Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ягодовский, Деформации многозначных групп, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm860>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:42:28

ДЕФОРМАЦИИ МНОГОЗНАЧНЫХ ГРУПП

П. В. Ягодовский

В настоящей работе вводится конструкция деформации дискретных многозначных групп, показано, что деформация обычной группы, приводящая к многозначной группе, задается коциклом с коэффициентами в групповой алгебре и получены классификационные результаты о таких деформациях. Основные определения, примеры и результаты теории многозначных групп см. в [1]–[4]. Пусть $\mathbf{A}$ – ассоциативная алгебра не более чем счетной размерности N над $\mathbb{C}$, $\{a_i\}$ – базис в ней, и a_1 – единица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара $(\mathbf{A}, \{a_i\})$ называется n -групповой алгеброй, где $n \in \mathbb{N}$, если ее структурные константы $\{c_{i,j}^k\}$ – неотрицательные рациональные числа, представление которых в виде несократимых дробей имеет знаменателями только делители числа n , $\sum_k c_{i,j}^k = 1 \forall i, j$ (условие значности) и $\forall i \exists j: c_{i,j}^1 > 0$ и $c_{j,i}^1 > 0$ (Такие пары элементов a_i и a_j будут называться *взаимобратными*).

Название n -групповых алгебр связано с тем, что на самом деле они являются групповыми алгебрами n значных групп.

Введем в пространстве $V = \mathbb{R}^{N(N-1)^2}$ координаты $c_{i,j}^k$, где $i, j = 2, \dots, N$, $k = 1, \dots, N$, и рассмотрим отображение $F: V \rightarrow \mathbb{R}^{N(N-1)^3}$ с компонентами $(\sum_p c_{i,j}^p \cdot c_{p,k}^r - \sum_t c_{i,t}^r \cdot c_{j,k}^t)$. Множество $F^{-1}(0)$ является алгебраическим многообразием с фиксированным вложением в V ; назовем его многообразием ассоциативных алгебр с единицей размерности N . На нем естественно действует группа $\mathrm{GL}((N-1))$; орбиты этого действия в случае $N \leq 5$ изучены (см. результаты и библиографию в [5]). Зафиксируем некоторую n -групповую алгебру $\mathbf{A}$. Пусть $T\mathbf{A}$ – пересечение ядра дифференциала отображения F в точке, соответствующей $\mathbf{A}$, и гиперплоскостей $\{\sum_k c_{i,j}^k = 1 \forall i, j \geq 2\}$. Так как уравнения ассоциативности имеют второй порядок, то любая прямая, лежащая в $T\mathbf{A}$ и имеющая хотя бы еще одну общую точку с $F^{-1}(0)$, полностью лежит на $F^{-1}(0)$. Это означает, что найдя точку $y \in T\mathbf{A} \cap F^{-1}(0)$ с рациональными координатами, мы сразу получаем серию рациональных точек $\{t \cdot y + (1-t) \cdot x \mid t \in \mathbb{Q}\}$, каждая из которых отвечает некоторой ассоциативной алгебре. Те из них, которые удовлетворяют аксиомам n -групповой алгебры, будем называть линейными деформациями $D\mathbf{A}$ алгебры $\mathbf{A}$.

ЛЕММА 2. Произвольная линейная деформация $D\mathbb{Z}_3$ групповой алгебры группы $\mathbb{Z}_3$ имеет следующий вид:

$$(2) \quad \begin{aligned} a * a &= U \cdot a + (1 - Q - U) \cdot b + Q \cdot e, & b * b &= (1 - V - Q) \cdot a + V \cdot b + Q \cdot e, \\ a * b &= b * a = (V + Q) \cdot a + (U + Q) \cdot b + (1 - U - V - 2Q) \cdot e, \end{aligned}$$

где U, V, Q – неотрицательные рациональные числа, удовлетворяющие условиям $1 \geq U + V + 2Q$ и либо $Q \neq 0$ либо $1 - U - V - 2Q \neq 0$.

Один частный случай этой серии приведен в [3], другой известен как алгебра Боуза–Меснера турнира Пэли (см. [6]). Интересно, что из восьми двузначных групп порядка четыре (см. [4]) только у одной групповая алгебра (а именно, у косет-группы $\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_2$) не представима в виде $D\mathbb{Z}_3$.

В подробной статье будет рассмотрена взаимосвязь между линейной деформацией и конструкциями из [4].

Пусть G – некоторая группа. Произвольная линейная деформация $D\mathbf{A}$ групповой алгебры $\mathbf{A}$ группы G может быть записана в виде:

$$i * j = \sum_{r \in G} L^r(i, j) (r \cdot i \cdot j), \quad \text{где } L^r(i, j) \in \mathbb{Q}_+ \text{ и } L^r(i, 1) = L^r(1, i) = \delta^{r,1}.$$

Индекс r в $L^r(i, j)$ будем называть параметром сдвига (сдвигом).

ЛЕММА 3. Точка $\{c_{i,j}^k\}$ (здесь $c_{i,j}^k = L^{k \cdot (j \cdot i)^{-1}}(i, j)$) принадлежит $T\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда линейная функция $L: \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ такая, что $L(i \otimes j) = \sum_{r \in G} L^r(i, j) \cdot r$ — 2-коцикл с коэффициентами в алгебре $\mathbf{A}$ стандартной B -резолюенты алгебры $\mathbf{A}$. Здесь $\mathbf{A}$ рассматривается как $\mathbf{A}$ -модуль с действием Ad , т.е. $\forall i, j, k$

$$d_2(L - 1)(i, j, k) = i^{-1} \cdot L(j, k) \cdot i - L(i \cdot j, k) + L(i, j \cdot k) - L(i, j) = 0$$

$$\text{и } L^1(i, j) = 1 - \sum_{r \neq 1} L^r(i, j).$$

Ниже мы ограничимся случаем коммутативной группы G , нейтральный элемент которой будем обозначать 0. При этом каждая из функций $L^r - \delta^{r,0}$ будет коциклом со значением $\mathbb{Q}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейную деформацию $\mathbf{A}$ назовем *однородной*, если только для одного $r \neq 0$ коцикл L^r отличен от нулевого.

ПРИМЕР 5. Алгебра $\mathbb{Z}[t]/(t^n = 1 - h + ht)$ является однородной деформацией групповой алгебры группы $\mathbb{Z}_n$. Здесь h — параметр деформации. Соответствующий этой деформации коцикл имеет вид: ($n > j \geq 0, n > i \geq 0$) $L^1(i, j) = h$, если $j \geq n - i$, и $L^1(i, j) = 0$, в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Однородную деформацию групповой алгебры группы $\mathbb{Z}$ (короче, деформацию $\mathbb{Z}$) назовем *n-периодической*, если соответствующий коцикл $\{L^r(i, j)\}$ является периодической функцией с периодом n по аргументам i, j .

ТЕОРЕМА 7. Коцикл L^r задает *n-периодическую деформацию группы $\mathbb{Z}$* тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ такой, что $L = p^*L'$, где L' — коцикл, задающий деформацию из примера 5, и либо $p(r) = 0$ либо $p(r) = t$.

ЛЕММА 8 (о непериодическом продолжении коцикла). Если коцикл L^r задает периодическую деформацию группы $\mathbb{Z}$, то существует единственный непериодический коцикл l такой, что $\forall s, t > 0 \quad l(s, t) = L^r(s, t)$.

ТЕОРЕМА 9. Произвольная однородная деформация группы $\mathbb{Z}$ со сдвигом r является либо периодической (см. теорему 7), либо задающий ее коцикл l получается непериодическим продолжением (см. лемму 8) некоторого r -периодического коцикла, либо переводится в деформацию, полученную непериодическим продолжением автоморфизмом взятия обратного в $\mathbb{Z}$.

В заключение я хотел бы выразить благодарность моему научному руководителю проф. В. М. Бухштаберу за постановку задачи и активную поддержку в ее решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бухштабер В. М. Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы // УМН. 1990. Т. 45. №3. С. 185–186. [2] Бухштабер В. М., Рисс Е. Г. Многозначные группы и n -алгебры Хопфа // УМН. 1996. Т. 51. №4. С. 149–150. [3] Buchshtaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Preprint MS-95-13: Univ. of Edinburgh. [4] Buchshtaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, n -Hopf algebras and n -ring homomorphisms // Preprint MS-96-17: Univ. of Edinburgh. [5] Mazzola G. The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five // Manuscripta Math. 1979. V. 27. P. 81–101. [6] Баннаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы и отношения. М.: Мир, 1987.