Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:28:55

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПУАНКАРЕ И СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ

М. В. Шамолин

1. Топографические системы в плоском случае. Еще Пуанкаре предложил метод отыскания замкнутых орбит дифференциального уравнения на плоскости [1]. Для этого ему потребовалось ввести понятие “топографической системы” (ТСП) [2].

В его трудах впервые начала рассматриваться достаточно гладкая алгебраическая функция двух переменных, которая стремится к бесконечности, когда одна из ее переменных стремится к бесконечности, положительно определена в окрестности начала координат, имеет первые производные, обращающиеся в нуль также лишь в начале координат, обладает тем свойством, что кривая ее контактов с некоторым векторным полем имеет в начале координат изолированную особую точку (о кривых контактов см. [2], [3]).

При выполнении последних условий поверхности уровня рассматриваемой функции дают так называемую топографическую систему вложенных друг в друга кривых, имеющую вершину в начале.

Обнаружение замкнутых траекторий происходит следующим образом. Вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП, и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля. Чтобы доказать отсутствие замкнутых фазовых характеристик достаточно показать, что выполнено неравенство

$$(1) \quad (v_1, v_2)|_{\mathbb{R}^2} \geq 0.$$

Здесь v_1 – векторное поле, касательное к ТСП, v_2 – векторное поле динамической системы.

2. Характеристические функции и кривые контактов векторных полей в плоском случае. Системы сравнения. С понятием ТСП тесно связано понятие характеристической функции двух полей на плоскости. Последняя функция определяет кососимметрическую форму. Если $F(x_1, x_2) = \text{const}$ есть семейство замкнутых кривых, то система, имеющая явный вид гамильтоновой, $x'_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $x'_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$, задает векторное поле, касательное к семейству кривых ТСП. Тогда последнее неравенство эквивалентно $X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \geq 0$, в котором $Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $Y_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$ есть некоторое векторное поле. Оно касается кривых ТСП.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости. Эти уравнения задаются полями $X = \{X_1, X_2\}$ и $Y = \{Y_1, Y_2\}$ в некоторых координатах. Естественно рассмотреть функцию $\chi = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$, которая отвечает за знак синуса угла между полями X и Y . Очевидно, что $\chi = 0$ там и только там, где поля X и Y касаются.

Функция χ удовлетворяет следующим свойствам: $\chi(X, Y) = -\chi(Y, X)$, $\chi(\lambda X, Y) = \lambda \chi(X, Y)$ для любой действительной функции λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию χ мы назовем *характеристической функцией* двух векторных полей, а уравнение $\chi = 0$ назовем *уравнением кривой контактов* для полей X и Y .

Вычислять характеристическую функцию, конечно, можно для любых двух векторных полей на плоскости. В этой связи назовем *системой сравнения* для данной системы ту систему, качественное расположение траекторий которой полностью известно.

В работе [3] приведены теоремы, уточняющие некоторые методы Пуанкаре в данном вопросе.

3. Топографические системы в пространственном случае. Пространственные ТСП можно определить аналогично ТСП на плоскости (см. выше). При этом (невыврожденные) гиперповерхности уровня коразмерности 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$ образуют топографическую систему вложенных друг в друга гиперповерхностей, имеющих вершину в особой точке.

ТЕОРЕМА. Пусть в односвязной области D пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей единственную точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля v_1 , существует гиперповерхность $\Gamma \ni x_0$, пересекающая границу ∂D по поверхности γ (поверхность γ может быть бесконечно удалена), такая, что существует ТСП с центром в x_0 , задаваемая гладкой функцией V , продолжающаяся вдоль Γ до γ , заполняющая область $K \subseteq D$ и обладающая свойством (1) (вместо $\mathbb{R}^2$ следует писать $\mathbb{R}^n$, $v_2 = \text{grad } V$) почти всюду в K за исключением, быть может, некоторых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя x_0 . (Здесь $V = \text{const}$ – семейство гиперповерхностей ТСП.)

Тогда во всей области D не существует ни одной замкнутой кривой, состоящей из траекторий поля v_1 и пересекающей Γ .

Напомним, что пространственные ТСП особенно удачно помогают решить в ряде случаев проблему различения центра и фокуса. В последнем случае вовсе не обязательно иметь с центром в данной особой точке ТСП. Система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку.

Пусть в области D , содержащей единственную особую точку системы (А), заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система (Б) имеет ту же единственную особую точку x_0 .

Характеристическая функция в пространственном случае строится следующим образом. Пусть v_1, v_2 – два гладких векторных поля в пространстве $\mathbb{R}^n$. По полю v_1 строится (неоднозначно) нормальное гладкое векторное поле n . В каждом конкретном случае поле n строится из тех же соображений, которые позволяют получить в дальнейшем знакоопределенную характеристическую функцию. Последняя определяется как скалярное произведение

$$\chi = (n, v_2).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 системы (Б). Тогда если характеристическая функция $\chi((A), (B))$ положительно (отрицательно) определена в области D , то область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 системы (А).

4. Четномерный случай. В четномерном случае характеристическая функция имеет наиболее естественный вид.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему слабо перевязанных маятников, т.е. консервативную систему с малыми (неконсервативными) добавками, задаваемую полем $\{X_1, X^1, \dots, X_n, X^n\}$ в координатах $x = \{x_1, x^1, \dots, x_n, x^n\}$ следующего вида: $X_i = -x^i + \varepsilon F_i(x)$, $X^i = G_i(x) + \varepsilon F^i(x)$, $dG(0) \geq 0$. Тогда естественно выбрать характеристическую функцию в виде

$$\chi = \sum_{i=1}^n (X_i Y^i - X^i Y_i),$$

где векторное поле Y системы сравнения имеет следующий вид: $Y = \{Y_1, Y^1, \dots, Y_n, Y^n\}$, где $Y_i = -x^i$, $Y^i = G_i(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. [2] Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972. [3] Шамолин М. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1993. № 2. С. 66–70.