N_r) \mid L(\bar{\gamma})], \\ \text{per}\left(z; \sum_{i=0}^t a_{-r+i} T_n^{(-r+i)}\right) &= (\Pi_t^{(r)})^n [L(N_r) \mid L(N_r)], \end{aligned}$$

где M_1 и M_2 – области суммирования, определенные из условий $\bar{\alpha} \in Q_{s,t}$, $\bar{\beta} \in Q_{\ell,r}$, $\bar{\gamma} \in \bigcup_{d=0}^t Q_{d,t}^{(s,r)}$, $\{\bar{\alpha}\} \subseteq N_t \setminus N_r$, $\{\bar{\gamma}\} \setminus (\{\bar{\gamma}\} \cap \{w^{(t)}\}) = \{\bar{\alpha}\} \cup \{\bar{\beta}\} \cup \{v_i\}_{i \in N_r \setminus \bar{\beta}}$ и $\bar{\alpha} \in Q_{s,t}$, $\bar{\beta} \in Q_{\ell,r}$, $\bar{\gamma} \in Q_t^{(s,r)}$, $\{\bar{\alpha}\} \subseteq N_t \setminus N_r$, $\{\bar{\gamma}\} = \{\bar{\alpha}\} \cup \{\bar{\beta}\} \cup \{v_i\}_{i \in N_r \setminus \bar{\beta}}$ соответственно. В приведенных формулах $K[L(\bar{\alpha}) \mid L(\bar{\beta})]$ – матричный элемент матрицы K , отвечающий последовательностям $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Мы полагаем $\varphi_{\bar{\beta}}(i) = i$, если $i \in \bar{\beta}$, и $\varphi_{\bar{\beta}}(i) = v_i$, если $i \in N_r \setminus \bar{\beta}$. Через $\bar{\gamma}(s+r)$ обозначен начальный отрезок последовательности $\bar{\gamma}$, состоящий из первых $s+r$ ее элементов. Наконец, для последовательности $\bar{\beta} = (x_1, \dots, x_{s+r})$ такой, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, и последовательности $\bar{\gamma} = (y_1, \dots, y_{s+r})$ мы обозначаем через $|\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\gamma}}\right)|$ число циклов отображения, переводящего x_i в y_i при $1 \leq i \leq s+r$.

Матрица $K_t^{(r)}$ является подматрицей матрицы $K_t^{(0,r)}$ на множестве $\bigcup_{d=0}^t Q_{d,t}^{(r)}$, $Q_{d,t}^{(r)} = \{\bar{\alpha} \in Q_{d,t}^{(0,r)} \mid \{\bar{\alpha}\} \cap \{v_1, \dots, v_r\} = \emptyset\}$. Матрица $\Pi_t^{(r)}$ является подматрицей матрицы $\Pi_t^{(0,r)}(z; a_{-r}, \dots, a_{-r+t})$ на множестве $Q_t^{(r)} = \{\bar{\alpha} \in Q_{0,t}^{(r)} \mid w \notin \{\bar{\alpha}\}\}$.

Автор благодарит М. Э. Казаряна за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 1990. [2] А. М. Каменецкий, “Общая теория цикловых ладейных полиномов и перманентов прямоугольных матриц с приложениями к циркулянтам и тёплицевым матрицам”, *Материалы V Междунар. сем. по дискрет. матем. и ее прилож.* (31 янв. – 2 февр. 1995 г.). [3] А. М. Каменецкий, *УМН*, **60:3** (2005), 177–178.