Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, О спектрах конечных подматриц бесконечных неразложимых матриц, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:04:59

О СПЕКТРАХ КОНЕЧНЫХ ПОДМАТРИЦ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МАТРИЦ

С. В. САВЧЕНКО

Пусть $A = (a_{ij})$ – конечная или бесконечная матрица с комплексными элементами a_{ij} . Каждой такой матрице A сопоставим ориентированный граф $G(A)$, множество вершин которого совпадает с множеством индексов элементов матрицы, а множество ребер определяется по следующему правилу: из i идет ребро в j тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$. Если граф $G(A)$ связан, то матрица A называется неразложимой.

Для любой конечной последовательности индексов $\gamma = \{i_k\}_{k=0}^n$ длины n положим $Q_A(\gamma) = a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{n-1} i_n}$. Обозначим через $a(A, i, n)$ сумму величин $Q_A(\gamma)$ по всем γ длины n , у которых $i_0 = i_n = i$, $i_k \neq i$ при $k = 1, \dots, n-1$. Положим

$$\varphi(A, i, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(A, i, n) z^n.$$

Пусть $r(A, i)$ – радиус сходимости этого ряда. В дальнейшем мы будем рассматривать класс $\mathcal{F}$ неразложимых матриц A с неотрицательными элементами, удовлетворяющих условию $r(A, i) > 0$ при некотором (а следовательно, при любом) i . Пусть $R(A, i)$ – единственное решение уравнения $\varphi(A, i, z) = 1$ на интервале $(0, r(A, i))$, если $\varphi(A, i, r(A, i)) > 1$, и $R(A, i) = r(A, i)$ в противном случае. Для неразложимой матрицы A величина $R(A, i)$ не зависит от i . Поэтому мы будем обозначать ее просто $R(A)$. Для конечной матрицы A положим $\lambda(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Спек}(A)\}$, где $\text{Спек}(A)$ – спектр A . Для бесконечной матрицы A величину $\lambda(A)$ определим как супремум $\lambda(A')$ по всем ее конечным подматрицам A' . Величины $\lambda(A)$ и $R(A)$ связаны соотношением $\lambda(A) = R(A)^{-1} [1]$.

Положим $r(A) = \sup_i r(A, i)$. Если $r(A) > R(A)$ (это условие эквивалентно неравенству $\varphi(A, i, r(A, i)) > 1$ при некотором (а следовательно, при любом) i) для $A \in \mathcal{F}$, то множество $V^{\max}(A)$ тех i , для которых $r(A, i) = r(A)$, непусто и конечно. Пусть

$$J(A, i) = \{z : \varphi(A, i, z) = 1, |z| < r(A, i)\}$$

(число копий точки z в множестве $J(A, i)$ совпадает с кратностью z как единицы функции $\varphi(A, i, z)$). Используя результаты работы [2], нетрудно показать, что $J(A, j) = J(A, i) \cap \{z : |z| < r(A, j)\}$ при любом j , если $i \in V^{\max}(A)$. Поэтому имеет смысл положить $J(A) = J(A, i)$, где i – любой элемент множества $V^{\max}(A)$. Очевидно, множество $J(A)$ непусто ($R(A) \in J(A)$) и в силу аналитичности функций $\varphi(A, i, z)$ в круге $|z| < r(A, i)$ не более чем счетно. В случае конечной матрицы A функция $\varphi(A, i, z)$ рациональна при любом i . Поэтому $\varphi(A, i, r(A, i)) = \infty$ и, следовательно, $r(A) > R(A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть матрица $A \in \mathcal{F}$ конечна. Тогда

$$\text{Спек}(A) \cap \{z : |z| > r(A)^{-1}\} = J(A)^{-1},$$

где $J(A)^{-1} = \{z^{-1} : z \in J(A)\}$. Каждому собственному значению $\lambda \in J(A)^{-1}$ соответствует ровно одна жорданова клетка или, другими словами, каждое собственное значение $\lambda \in J(A)^{-1}$ имеет только один собственный вектор.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – конечная симметрическая матрица из класса $\mathcal{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Спек}(A) \cap (r(A)^{-1}, \lambda(A)] &= \lambda(A), \\ \text{Спек}(A) \cap [-\lambda(A), -r(A)^{-1}) &= J(A)^{-1} \cap \mathbb{R}^-, \end{aligned}$$

причем последнее множество или пусто, или состоит из одной точки.

Пусть все наддиагональные и поддиагональные элементы матрицы A порядка 5 равны 1, а все остальные – нулю. Тогда множество $\text{Спек}(A) \cap [-\lambda(A), -r(A)^{-1})$ состоит из единственной

точки $z = -\lambda(A)$. Если все элементы матрицы A равны единице, то, очевидно, это множество пусто. Заметим, что для первой матрицы величина $r(A)^{-1}$, как и $-r(A)^{-1}$, является простым собственным значением. Таким образом, все случаи, описанные в следствии 1, имеют место, и величину $r(A)$, вообще говоря, нельзя заменить на меньшее число.

Последовательность подматриц A_n матрицы A будем называть исчерпывающей A , если для любых i и j существует такое $N(i, j)$, что (ij) -элемент матрицы $A - A_n$ равен 0 при $n \geq N(i, j)$. Пусть B_n и B – конечные подмножества комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Будем писать $B_n \rightarrow B$, если $\text{card } B_n = \text{card } B$ при всех достаточно больших n и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что при $n \geq n(\varepsilon)$ для каждой точки $z \in B$ найдется ровно одно $z_n \in B_n$, для которого $|z - z_n| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – бесконечная матрица из класса $\mathcal{F}$ и $r(A) > R(A)$. Тогда существует такое $\varepsilon(A) > 0$, что для любой конечной подматрицы A' матрицы A справедливо следующее условие:

$$\text{Спец}(A') \cap \{z : |z| < \lambda(A')\} \subset \{z : |z| < \lambda(A) - \varepsilon(A)\}.$$

Кроме того, если A_n – последовательность конечных подматриц, исчерпывающих матрицу A , то для любого $\lambda > r(A)^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\text{Спец}(A_n) \cap \{z : |z| > \lambda\} \rightarrow J^{-1}(A) \cap \{z : |z| > \lambda\}.$$

Если бесконечная матрица A с неотрицательными элементами симметрична и $\lambda(A) < \infty$, то она порождает ограниченный самосопряженный оператор на пространстве l_2 . В этом случае под $\text{Спец}(A)$ будем подразумевать спектр этого линейного оператора. Очевидно, его спектральный радиус совпадает с $\lambda(A)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – бесконечная симметрическая матрица из класса $\mathcal{F}$. Тогда точка $z = \lambda(A)$ отделима от остальной части спектра, если и только если $r(A) > R(A)$. В этом случае справедливо утверждение следствия 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если при некотором i особенность функции $\varphi(A, i, z)$ в точке $z = r(A, i)$ отлична от полюса (например, $\varphi(A, i, r(A, i)) < \infty$), то точка $z = r(A, i)^{-1} = r(A)^{-1}$ является предельной точкой множества $\text{Спец}(A)$.

Все вышеизложенные результаты без труда переносятся на случай неразложимой матрицы A с комплексными элементами, если $\varphi(A, i, z) = \varphi(|A|, i, z)$, где $|A| = (|a_{ij}|)$, при некотором (а следовательно, и при любом) i . В частности, они справедливы для любой матрицы Якоби A с $\lambda(A) < \infty$ (для матриц Якоби это условие равносильно равномерной ограниченности по модулю всех ее элементов), диагональные элементы которой неотрицательны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gurevich B. M. // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1984. V. 68. P. 205–242.
- [2] Vere-Jones D. // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1962. V. 13. P. 7–28.

Институт теоретической физики им. Ландау Л. Д. РАН
E-mail: savch@icp.as.ru

Принято редколлегией
15.03.1997