Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Павлов, Диффузионные аппроксимации и изменение условий эргодичности при идентичном обслуживании, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm856>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:46:28

ДИФфуЗИОННЫЕ АППРОКСИМАЦИИ И ИЗМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ ЭРГОДИЧНОСТИ ПРИ ИДЕНТИЧНОМ ОБСЛУЖИВАНИИ

А. В. Павлов

Рассмотрим K узлов, соединенных последовательно. На i -м узле находится N приборов и бесконечное число мест для ожидания, $i = 1, \dots, K$. На первый узел поступает произвольный поток требований, удовлетворяющий единственному ограничению

$$A_T(T)/\lambda(T)T \xrightarrow{P} 1, \quad 0 < C_1 < \lambda(T) < C_2; \quad C_1, C_2 = \text{const},$$

где $A_T(s)$ – число требований, поступивших на первый узел за время s , $s \geq 0$; все процессы и величины рассматриваются в схеме серий, т.е. зависят от параметра $T \rightarrow \infty$. Обозначим через ξ_j^i время обслуживания одним любым прибором i -го узла требования, поступившего на первый узел j -м по счету. В данной статье изучается случай идентичного обслуживания, т.е.

$$\xi_j^1 = \dots = \xi_j^K, \quad j = 1, 2, \dots$$

Следствием идентичности обслуживания являются два интересных факта: во-первых, при сверхвысокой нагрузке на первый узел ($\rho = \lambda M \xi_1^1 = 1$ или $\rho > 1$) очередь и время обслуживания на узлах с номерами $2, \dots, K$ не стремятся к бесконечности; во-вторых, мы имеем пример входного потока требований, у которого при нагрузке $\rho = 1$ поведение процесса накопления требований существенно отличается от традиционного поведения обобщенных процессов гибели-размножения, например, при нулевых начальных условиях при $\rho = 1$ существует стационарный режим и очередь ограничена. Предполагается, что процесс $A_T(s)$ и последовательность $\{\xi_j^1\}$ независимы; случайные величины $\{\xi_j^1\}$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F_T(x) = P\{\xi_1^1 \leq x\}$. В момент окончания обслуживания на i -м узле требование мгновенно поступает на $(i+1)$ -й узел; на всех узлах требования обслуживаются в порядке поступления. Обозначим символом $Z_i^t(1)$ суммарное время обслуживания всех требований, находящихся на i -м узле в момент времени t (виртуальное время обслуживания для случая $N = 1$); $Z_i^t(2)$ – суммарное число требований, находящихся на i -м узле в момент времени t ; $Z_i^t(3)$ – суммарное время пребывания на i -м узле требования с номером $n(t)$, где $n(t)$ – номер последнего требования среди всех, поступивших на 1-й узел за время $[0, t]$; $i = 1, \dots, K$.

Нам понадобятся условия F1 и F2 (c_i с произвольным индексом далее обозначают произвольные константы, не зависящие от T).

F1: $\sup_T (1 - F_T(x)) < c_1/x^{1+c_2}$, $x \rightarrow \infty$, $c_2 > 0$;

F2: для произвольной константы $\beta > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_T \overline{F}_T(\beta x) / \overline{F}_T(x) = 0, \quad \overline{F}_T(x) = 1 - F_T(x).$$

ТЕОРЕМА 1.

$$\max_{2 \leq i \leq K} \sup_{0 \leq t \leq T} \max(Z_i^t(1), Z_i^t(3)) \leq (2N-1)\kappa(T);$$

$$\kappa(T) = \max_{1 \leq j \leq A_T(T)} \xi_j^1, \quad A_T(T) \xrightarrow{P} \text{const} \cdot T, \quad T \rightarrow \infty.$$

Далее, по определению $\chi(C)$ – индикатор C и

$$\overline{F}_T^{(-1)}(x) = \inf x : \overline{F}_T(x) \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условия F1

$$M \max_{1 \leq j \leq n} \xi_j^1 \leq c_* \overline{F}_T^{(-1)}(1/n), \quad c_* \leq 2 + 1/c_2.$$

При выполнении условия F2 следующее неравенство превращается в равенство, причем $c_* = 1 + o(1)$, $T \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют такие множества $B(T)$, что*

$$M Z_j^T(2) \chi(B(T)) \leq \mu(T) \cdot N \cdot (j-1) c_* \overline{F}_T^{(-1)}(1/\lambda(T)T) \cdot (1+o(1)), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P(B(T)) = 1,$$

для произвольного $j = 2, \dots, K$, $\mu(T) = N/M\xi_1^1(T)$.

Доказательство теорем 1–3 существенно опирается на равенство для случая $N = 1$

$$Z_j^t(1) = S_j(t) - t - \inf_{0 \leq u \leq t} (S_j(u) - u), \quad S_j(t) = \sum_{i=1}^{A(j,t)} \xi_i^1,$$

где $A(j, t)$ – число требований, поступивших на j -й узел в течение времени $[0, t]$, $j = 1, \dots, K$. Если обозначить через $k(t)$ номер требования, которое обслуживается $(j-1)$ -м узлом в момент t (коль скоро такое требование есть), а через θ_{j-1}^t – ту часть длины $\xi_{k(t)}^{j-1}$, которая уже была обслужена к моменту времени t на $(j-1)$ -м узле, то

$$S_j(t) = S_{j-1}(t) - (Z_{j-1}^t(1) + \theta_{j-1}^t), \quad j = 2, \dots, K.$$

Подставляя выражение для $Z_{j-1}^t(1)$ в данное равенство, получаем (с учетом $\chi(Z_{j-1}^t(1) = 0) \times \theta_{j-1}^t = 0$):

$$Z_j^t(1) \leq \theta_{j-1}^{u_j(t)} - \theta_{j-1}^t \leq \varkappa(t), \quad j = 2, \dots, K, \quad u_j(t) \leq t,$$

где $(N = 1)$

$$\begin{aligned} u_j(t) &= \sup \left\{ \tau : \inf_{0 \leq u \leq t} \left[\inf_{0 \leq v \leq u} (S_{j-1}(v) - v) - \theta_{j-1}^u \right] \right. \\ &\quad \left. = \inf_{0 \leq v \leq \tau} (S_{j-1}(v) - v) - \theta_{j-1}^\tau \right\} \cap \{\tau \leq t\}, \quad j = 2, \dots, K. \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство опирается на методы [2]–[4].

Из теорем 1–3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Если выполнены классические условия диффузионной аппроксимации, то для каждого из $J = 1, 2, 3$ выполнено:*

$$T^{-1/2} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} Z_2^{Tt}(J), \dots, \sup_{0 \leq t \leq 1} Z_K^{Tt}(J) \right) \xrightarrow{P} (0, \dots, 0), \quad J = 1, 2, 3,$$

причем это утверждение верно, если потребовать только

$$\sup_T M |\xi_1^1(T)|^{2+\varepsilon} < c_0 < \infty, \quad A_T(T) < \lambda_* \cdot T, \quad T \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon > 0$, $c_0 > 0$, $\lambda_* > 0$ – произвольные константы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку приведенные результаты доказывались без использования условий эргодичности, так или иначе формулируемых в терминах “нагрузки” меньшей единицы на первый узел, мы легко получаем пример существенного изменения условий эргодичности на втором узле при любой, в том числе большей единицы, нагрузке на первый узел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972. [2] Павлов А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. С. 716–726. [3] Павлов А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1991. Т. 36. С. 170–175. [4] Павлов А. В. // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 159–160.