Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Н. А. Сидоров, Биективные кодирования автоморфизмов тора и бинарные квадратичные формы, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 231–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:45:15

БИЕКТИВНЫЕ КОДИРОВАНИЯ АВТОМОРФИЗМОВ ТОРА И БИНАРНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

А. М. ВЕРШИК, Н. А. СИДОРОВ

Рассматриваются специальные отображения некоторого символического компакта на двумерный тор, сопрягающие двусторонний сдвиг с заданным гиперболическим автоморфизмом двумерного тора и сохраняющие меру максимальной энтропии. В отличие от известного геометрического метода кодирования при помощи марковских разбиений (см. ссылки в [2], [9]) рассматриваемое кодирование использует арифметическую и групповую структуру. Это позволяет связать арифметику соответствующего алгебраического расширения $\mathbb{Q}$ и свойства некоторой бинарной квадратичной формы с динамикой автоморфизма. Указанные отображения параметризуются единицами квадратичного поля или же гомоклиническими точками, лежащими на некоторой выделенной орбите.

Пусть T – гиперболический автоморфизм $\mathbb{T}^2$, задаваемый матрицей $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$. Положим $r = \text{Tr } M$, $\sigma = \det M$, $D = r^2 - 4\sigma$. Из гиперболичности следует, что $r \neq 0$ для $\sigma = -1$, и $|r| \geq 3$ для $\sigma = +1$. Для простоты будем считать, что $r > 0$. Пусть $\lambda = (r + \sqrt{D})/2$ – большее собственное значение M . В качестве символического компакта $\mathfrak{X}$ выберем либо стационарный марковский компакт $\mathfrak{X}_r$ с пространством состояний $0, 1, \dots, r$ и попарными запретами $\{\varepsilon_n = r \Rightarrow \varepsilon_{n+1} = 0, n \in \mathbb{Z}\}$, если $\sigma = -1$, либо софический компакт $\mathfrak{Y}_r = \{\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty : 0 \leq \varepsilon_n \leq r-1, (\varepsilon_n \dots \varepsilon_{n+s}) \neq (r-1)(r-2)^{s-2}(r-1) \text{ для любого } n \in \mathbb{Z} \text{ и любого } s \geq 2\}$ для $\sigma = +1$. Каждый из двух компактов, таким образом, полностью определяется следом и является β -компактом для $\beta = \lambda$ (см. [7]). Пусть τ обозначает двусторонний сдвиг на $\mathfrak{X}$, т.е. $(\tau\varepsilon)_n = \varepsilon_{n+1}$, и μ – мера максимальной энтропии. Определим операцию *нормализации* как отображение $\mathbf{n} : \prod_{n=-\infty}^\infty \{0, 1, \dots, 2r\} \rightarrow \mathfrak{X}$ следующим образом: если последовательность $\{x_k\}$ финитна, то $\mathbf{n}(\{x_k\}) = \{\varepsilon_k\}_l^{l'}$ – последовательность коэффициентов марковского (софического) β -разложения с $\beta = \lambda$ числа $x = \sum_k x_k \lambda^{-k}$; точнее, $l = [-\log_\lambda x] + 1$, $\varepsilon_l = [\lambda^l x]$, $\varepsilon_k = [\lambda S^{k-l}(\lambda^l x)]$, $k > l$, где $Sx = \{\lambda x\}$. Для произвольной последовательности нормализация определяется как слабый предел нормализаций финитных аппроксимаций. По поводу корректности определения см. [4], [9]. Сумма двух последовательностей из $\mathfrak{X}$ определяется как нормализация их поординатной суммы, аналогично определяется обратный элемент по сложению. Можно показать, что что сумма и разность определены для п.в. пар последовательностей по мере $\mu \times \mu$. После естественной арифметической факторизации $\text{mod } 0$ по мере максимальной энтропии $p : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ на фактор-множестве $\mathfrak{X}'$ определяется групповая структура, относительно которой сдвиг τ есть групповой автоморфизм.

Напомним, что точка $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^2$ называется *гомоклинической нулю* (кратко: *гомоклинической*), если она лежит в пересечении слоев расширяющегося и сжимающегося слоев, проходящих через $\mathbf{0}$. При этом каждая гомоклиническая точка $\mathbf{s}$ может быть получена *единственным образом* как проекция на собственную прямую L_u , отвечающую собственному значению λ , вдоль второй собственной прямой L_s , некоторой точки решетки $\mathbf{z}(\mathbf{s}) \in \mathbb{Z}^2$ и последующем проектировании полученной точки $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{s})$ на тор (см. [1]). Точку $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{s})$ будем называть *плоской координатой* гомоклинической точки $\mathbf{s}$.

ЛЕММА 1. *Плоская координата любой гомоклинической точки T имеет следующий вид: $\mathbf{t}(\mathbf{s}) = \mathbf{t}(u, v) = ((n + u\lambda)/\sqrt{D}, (k + v\lambda)/\sqrt{D})$, где $(u, v) = \mathbf{z}(\mathbf{s})$, $u \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = -\sigma M^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Арифметическим кодированием автоморфизма T называется сквозное отображение $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}' \rightarrow \mathbb{T}^2$, где первое отображение есть факторизация p (см. выше), а второе – групповой гомоморфизм $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathbb{T}^2$, переводящий сдвиг τ в T .*

ТЕОРЕМА 2. *Любое арифметическое кодирование гиперболического автоморфизма T имеет вид*
(1)

$$\varphi_{\mathbf{s}}(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{n=-N}^N \varepsilon_n T^{-n} \mathbf{t}(\mathbf{s}) \right) \text{ mod } \mathbb{Z}^2 \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{n=-N}^N \varepsilon_n \lambda^{-n} \right) \mathbf{t}(\mathbf{s}) \text{ mod } \mathbb{Z}^2 \right),$$

где $\mathbf{s}$ – ненулевая гомоклиническая точка T , $\mathbf{t}(\mathbf{s})$ – ее плоская координата, а умножение под знаком суммы понимается как умножение числа на вектор в $\mathbb{R}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Бинарная квадратичная форма $f_T(x, y) = cx^2 + (a-d)xy - by^2$ называется *формой, ассоциированной с автоморфизмом T* .

ТЕОРЕМА 3. *Отображение $\varphi_{\mathbf{s}}(\cdot)$ переводит меру μ в меру Хаара на торе. При этом число прообразов почти всякой точки равно K , где $K = |f_T(u, v)|$, а $(u, v) = \mathbf{z}(\mathbf{s})$.*

Если $\varphi_{\mathbf{s}}$ – биекция п.в., мы будем называть такое кодирование *биективным арифметическим кодированием (БАК)*. Оказывается, БАК существуют далеко не для всех автоморфизмов T .

ТЕОРЕМА 4. 1. *Следующие предложения эквивалентны:*

- (а) *Гиперболический автоморфизм T , задаваемый матрицей M , допускает биективное арифметическое кодирование.*
 - (б) *M алгебраически сопряжена в $GL(2, \mathbb{Z})$ союзной матрице $C_{r, \sigma} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}$, где $r = \text{Tr } M$ и $\sigma = \det M$.*
 - (в) *Разрешимо диофантово уравнение*
- $$(2) \quad f_T(x, y) = \pm 1.$$
- (г) *Существует точка $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, линейная оболочка орбиты которой под действием степеней M есть $\mathbb{Z}^2$. При этом любая такая точка удовлетворяет уравнению (2).*

2. Пусть T допускает БАК, и $\lambda \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством биективных арифметических кодирований T , группой Дирихле $\mathcal{U}(T) = \{A : AT = TA\} = \{\pm T^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и группой единиц $\mathcal{U}(D) = \{\pm \lambda^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. А именно: если $\varphi_{\mathbf{s}_1}, \varphi_{\mathbf{s}_2}$ – два БАК, то $\varphi_{\mathbf{s}_2} = A\varphi_{\mathbf{s}_1}$ для некоторого $A \in \mathcal{U}(T)$, и $\mathbf{t}(\mathbf{s}_2) = \delta \mathbf{t}(\mathbf{s}_1)$, где $\delta \in \mathcal{U}(D)$.

В случае, когда M не сопряжена союзной матрице, аналогом БАК является *минимальное арифметическое кодирование*, определяемое как кодирование, имеющее наименьшее возможное число прообразов m . Из теоремы 3 вытекает, что $m = \min \{|f_T(u, v)| : (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)\}$, т.е. m есть арифметический минимум квадратичной формы f_T .

Идеи символического кодирования автоморфизмов тора при помощи арифметических разложений возникли в работе [1], по другому поводу рассматривались в [3], обсуждались и развивались в [5], [6], [8]–[10].

Часть результатов может быть обобщена на гиперболические автоморфизмы многомерных торов. В последующих работах этот случай будет рассмотрен подробно.

Доказательства утверждений настоящей статьи можно найти в полной версии [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вершик А. М. // Функц. анализ и его прил. 1992. Т. 26. С. 22–24. [2] Adler R. L. // Bull. Amer. Math. Soc. 1998. V. 35. P. 1–56. [3] Bertrand-Mathis A. // Bull. Math. Soc. Fr. 1986. V. 114. P. 271–323. [4] Frougny Ch., Sakarovitch J. (to appear Internat. J. Algebra Comput). [5] Kenyon R., Vershik A. // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1998. V. 18. P. 357–372. [6] Le Borgne S. Dynamique symbolique et propriétés stochastiques des automorphismes du tore: cas hyperbolique et quasi-hyperbolique // Thèse doctorale, 1997. [7] Parry W. // Acta Math. Hungar. 1960. V. 11. P. 401–416. [8] Sidorov N. A., Vershik A. M. Ergodic properties of Erdős measure, the entropy of the goldenshift, and related problems // Preprint IMS 14/96; to appear in Monatsh. Math. [9] Sidorov N. A., Vershik A. M. Bijective arithmetic codings of hyperbolic automorphisms of the 2-torus, and binary quadratic forms // Preprint IML 98/21; to appear in J. Dynam. Control Sys. [10] Einsiedler M., Schmidt K. // Труды МИРАН. 1997. V. 216. P. 259–279.

Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru sidorov@pdmi.ras.ru

Принято редколлегией
19.08.1998