Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Потёмин, О дифференциально-геометрических скобках Пуассона третьего порядка, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:05:23

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СКОБКАХ ПУАССОНА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г. В. ПОТЁМИН

В работе [1] определены однородные дифференциально-геометрические скобки Пуассона порядка p , $p \in \mathbb{N}$, и поставлена задача о классификации таких скобок. Для одной пространственной переменной скобки порядка p имеют вид:

$$(1) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta^{(p)}(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_1^k\delta^{(p-1)}(x-y) \\ + [c_k^{ij}(u(x))u_2^k + c_{kl}^{ij}(u(x))u_1^k u_1^l]\delta^{(p-2)}(x-y) + \dots \\ \dots + [d_k^{ij}(u(x))u_p^k + \dots]\delta(x-y), \quad i, j, k, \dots = 1, \dots, n, \\ u_s^k = D^s u^k, \quad \text{где } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Коэффициенты при $\delta^{(p-s)}$ имеют степень s , причем по определению $\deg f(u(x)) = \deg u(x) = 0$, $\deg \delta^{(q)} = \deg u_q = q$, $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

При $p = 1$ получаем скобки Пуассона гидродинамического типа. По ним имеется обширная литература (см., например, [2]).

Дифференциально-геометрические скобки Пуассона определяют на многообразии M^n полевых переменных u^i своеобразную геометрию.

Класс дифференциально-геометрических скобок Пуассона порядка p инвариантен относительно локальных преобразований переменных вида $u = u(v)$. При этом g^{ij} преобразуются как компоненты тензора типа $(2, 0)$, а величины $-C_p^1 g_{js} b_k^{si}$, $-C_p^2 g_{js} c_k^{si}$, $\dots$, $-C_p^p g_{js} d_k^{si}$, где C_p^m – биномиальные коэффициенты, преобразуются как компоненты дифференциально-геометрических связностей [3].

В работе [4] С. П. Новиков высказал гипотезу, что “последняя” связность Γ_{jk}^i в (1) симметрична и имеет нулевую кривизну. Эта гипотеза была доказана в [3], [5]. Тогда существует система координат, в которой связность Γ_{jk}^i равна нулю. Эти локальные координаты определены с точностью до аффинных преобразований.

Невырожденные ($\det(g^{ij}) \neq 0$) однородные дифференциально-геометрические скобки Пуассона второго порядка изучались в [3], [5], [6].

В специальной системе координат скобки второго порядка приводятся к виду $\{u^i(x), u^j(y)\} = (g^{ij}\delta'(x-y))'$, где $g_{ij} = a_{ijk}u^k + g_{ij}^0$, a_{ijk} и $g_{ij}^0 = \text{const}$ и косимметричны по всем индексам [3], [5]. Скобка приводится к постоянному виду $\{u^i, u^j\} = g^{ij}\delta''(x-y)$, если и только если 2-форма $g_{ij}du^i \wedge du^j$ замкнута [6].

В работе [5] есть пример однородной дифференциально-геометрической скобки Пуассона третьего порядка, не приводящейся к постоянному виду. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon^{ij})$ – постоянная симметрическая матрица и $f = (c_k^{ij}u^k + d^{ij})$ – невырожденные. Если выполнены условия $c_i^{kl}\varepsilon_{lj} + c_j^{kl}\varepsilon_{li} = 0$, $\varepsilon^{ie}c_e^{mj}\varepsilon_{mp}f^{pk} + (\text{цикл } i, j, k) = 0$, то можно построить скобку Пуассона третьего порядка

$$(2) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = (g^{ij}\delta''(x-y) + c_k^{ij}u_1^k\delta'(x-y))',$$

где $g^{ij} = (\varepsilon f^{-1}\varepsilon f^{-T}\varepsilon)^{ij}$, $c_k^{ij} = (\varepsilon f^{-1}\varepsilon \frac{\partial f^{-T}}{\partial u^k}\varepsilon)^{ij}$, причем $g_{,k}^{ij} \equiv \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = c_k^{ij} + c_k^{ji}$.

Рассмотрим дифференциально-геометрические скобки Пуассона третьего порядка в специальной системе координат.

ТЕОРЕМА 1. *Дифференциально-геометрические скобки Пуассона третьего порядка приводятся к виду (2), причем коэффициенты в (2) должны удовлетворять условиям:*

$$(3) \quad g_{,k}^{ij} = c_k^{ij} + c_k^{ji}, \quad c_l^{ij}g^{lk} = -c_l^{kj}g^{li}, \\ c_l^{ij}g^{lk} + c_l^{jk}g^{li} + c_l^{ki}g^{lj} = 0, \quad c_{l,m}^{ij}g^{lk} = c_l^{ik}c_m^{lj} - c_l^{ki}c_m^{lj} - c_l^{kj}g_{,m}^{li}.$$

Условия (3) можно переписать для величин с нижними индексами: $c_{mnk} = g_{mj}g_{ni}c_k^{ij}$. Тогда (3) можно переписать следующим образом:

$$(4) \quad \begin{aligned} g_{mn,k} &= -c_{mnk} - c_{nmk}, \quad c_{m(nk)} = 0, \\ c_{[mnk]} &= 0, \quad c_{mnk,l} = -g^{pq}c_{pml}c_{qnk}. \end{aligned}$$

Метрика g_{mn} зависит квадратично от u^i [3], [5]. Действительно, из (4) следует, что $c_{mnk,lr} = 0$, т.е.

$$g_{mn} = g_{mnpq}u^p u^q + g_{mnp}u^p + g_{mn}^0.$$

ТЕОРЕМА 2. Метрика g_{mn} и тензор кручения $T_{jk}^i = g^{im}c_{mjk}$, связанные соотношениями (4), полностью определяют дифференциально-геометрическую скобку Пуассона третьего порядка.

Невырожденная дифференциально-геометрическая скобка Пуассона третьего порядка приводится локальной заменой координат $u = u(v)$ к постоянному виду $g^{ij}\delta'''(x-y)$, если и только если связность $\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{3}g_{jl}c_k^{li}$ в (1) симметрична. Это всегда верно при $n = 1$ [3], [5].

ПРИМЕР. Дифференциально-геометрические скобки Пуассона третьего порядка встречаются при изучении уравнений ассоциативности в двумерной топологической теории поля [7]. Уравнения ассоциативности можно представить как систему гидродинамического типа: $u_t^1 = u_x^2$, $u_t^2 = u_x^3$, $u_t^3 = (u^{22} - u^1 u^3)_x$. Эта система бигамильтонова: $(u_t^1, u_t^2, u_t^3)^T = J_0 \delta H_0 = J_1 \delta H_1$, где δ обозначает вариационную производную, J_0 – гамильтонов оператор первого порядка [7], а J_1 – оператор третьего порядка,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D^3 \\ 0 & D^3 & -D^2 u^1 D \\ D^3 & -Du^1 D^2 & D^2 u^2 D + Du^2 D^2 + Du^1 Du^1 D \end{pmatrix}.$$

Плотность гамильтониана $H_1 = -\frac{1}{2}u^1(D^{-1}u^2)^2 - (D^{-1}u^2)(D^{-1}u^3)$. Здесь метрика имеет вид: $ds^2 = -2u^2(du^1)^2 + 2u^1 du^1 du^2 + 2du^1 du^3 + (du^2)^2$. Если произвести замену $u^1 = v^1$, $u^2 = v^2 - (v^1)^2$, $u^3 = v^3 + v^1 v^2 - \frac{1}{3}(v^1)^3$, то метрика станет плоской: $ds^2 = 2dv^1 dv^3 + (dv^2)^2$. Но несмотря на это, оператор J_1 не сводится к оператору с постоянными коэффициентами, так как система координат (u^i) , где исчезает последняя связность, и система координат (v^i) , где метрика имеет постоянные коэффициенты, – различны. В [7] найдена замена переменных: $u^1 = w_x^1$, $u^2 = w_x^2$, $u^3 = w_x^3 - w_x^1 w_x^2 - w^2 w_{xx}^1$, w^i – плотности трех нелокальных функций Казимира гамильтонова оператора J_1 . В новых переменных гамильтонов оператор J_1 преобразуется

$$\text{в } \tilde{J}_1 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} D.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 2. С. 294–297.
 [2] Новиков С. П. // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98. [3] Потёмин Г. В. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии и алгебраической геометрии в теории солитонов // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М., 1991. [4] Новиков С. П. // УМН. 1985. Т. 40. № 4. С. 79–89.
 [5] Doyle P. W. // J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 4. P. 1314–1338. [6] Потёмин Г. В. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 1. С. 39–42. [7] Ferapontov E. V., Galvao C. A. P., Mokhov O. I., Nutku Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2-d topological field theory // Comm. Math. Phys. 1997.

Нижегородский государственный
технический университет

Принято редколлегией
15.03.1997