Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горгорова, И. В. Павлов, О свойствах хааровской
единственности для векторнозначных случайных про-
цессов, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:40:37

О свойствах хааровской единственности для векторнозначных случайных процессов

В. В. Горгорова, И. В. Павлов

Рассмотрим фильтрованное пространство (ф.п.) $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^N, \mathcal{F})$, где число N конечно, все σ -алгебры $\mathcal{F}_k$ конечны, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$ и $\mathcal{F}_k \neq \mathcal{F}_{k+1}$ при любом k . Обозначим через $\mathcal{P}$ множество вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, каждая из которых нагружает все атомы из $\mathcal{F}$. Пусть $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ – адаптированный векторнозначный случайный процесс (в.с.п.) на $(\Omega, \mathcal{F})$, где $Z_k = (Z_k^{(1)}, \dots, Z_k^{(l)})$. Как обычно, символ $f|_A$ означает ограничение случайной величины (с.в.) f на событие $A \in \mathcal{F}$. Пусть

$$A = B_1 + \dots + B_m,$$

где A – атом в $\mathcal{F}_k$, B_i – атом в $\mathcal{F}_{k+1}$ ($i = 1, \dots, m$) и $1 \leq m < \infty$ (m зависит от A ; это число мы будем называть характеристикой дробления атома $A \in \mathcal{F}_k$). Обозначим через $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ (соответственно $\mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$) множество мер P из $\mathcal{P}$, относительно которых в.с.п. $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^N$ (соответственно процесс $Z^{(i)} = (Z_k^{(i)}, \mathcal{F}_k^{(i)}, P)_{k=0}^N$) является мартингалом. Имеем: $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) = \bigcap_{i=1}^l \mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$.

Фильтрация $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется хааровской, если для любого n ($0 \leq n \leq L$) σ -алгебра $\mathcal{H}_n$ порождена разбиением Ω ровно на $n+1$ атом. Хааровская фильтрация $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ называется интерполирующей хааровской фильтрацией (и.х.ф.) исходной фильтрации $\mathbb{F}$, если существует последовательность натуральных чисел $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_N = L$, для которой $\mathcal{H}_{n_k} = \mathcal{F}_k$.

Предположим, что $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) \neq \emptyset$, и зафиксируем меру $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$. По мартингалу $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^N$ построим мартингальную хааровскую интерполяцию $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$, используя формулу $Y_n = E^P[Z_N | \mathcal{H}_n]$ (вероятностное решение задачи Дирихле). Если и.х.ф. $\mathbb{H}$ фильтрации $\mathbb{F}$ фиксирована, то процесс Y определяется по мартингалу Z однозначно.

Пусть $|M|$ обозначает число элементов множества M . Говорят, что мартингальная мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ удовлетворяет свойству хааровской единственности ($P \in \text{HUP}(Z)$), если для исходной фильтрации $\mathbb{F}$ можно построить такую и.х.ф. $\mathbb{H}$, что для соответствующей мартингальной интерполяции $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ имеет место соотношение $|\mathcal{P}(Y, \mathbb{H})| = 1$ (т.е. только относительно исходной меры P процесс Y является мартингалом). Более важным является следующее определение. Говорят, что мартингальная мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ удовлетворяет свойству универсальной хааровской единственности ($P \in \text{UHUP}(Z)$), если для любой и.х.ф. $\mathbb{H}$ исходной фильтрации $\mathbb{F}$ имеет место соотношение $|\mathcal{P}(Y, \mathbb{H})| = 1$, где $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ – соответствующая мартингальная интерполяция процесса Z . Аналогично определяются включения $P \in \text{HUP}(Z^{(i)})$ и $P \in \text{UHUP}(Z^{(i)})$. Ясно, что для любого i ($0 \leq i \leq l$) справедливо $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) \cap \text{HUP}(Z^{(i)}) \subset \text{HUP}(Z)$ и $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) \cap \text{UHUP}(Z^{(i)}) \subset \text{UHUP}(Z)$. Из результатов работы [1] вытекает, что если $\text{HUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$ (соответственно $\text{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$) и для любого k ($0 \leq k < N$) и любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ характеристика дробления m не превосходит 3, то $\text{HUP}(Z^{(i)}) = \mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$ (соответственно $\text{UHUP}(Z^{(i)}) = \mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$). Отсюда вытекает справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 1. Если $\text{HUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$ (соответственно $\text{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$) и для любого k ($0 \leq k < N$) и любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ характеристика дробления m не превосходит 3, то $\text{HUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ (соответственно $\text{UHUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$).

На самом деле справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. 1) Если $\text{HUP}(Z) \neq \emptyset$, то для любого k ($0 \leq k < N$) и любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ с характеристикой дробления m , строго большей 1, существует номер i

такой, что выполняется неравенство

$$\min_{1 \leq j \leq m} Z_{k+1}^{(i)}|_{B_j} < Z_k^{(i)}|_A < \max_{1 \leq j \leq m} Z_{k+1}^{(i)}|_{B_j}. \quad (1)$$

2) Если для любого k ($0 \leq k < N$) и любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ с характеристикой дробления m , строго большей 1, существует номер i такой, что выполняется неравенство (1), то $\text{HUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$.

Данная теорема является обобщением на случай векторнозначных процессов соответствующего одномерного результата из [2].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathbb{F}$ – естественная фильтрация процесса Z , то выполняется условие (1) и поэтому $\text{HUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сформулированная теорема 1 остается верной, если $l = \infty$, а также в случае, когда Ω счетно, а $l < \infty$ (определение в последнем случае интерполирующей хааровской фильтрации, а также обсуждение случая $l = 1$ имеется в [2]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть для любого k ($0 \leq k < N$) и любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ характеристика дробления m не превосходит 3 и существует номер i такой, что числа $Z_k^{(i)}|_A, Z_{k+1}^{(i)}|_{B_1}, \dots, Z_{k+1}^{(i)}|_{B_m}$ различны. Тогда $\text{UHUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение, обратное теореме 2, неверно. Действительно, пусть $N = 1$, $l = 2$ и множество Ω дробится на три атома $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Пусть $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} = 2$, $Z_1^{(1)}(\omega_1) = 4$, $Z_1^{(1)}(\omega_2) = 2$, $Z_1^{(1)}(\omega_3) = 1$, $Z_1^{(2)}(\omega_1) = 1$, $Z_1^{(2)}(\omega_2) = 4$, $Z_1^{(2)}(\omega_3) = 2$. Легко видеть, что в данном случае $|\mathcal{P}(Z, \mathbb{F})| = 1$, т.е. $\text{UHUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$. Однако условия теоремы 2 не выполняются ни при $i = 1$, ни при $i = 2$. Таким образом, из того, что $\text{UHUP}(Z) \neq \emptyset$, не следует существование такого номера i , что $\text{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$.

Приведем также один результат, дающий конструкцию мартингальной меры из множества $\text{UHUP}(Z)$, когда условия теоремы 2 не выполняются. Пусть $(\Omega^{(i)}, (\mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N, \mathcal{F}^{(i)})$ – ф.п. ($i = 1, 2$), где $N < \infty$, $\mathcal{F}_0^{(i)} = \{\Omega^{(i)}, \emptyset\}$, а $\mathcal{F}^{(i)} = \mathcal{F}_N^{(i)}$ – конечные σ -алгебры. Обозначим через $\mathbb{F}^{(i)}$ фильтрацию $(\mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$. Рассмотрим $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k^{(1)} \otimes \mathcal{F}_k^{(2)}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)} \otimes \mathcal{F}^{(2)}$ и обозначим $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_k^{(1)} \otimes \mathcal{F}_k^{(2)})_{k=0}^N$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть процесс $(Z_k^{(i)}, \mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$ допускает единственную мартингальную меру $\mathbb{P}^{(i)}$, нагружающую все атомы σ -алгебры $\mathcal{F}^{(i)}$ ($i = 1, 2$). Тогда мера $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \otimes \mathbb{P}^{(2)}$ принадлежит множеству $\text{UHUP}(Z)$.

Список литературы

- [1] М. Н. Богачева, И. В. Павлов, УМН, 57:3 (2002), 143–144; англ. пер.: М. N. Bogacheva, I. V. Pavlov, Russian Math. Surveys, 57:3 (2002), 581–583. [2] И. В. Павлов, А. Г. Данекянц, Обозрение прикл. и промышл. матем., 11:1 (2004), 73–82.

В. В. Горгорова (V. V. Gorgorova)

Ростовский государственный строительный университет

E-mail: gorgorovav@aaanet.ru

Представлено Д. В. Трещёвым

Принято редколлегией

08.10.2007

И. В. Павлов (I. V. Pavlov)

Ростовский государственный строительный университет

E-mail: pavloviv2005@mail.ru