Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гельфанд, М. И. Граев, GG -функции и их связь с общими гипергеометрическими функциями, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 3–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm862>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:22:59

УДК 517.58

GG-ФУНКЦИИ И ИХ СВЯЗЬ С ОБЩИМИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

И. М. Гельфанд, М. И. Граев

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. GG -функции одной переменной	6
§ 1. GG -системы и GG -функции	6
§ 2. Интегральные представления	15
§ 3. Связь с гипергеометрическими функциями одной переменной	19
Глава 2. Общие GG -функции	26
§ 4. GG -системы и GG -функции	26
§ 5. Описание решений GG -системы	31
§ 6. Интегральные представления	35
§ 7. Связь с общими гипергеометрическими функциями	38
§ 8. Резонансные GG -системы	42
Список литературы	46

Введение

Излагается новый подход к теории гипергеометрических функций, явившийся результатом исследований последних лет.

1. Теория гипергеометрических функций всегда развивалась параллельно с исследованием дифференциальных уравнений, решениями которых эти функции являются. Сам термин “гипергеометрический” первоначально применялся к дифференциальному уравнению Гаусса

$$(0.1) \quad x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

и к степенному ряду

$$(0.2) \quad F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!},$$

где $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$, задающему решение этого уравнения, регулярное в точке 0. В дальнейшем он был распространен на другие классы дифференциальных уравнений и рядов как от одного, так и от многих переменных.

Интенсивное развитие теории гипергеометрических функций началось в 80-х годах этого века в трудах различных и порой независимых друг от друга школ.

2. В [9] было введено понятие общих гипергеометрических систем дифференциальных уравнений, включающее как частный случай все классические примеры. Изучение этих систем и их решений стало предметом ряда последующих исследований.

Согласно [9], каждая общая гипергеометрическая система задается натуральным числом N , подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и параметром $\alpha \in \mathbb{C}^N$ и состоит из следующих уравнений в пространстве голоморфных функций $f(a)$ на $\mathbb{C}^N$:

$$(0.3) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \langle \omega, \alpha \rangle f$$

для любого вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\mathbb{C}^N)'$, ортогонального к Λ ,

$$(0.4) \quad \prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l_i} f = \prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l'_i} f$$

для любых векторов $l = (l_1, \dots, l_N)$, $l' = (l'_1, \dots, l'_N)$ с целыми неотрицательными координатами таких, что $l - l' \in \Lambda$. Решения системы (0.3), (0.4) называются общими гипергеометрическими функциями, ассоциированными с Λ .

Любая гипергеометрическая система для функций от N переменных может быть сведена к системе дифференциальных уравнений для функций от n переменных, где n – ранг подрешетки Λ . Например, если Λ – подрешетка ранга 1 в $\mathbb{Z}^4$, порожденная вектором $(-1, -1, 1, 1)$, то общая гипергеометрическая система, ассоциированная с Λ , сводится к дифференциальному уравнению Гаусса. Такой переход к функциям от меньшего числа переменных зависит от специального выбора координат и приводит к уравнениям более сложной структуры, чем исходные уравнения (0.3), (0.4). Поэтому при исследовании общих гипергеометрических функций удобнее, как правило, обходиться без такого перехода.

Определенные так гипергеометрические системы уравнений голономны. Одна из основных задач состоит в вычислении размерности пространства решений и построении базисов в пространстве решений в виде рядов и в интегральной форме.

3. В этой статье изложен другой подход к понятию гипергеометрической функции, не опирающийся на дифференциальные уравнения. Проиллюстрируем его на примере гипергеометрической функции Гаусса. Для удобства заменим функцию Гаусса F следующей функцией f , отличающейся от нее только множителем:

$$f(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)n!} x^n,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

Функция f , рассматриваемая как функция от четырех переменных a, b, c и x , удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(0.5) \quad \begin{aligned} \frac{df(a, b, c; x)}{dx} &= f(a+1, b+1, c+1; x), \\ f(a+1, b, c; x) - xf(a+1, b+1, c+1; x) &= af(a, b, c; x), \\ f(a, b+1, c; x) - xf(a+1, b+1, c+1; x) &= bf(a, b, c; x), \\ f(a, b, c-1; x) - xf(a+1, b+1, c+1; x) &= (c-1)f(a, b, c; x). \end{aligned}$$

(Три последних соотношения – соотношения Гаусса.)

Дифференциальное уравнение Гаусса (0.1) следует из уравнений (0.5). Поэтому определение и исследование функции f может основываться не на дифференциальном уравнении 2-го порядка, а на системе соотношений (0.5).

Отметим важное различие между решениями дифференциального уравнения Гаусса и решениями системы уравнений (0.5). Множество первых сохраняется при умножении на любую функцию от a, b, c , а множество вторых – только при умножении на периодическую функцию с периодом 1 от a, b, c .

Такой подход, когда при определении гипергеометрических функций дифференциальные уравнения заменяются системами линейных соотношений между функцией, ее первыми частными производными и сдвигами функции по параметрам, применяется здесь к общим гипергеометрическим функциям. Именно, вместо системы дифференциальных уравнений (0.3), (0.4) на функции $f(a)$ введена система линейных соотношений между функцией $f(\alpha, a)$ от $\alpha, a \in \mathbb{C}^N$, ее первыми частными производными по a_i и ее сдвигами по α_i . Эта система определяется произвольным линейным подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$ и состоит из уравнений вида:

$$(0.6) \quad \frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_i} = f(\alpha - e_i, a), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $e_1, \dots, e_N$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^N$,

$$(0.7) \quad f(\alpha + l, a) = f(\alpha, a) \quad \text{для любого } l \in L,$$

$$(0.8) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \langle \alpha, \omega \rangle f$$

для любого вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\mathbb{C}^N)'$, ортогонального к L .

Система (0.6)–(0.8) называется GG-системой, ассоциированной с подпространством L , а ее голоморфные относительно a решения – GG-функциями, ассоциированными с L .

Если подпространство L линейно порождено подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$, то любая GG-функция, ассоциированная с L , удовлетворяет системе уравнений (0.3), (0.4), т.е. является общей гипергеометрической функцией, ассоциированной с подрешеткой Λ . Поэтому теорию общих гипергеометрических функций можно строить, исходя не из гипергеометрической системы (0.3), (0.4), а из системы соотношений (0.6)–(0.8).

Такой подход позволяет по-новому организовать теорию, в частности, получить более естественные конструкции базисов в пространствах решений.

Если подпространство L не порождено подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$, то GG -функции, ассоциированные с L , уже не сводятся к решениям дифференциальных уравнений. Таким образом, GG -функции представляют собой более широкий класс функций, чем общие гипергеометрические функции.

В статье приведено описание решений GG -системы, ассоциированной с произвольным подпространством L . Оно дано как в форме рядов, так и в интегральной форме, и не зависит от структуры подпространства L . В случае, когда L порождено подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$, построены новые базисы в пространстве решений соответствующей гипергеометрической системы и установлена их связь с известными ранее.

Первая глава статьи посвящена GG -функциям, ассоциированным с одномерными подпространствами L . Условно мы называем их GG -функциями одной переменной, поскольку как функции от $a_1, \dots, a_N$ они сводятся к функциям от одной переменной. Для этих функций установлена, в частности, их связь с известными гипергеометрическими функциями от одной переменной – функциями Похгаммера ${}_pF_q$, G -функциями Мейера G_{pq}^{mn} и H -функциями Фокса H_{pq}^{mn} . Общий случай рассматривается во второй главе.

Последний раздел второй главы посвящен “резонансному” случаю: установлено, что для некоторых GG -систем ограничения GG -функций на подходящие плоскости в пространстве параметров удовлетворяют дополнительным дифференциальным уравнениям. Показано, в частности, что гипергеометрическая система дифференциальных уравнений, связанная с грассманианом $G_{p,n}$ p -мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$, см. [1], возникает как резонансный случай GG -системы, связанной с пространством $\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^n$.

Глава 1. GG -функции одной переменной

§ 1. GG -системы и GG -функции

1.1. Определение GG -системы. Пусть $l \in \mathbb{C}^N$ – произвольный ненулевой вектор, $L \subset \mathbb{C}^N$ – порожденное l одномерное линейное подпространство и $L^\perp \subset (\mathbb{C}^N)'$ – ортогональное дополнение к L , т.е. множество всех векторов $\omega \in (\mathbb{C}^N)'$ таких, что $\langle \omega, l \rangle = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. GG -системой, ассоциированной с линейным подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, или, по-другому, с вектором $l \in \mathbb{C}^N$, называется следующая система уравнений в пространстве функций $f(\alpha, a)$, $\alpha, a \in \mathbb{C}^N$:

$$(1.1) \quad \frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_i} = f(\alpha - e_i, a), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $e_1, \dots, e_N$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^N$,

$$(1.2) \quad f(\alpha + tl, a) = f(\alpha, a) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{C},$$

$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \langle \alpha, \omega \rangle f$$

для любого $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in L^\perp$.

Голоморфные относительно a решения этой системы называются GG-функциями, ассоциированными с L .

Убедимся, что если L содержится в каком-либо собственном координатном подпространстве $\mathbb{C}^{N-1} \subset \mathbb{C}^N$, то GG-функции на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ сводятся к GG-функциям на $\mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C}^{N-1}$. В самом деле, пусть, например, $\mathbb{C}^{N-1}$ порождено векторами $e_1, \dots, e_{N-1}$. Тогда любая GG-функция f на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, ассоциированная с L , удовлетворяет, в частности, уравнениям $a_N \frac{\partial f}{\partial a_N} = \alpha_N f$ и $\frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_N} = f(\alpha - e_N, a)$. Отсюда следует, что функция f представима в виде:

$$f(\alpha, a) = u(\alpha_N) \frac{a_N^{\alpha_N}}{\Gamma(\alpha_N + 1)} f_1(\alpha', a'),$$

где $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$, $a' = (a_1, \dots, a_{N-1})$, а u — периодическая функция с периодом 1. Из других уравнений GG-системы следует, что f_1 — GG-функция на $\mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C}^{N-1}$, ассоциированная с L .

В дальнейшем будем предполагать, что L не содержится ни в каком собственном координатном подпространстве, т.е. все координаты ненулевых векторов $l \in L$ отличны от нуля.

1.2. Сведение к функциям одной переменной. Зададим на $\mathbb{C}^N$ представление аддитивной группы $L^\perp$, сопоставив каждому элементу $\omega \in L^\perp$ преобразование

$$\alpha \mapsto e^\omega a,$$

где $e^\omega a = (e^{\omega_1} a_1, \dots, e^{\omega_N} a_N)$. Так как $\dim L^\perp = N - 1$, то орбиты группы $L^\perp$, не принадлежащие координатным подпространствам (орбиты общего положения), имеют размерность $N - 1$, а многообразие X этих орбит одномерно.

С преобразованиями $\alpha \mapsto e^\omega a$ ассоциировано действие группы $L^\perp$ на функции в $\mathbb{C}^N$, $f(a) \mapsto f(e^\omega a)$, в том числе на мономы $a^l = a_1^{l_1} \dots a_N^{l_N}$, $l \in \mathbb{C}^N$, где под $a_i^{l_i}$ понимается одна из ветвей многозначной степенной функции. Элемент $\omega \in L^\perp$ переводит моном a^l в $e^{\langle \omega, l \rangle} a^l$. В частности, если $l \in L$, $l \neq 0$, то $x = a^l$ постоянно на орбитах группы $L^\perp$, и можно принять x в качестве координаты на многообразии орбит X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Любую GG-функцию f , ассоциированную с подпространством L , можно представить в виде:

$$(1.4) \quad f(\alpha, a) = a^\alpha F(\alpha, x), \quad x = a^l,$$

где $l \in L$ — произвольный фиксированный ненулевой вектор, а F — решение следующей системы уравнений:

$$(1.5) \quad F(\alpha + tl, x) = x^{-t} F(\alpha, x) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{C},$$

$$(1.6) \quad \left(\alpha_i + l_i x \frac{d}{dx} \right) F(\alpha, x) = F(\alpha - e_i, x), \quad i = 1, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем: $(e^\omega a)^\alpha = e^{\langle \omega, \alpha \rangle} a^\alpha$ для любого $\omega \in L^\perp$. С другой стороны, из (1.3) следует, что $f(\alpha, e^\omega a) = e^{\langle \omega, \alpha \rangle} f(\alpha, a)$. Значит, функция $a^{-\alpha} f(\alpha, a)$ постоянна на орбитах группы $L^\perp$. Этим доказано, что функция f представима в виде (1.4). Подставив (1.4) в уравнения (1.1) и (1.2), получаем уравнения (1.5), (1.6) для функции F .

Очевидно и обратное, если функция F удовлетворяет уравнениям (1.5), (1.6), то функция f вида (1.4) удовлетворяет GG -системе (1.1)–(1.3).

Назовем систему уравнений (1.5), (1.6) приведенной GG -системой, а ее решения – приведенными GG -функциями, ассоциированными с подпространством L .

Подчеркнем, что приведенная GG -система зависит не только от L , но и от выбора вектора l в L , определяющего координату в пространстве орбит X .

ПРИМЕЧАНИЕ. Из предложения 1.1 следует, что GG -функции – многозначные функции на $\mathbb{C}^N$, причем особыми подмногообразиями для них являются координатные подпространства в $\mathbb{C}^N$.

1.3. Описание решений. Обозначим через $V_j \subset \mathbb{C}^N$ координатное подпространство, натянутое на векторы e_i , $i \neq j$ ($j = 1, \dots, N$). Поставим задачу: найти все решения GG -системы (1.1)–(1.3), регулярные в окрестности общей точки подпространства V_j , т.е. точки $a = (a_1, \dots, a_N)$, у которой $a_j = 0$ и $a_i \neq 0$ при $i \neq j$.

Сведем сначала эту задачу к задаче для функций на пространстве орбит X . Пусть $l^j = (l_1^j, \dots, l_N^j)$ – вектор из L , определенный условием $l_j^j = 1$. Примем в качестве координат на $\mathbb{C}^N$ в окрестности любой общей точки на V_j все a_i , $i \neq j$, и

$$y_j = a^{l^j} = a_j \prod_{i \neq j} a_i^{l_i^j},$$

где $a_i^{l_i^j}$ – любая из ветвей степенной функции.

Пусть $f(\alpha, a)$ – произвольная GG -функция, ассоциированная с подпространством L . Согласно предложению 1.1, ее можно представить в виде:

$$(1.7) \quad f(\alpha, a) = a^\alpha F(\alpha, y_j),$$

где F – приведенная GG -функция. Так как $a^\alpha = (\prod_{i \neq j} a_i^{\alpha_i - l_i^j \alpha_j}) y_j^{\alpha_j}$, то имеем:

$$(1.8) \quad f(\alpha, a) = \left(\prod_{i \neq j} a_i^{\alpha_i - l_i^j \alpha_j} \right) \varphi_j(\alpha, y_j),$$

где

$$(1.9) \quad \varphi_j(\alpha, y_j) = y_j^{\alpha_j} F(\alpha, y_j).$$

Подставив (1.8) в уравнения GG -системы (1.1)–(1.3), получаем следующую систему уравнений для функции φ_j :

$$(1.10) \quad \varphi_j(\alpha + t l^j, y_j) = \varphi_j(\alpha, y_j) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{C},$$

$$(1.11) \quad \left(\alpha_i - l_i^j \alpha_j + l_i^j y_j \frac{d}{dy_j} \right) \varphi_j(\alpha, y_j) = \varphi_j(\alpha - e_i, y_j) \quad \text{при } i \neq j,$$

$$(1.12) \quad \frac{d\varphi_j(\alpha, y_j)}{dy_j} = \varphi_j(\alpha - e_j, y_j).$$

В новой системе координат на $\mathbb{C}^N$ подпространство V_j задается в окрестности любой своей общей точки уравнением $y_j = 0$. Поэтому из (1.8) следует, что условие регулярности f в окрестности общей точки на V_j эквивалентно условию регулярности функции φ_j в окрестности $y_j = 0$. Таким образом, исходная задача свелась к описанию всех решений системы уравнений (1.10)–(1.12), регулярных в окрестности точки $y_j = 0$.

Пусть $\pi_j: \mathbb{C}^N \rightarrow V_j$ – проекция, заданная условиями: $\pi_j L = 0$, $\pi_j e_i = e_i$ при $i \neq j$. Очевидно, что

$$\pi_j \alpha = \alpha - \frac{\alpha_j}{l_j} l,$$

где $l \neq 0$ – любой вектор из L .

Определим функцию Γ_j на V_j равенством:

$$\Gamma_j(\beta) = \prod_{i \neq j} \Gamma(\beta_i),$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Обозначим: $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in V_j$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Любое решение GG-системы (1.1)–(1.3), регулярное в окрестности общей точки подпространства V_j , имеет вид:*

$$(1.13) \quad f_j(\alpha, a) = \prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(\beta + n\lambda)}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1})} \frac{y_j^n}{n!},$$

где $\beta = \pi_j \alpha$, $\lambda = -\pi_j e_j = \sum_{i \neq j} l_i^j e_i$, $y_j = a_j \prod_{i \neq j} a_i^{l_i^j}$ и $u(\beta)$ – периодическая функция на V_j с периодом 1 по каждой из координат.

Обратно, любой формальный ряд вида (1.13), где $u(\beta)$ – периодическая функция на V_j с периодом 1 по каждой из координат, формально удовлетворяет GG-системе (1.1)–(1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\alpha, a) = (\prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i}) \varphi_j(\alpha, y_j)$ – произвольное решение системы (1.1)–(1.3), регулярное в окрестности $y_j = 0$. Тогда функция φ_j удовлетворяет уравнениям (1.10)–(1.12) и представима в этой окрестности сходящимся рядом:

$$(1.14) \quad \varphi_j(\alpha, y_j) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) \frac{y_j^n}{n!}.$$

Из (1.12) следует, что

$$(1.15) \quad c_n(\alpha) = \varphi_j^{(n)}(\alpha, 0) = \varphi_j(\alpha - ne_j, 0).$$

Далее, из (1.10) следует, что функция $\varphi_j(\alpha, 0)$ опускается на V_j , т.е. представима в виде

$$\varphi_j(\alpha, 0) = v(\pi_j \alpha),$$

где v – функция на V_j . Наконец, из (1.11) следует, что функция v удовлетворяет соотношениям

$$(1.16) \quad \beta_i v(\beta) = v(\beta - e_i), \quad i \neq j.$$

Общее решение уравнений (1.16) имеет следующий вид:

$$(1.17) \quad v(\beta) = \frac{u(\beta)}{\Gamma_j(\beta + \mathbf{1})},$$

где $u(\beta)$ – произвольная периодическая функция на V_j с периодом 1 по каждой из координат. Подставив (1.17) в выражение (1.15) для $c_n(\alpha)$, получаем:

$$(1.18) \quad c_n(\alpha) = \frac{u(\beta + n\lambda)}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1})},$$

где $\beta = \pi_j \alpha$, $\lambda = -\pi_j e_j$.

Обратно, убедимся, что любой формальный ряд (1.13), где $u(\beta)$ – периодическая функция на V_j с периодом 1 по каждой из координат, удовлетворяет системе уравнений (1.1)–(1.3). Для этого достаточно убедиться, что формальный ряд

$$\varphi_j(\alpha, y_j) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) \frac{y_j^n}{n!},$$

где $c_n(\alpha) = \frac{u(\beta + n\lambda)}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1})}$, $\beta = \pi_j \alpha$, $\lambda = -\pi_j e_j$, удовлетворяет уравнениям (1.10)–(1.12).

Очевидно, что φ_j удовлетворяет уравнениям (1.10) и (1.12). Проверим соотношение (1.11). Имеем для любого $i \neq j$:

$$\left(\alpha_i - l_i^j \alpha_j + l_i^j y_j \frac{d}{dy_j} \right) \varphi_j(\alpha, y_j) = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_i + n\lambda_i) c_n(\alpha) \frac{y_j^n}{n!},$$

и соотношение (1.11) следует из равенства: $(\beta_i + n\lambda_i) c_n(\alpha) = c_n(\alpha - e_i)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любая GG -функция, регулярная в окрестности общей точки координатного подпространства V_j , однозначно определяется своими значениями на V_j .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для каждого $j = 1, \dots, N$ приведенной GG -системе (1.5), (1.6) формально удовлетворяют следующие формальные ряды:

$$(1.19) \quad F_j(\alpha, y_j) = y_j^{-\alpha_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(\beta + n\lambda)}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1})} \frac{y_j^n}{n!},$$

где $u(\beta)$ – периодическая функция на V_j с периодом 1 по каждой из координат.

Из теоремы 1.1 и из асимптотики для гамма-функций следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Ненулевые решения GG-системы (1.1)–(1.3), регулярные в окрестности общих точек подпространства V_j , существуют тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=0}^N \operatorname{Re} l_i^j \geq 0.$$

1.4. Операторы L_k . Введем для каждого $j = 1, \dots, N$ операторы L_k , $k \in \mathbb{Z}^N$, в пространстве функций вида $f(\alpha, a) = (\prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i}) \varphi_j(\alpha, y_j)$, где $\beta = \pi_j \alpha$:

$$(L_k f)(\alpha, a) = e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} \left(\prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i} \right) \varphi_j(\alpha, e^{2\pi i \langle k, \lambda \rangle} y_j),$$

где $\lambda = -\pi_j e_j$, $\langle k, \beta \rangle = \sum_{i \neq j} k_i \beta_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Операторы L_k переводят GG-функции снова в GG-функции.*

В самом деле, условие, что функция $f(\alpha, a) = (\prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i}) \varphi_j(\alpha, y_j)$ является GG-функцией, эквивалентно условию, что φ_j удовлетворяет уравнениям (1.10)–(1.12). Нетрудно убедиться, что эти уравнения сохраняются при преобразованиях

$$\varphi_j(\alpha, y_j) \mapsto e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} \varphi_j(\alpha, e^{2\pi i \langle k, \lambda \rangle} y_j).$$

1.5. GG-ряды. Положим $x = a^l$, где $l = (l_1, \dots, l_N) \in L$ – произвольный фиксированный ненулевой вектор. Тогда, поскольку $y_j = x^{1/l_j}$, $j = 1, \dots, N$, определенные в п. 1.3 формальные решения f_j GG-системы (1.1)–(1.3) и формальные решения F_j приведенной GG-системы (1.5), (1.6) можно представить в виде:

$$(1.20) \quad f_j(\alpha, a) = \prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(\beta + n\lambda)}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1})} \frac{(x^{1/l_j})^n}{n!},$$

$$(1.21) \quad F_j(\alpha, x) = x^{-\alpha_j/l_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(\beta + n\lambda)}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1})} \frac{(x^{1/l_j})^n}{n!},$$

где $\beta = \pi_j \alpha$, $\lambda = -\pi_j e_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем GG-рядами и приведенными GG-рядами ассоциированными с подпространством L , и обозначим через f_{jk} и F_{jk} соответственно формальные ряды (1.20) и (1.21), где

$$u(\beta) = e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} = e^{2\pi i \sum_{s \neq j} k_s \beta_s}, \quad k_s \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$(1.22) \quad f_{jk}(\alpha, a) = e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} \prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\frac{2\pi i}{l_j} \sum_{s \neq j} k_s \lambda_s} x^{1/l_j})^n}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1}) n!},$$

$$(1.23) \quad F_{jk}(\alpha, x) = e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} x^{-\frac{\alpha_j}{l_j}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\frac{2\pi i}{l_j} \sum_{s \neq j} k_s \lambda_s} x^{1/l_j})^n}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1}) n!}.$$

Очевидно, что

$$(1.24) \quad f_{jk}(\alpha, a) = L_k f_j,$$

где

$$(1.25) \quad f_j(\alpha, a) \equiv f_{j0}(\alpha, a) = \prod_{i \neq j} a_i^{\beta_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^{1/l_j})^n}{\Gamma_j(\beta + n\lambda + \mathbf{1})n!},$$

а L_k – операторы, введенные в п. 1.4.

ЗАМЕЧАНИЕ. При любом фиксированном j функции f_{jk} различаются между собой выбором ветвей многозначных функций $a_i^{\alpha_i}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. При каждом фиксированном $j = 1, \dots, N$ GG -ряды (1.22) и (1.23) сходятся при достаточно малых значениях x^{1/l_j} , если

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{l_i}{l_j} \geq 0,$$

и расходятся при любом $x \neq 0$, если

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{l_i}{l_j} < 0.$$

В случае, когда $\sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{l_i}{l_j} > 0$, они сходятся при любых $a \in \mathbb{C}^N$, не принадлежащих координатным подпространствам.

Утверждение легко следует из асимптотических оценок для гамма-функции.

ПРИМЕР. В случае $N = 2$, т.е. когда L – подпространство, порожденное вектором $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{C}^2$, GG -ряды f_1, f_2 имеют вид:

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2; a_1, a_2) = a_2^{\alpha_2 - \frac{l_2}{l_1} \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1 a_2^{l_2/l_1})^n}{\Gamma(\alpha_2 + (n - \alpha_1) \frac{l_2}{l_1} + 1)n!},$$

$$f_2(\alpha_1, \alpha_2; a_1, a_2) = a_1^{\alpha_1 - \frac{l_1}{l_2} \alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_2 a_1^{l_1/l_2})^n}{\Gamma(\alpha_1 + (n - \alpha_2) \frac{l_1}{l_2} + 1)n!}.$$

Ряд f_1 сходится при достаточно малых значениях $a_1 a_2^{l_2/l_1}$, если $\operatorname{Re} \frac{l_2}{l_1} \geq -1$, а ряд f_2 сходится при достаточно малых значениях $a_2 a_1^{l_1/l_2}$, если $\operatorname{Re} \frac{l_1}{l_2} \geq -1$. В частности, если $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$, то при l_1, l_2 одного знака сходятся оба ряда; если же l_1, l_2 разных знаков и $l_1 \neq -l_2$, то из двух рядов f_1, f_2 сходится только один.

1.6. Связь с H -функциями Фокса. H -функция Фокса с целыми параметрами (m, n, p, q) , где $0 < m \leq q, 0 \leq n \leq p$, задается следующим рядом (см. [31], [50]):

$$H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{matrix} [a_p, A_p] \\ [b_q, B_q] \end{matrix} \right. \right] = H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = \sum_{j=1}^m {}^j H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{matrix} [a_p, A_p] \\ [b_q, B_q] \end{matrix} \right. \right],$$

где

$$(1.26) \quad {}^j H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{matrix} [a_p, A_p] \\ [b_q, B_q] \end{matrix} \right. \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{s=1, s \neq j}^m \Gamma(b_s - (b_j + k)B_s/B_j)}{\prod_{s=m+1}^q \Gamma(1 - b_s + (b_j + k)B_s/B_j)} \times \frac{\prod_{s=1}^n \Gamma(1 - a_s + (b_j + k)A_s/B_j)}{\prod_{s=n+1}^p \Gamma(a_s - (b_j + k)A_s/B_j)} \frac{(-1)^k z^{(b_j+k)/B_j}}{k! B_j}.$$

Предполагается, что a_i, b_i – произвольные числа, A_i, B_i – вещественные положительные числа. Условия сходимости этих рядов см. в [50]. Здесь мы будем рассматривать произвольные формальные ряды вида (1.26), не накладывая каких-либо условий на параметры.

Установим связь между рядами H_{pq}^{mn} и формальными решениями приведенных GG-систем.

Рассмотрим приведенную GG-систему, ассоциированную с подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, порожденным вектором

$$l = (-A_1, \dots, -A_p, B_1, \dots, B_{p+q}), \quad p + q = N.$$

Согласно п. 1.3, этой системе формально удовлетворяют формальные ряды

$$F_{p+j}(\alpha, x) = x^{-\alpha_{p+j}/B_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) \frac{(x^{1/B_j})^k}{k!}$$

с коэффициентами

$$c_k(\alpha) = \frac{u(\beta + k\lambda)}{\prod_{s=1}^p \Gamma(\alpha_s + (\alpha_{p+j} - k)A_s/B_j + 1) \prod_{s=1, s \neq j}^q \Gamma(\alpha_{p+s} - (\alpha_{p+j} - k)B_s/B_j + 1)},$$

где $u(\beta)$ – произвольная периодическая функция на V_j с периодом 1 по каждой из координат. Пусть u – функция, заданная следующим равенством:

$$u(\beta) = \prod_{s=1}^n \frac{\pi e^{\pi i \beta_s}}{\sin(-\pi \beta_s)} \prod_{s=1, s \neq j}^m \frac{\pi e^{\pi i \beta_{p+s}}}{\sin(-\pi \beta_{p+s})}.$$

Тогда, используя соотношение $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}$, можно выражение для $c_k(\alpha)$ привести к виду:

$$c_k(\alpha) = \frac{\prod_{s=1, s \neq j}^m \Gamma(-\beta_{p+s} - k\lambda_{p+s}) \prod_{s=1}^n \Gamma(-\beta_s - k\lambda_s)}{\prod_{s=m+1}^q \Gamma(\beta_{p+s} + k\lambda_{p+s} + 1) \prod_{s=1}^n \Gamma(\beta_s + k\lambda_s + 1)} \times \prod_{s=1, s \neq j}^m e^{\pi i (\beta_{p+s} + \kappa \lambda_{p+s})} \prod_{s=1}^n e^{\pi i (\beta_s + \kappa \lambda_s)}.$$

Положим

$$(1.27) \quad \alpha_s = a_s - 1, \quad s = 1, \dots, p; \quad \alpha_{p+s} = -b_s, \quad s = 1, \dots, q.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\beta_s + k\lambda_s &= \alpha_s + (\alpha_{p+j} - k)A_s/B_j = a_s - (b_s + k)A_s/B_j - 1, \quad s = 1, \dots, p; \\ \beta_{p+s} + k\lambda_{p+s} &= \alpha_{p+s} - (\alpha_{p+j} - k)B_s/B_j = -b_s + (b_s + k)B_s/B_j,\end{aligned}$$

и выражение для $c_k(\alpha)$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}c_k(\alpha) &= (-1)^k \frac{\prod_{s=1, s \neq j}^m \Gamma(b_s - (b_s + k)B_s/B_j) \prod_{s=1}^n \Gamma(1 - a_s + (b_s + k)A_s/B_j)}{\prod_{s=m+1}^q \Gamma(1 - b_s + (b_s + k)B_s/B_j) \prod_{s=1}^n \Gamma(a_s - (b_s + k)A_s/B_j)} \\ &\quad \times \prod_{s=1, s \neq j}^m e^{\pi i(-b_s + (b_s + k)B_s/B_j)} \prod_{s=1}^n e^{\pi i(a_s - (b_s + k)A_s/B_j)}.\end{aligned}$$

Сравнивая между собой коэффициенты рядов ${}^jH_{pq}^{mn}$ и F_{p+j} , заключаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Если параметры α_i связаны с a_i и b_i равенствами (1.27), то*

$$(1.28) \quad F_{p+j}(\alpha, x) = v_j(a, b) {}^jH_{pq}^{mn} \left[e^{\pi i r} x \begin{vmatrix} [a_p, A_p] \\ [b_q, B_q] \end{vmatrix} \right],$$

где

$$\begin{aligned}r &= \sum_{s=1, s \neq j}^m B_s - \sum_{s=1}^n A_s, \\ v_j(a, b) &= B_j \exp \left(\pi i \left(\sum_{s=1}^m b_s \frac{B_s - B_j}{B_j} + \sum_{s=1}^n (a_s B_j - b_s A_s) \frac{u}{B_j} - r \frac{b_j}{B_j} \right) \right).\end{aligned}$$

1.7. Замечание об определении GG -системы. Определение GG -системы из п. 1.1 можно обобщить, заменив уравнения (1.1) уравнениями

$$\frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_i} = \varepsilon_i f(\alpha - e_i, a), \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

а уравнения (1.2) и (1.3) оставив без изменения. Очевидно, эта система получается из исходной заменой переменных: $a_i \mapsto \varepsilon_i a_i$.

Для таких GG -систем все определения и результаты предыдущих пунктов остаются без изменения. Различие возникает только при описании решений, регулярных в окрестности общих точек координатных подпространств. Именно, при описании этих решений уравнения (1.16) заменяются уравнениями

$$(1.29) \quad \beta_i v(\beta) = \varepsilon_i v(\beta - e_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Поскольку решениями уравнения $tf(t) = \varepsilon f(t-1)$ являются при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$ соответственно функции $\Gamma^{-1}(t+1)$ и $\Gamma(-t)$, то общее решение уравнения (1.29) можно представить в виде:

$$v(\beta) = \frac{\prod_{i, \varepsilon_i = -1} \Gamma(-\beta_i)}{\prod_{i, \varepsilon_i = 1} \Gamma(\beta_i + 1)} u(\beta),$$

где $u(\beta)$ – произвольная периодическая функция с периодом 1 по каждой из координат. В результате, например, выражения (1.21) для формальных решений приведенной GG-системы заменяются следующими:

$$(1.30) \quad F_j(\alpha, x) = x^{-\alpha_j/l_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(u(\beta + n\lambda) \frac{\prod'_{i, \varepsilon_i=-1} \Gamma(-\beta - n\lambda)}{\prod'_{i, \varepsilon_i=1} \Gamma(\beta + n\lambda + 1)} \frac{(x^{1/l_j})^n}{n!} \right),$$

где $\beta = \pi_j \alpha$, $\lambda = -\pi_j e_j$; штрих означает, что отброшен множитель с номером $s = j$.

§ 2. Интегральные представления

Пусть $T = \mathbb{C}^{N-1} \setminus \Sigma$, где Σ – объединение координатных подпространств в $\mathbb{C}^{N-1}$. Фиксируем в $L^\perp$ произвольный базис

$$\omega^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_N^i), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

и рассмотрим следующий интеграл:

$$(2.1) \quad f(\alpha, a) = \int_C \exp \left(\sum_{j=1}^N a_j t_1^{\omega_j^1} \cdots t_{N-1}^{\omega_j^{N-1}} \right) \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{-\langle \alpha, \omega^i \rangle} \frac{dt_i}{t_i},$$

где $C \subset T$ – цикл вещественной размерности $N-1$; определение C будет уточнено позднее. Очевидно, что переход от одного базиса в $L^\perp$ к другому сводится к замене переменных в (2.1): $t_i \mapsto t_1^{\lambda_{i1}} \cdots t_{N-1}^{\lambda_{i,N-1}}$, $i = 1, \dots, N-1$.

Отметим также, что заменой переменных $t_i = e^{s_i}$, $i = 1, \dots, N-1$, интеграл (2.1) сводится к интегралу от однозначной функции:

$$(2.2) \quad f(\alpha, a) = \int_\gamma \exp \left(\sum_{j=1}^N a_j e^{\sum_{i=1}^{N-1} \omega_j^i s_i} - \sum_{i,j} \alpha_j \omega_j^i s_i \right) ds_1 \cdots ds_{N-1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Интегралы (2.1) формально удовлетворяют GG-системе (1.1)–(1.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем для любого $s = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_s} &= \int_C \exp \left(\sum_{j=1}^N a_j t_1^{\omega_j^1} \cdots t_{N-1}^{\omega_j^{N-1}} \right) t_1^{\omega_s^1} \cdots t_{N-1}^{\omega_s^{N-1}} \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{-\langle \alpha, \omega^i \rangle} \frac{dt_i}{t_i} \\ &= \int_C \exp \left(\sum_{j=1}^N a_j t_1^{\omega_j^1} \cdots t_{N-1}^{\omega_j^{N-1}} \right) \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{-\langle \alpha - e_s, \omega^i \rangle} \frac{dt_i}{t_i} = f(\alpha - e_s, a). \end{aligned}$$

Далее, (1.2) непосредственно следует из (2.1). Наконец, из равенства

$$\int_C d \left(\exp \left(\sum_{j=1}^N a_j t_1^{\omega_j^1} \cdots t_{N-1}^{\omega_j^{N-1}} \right) \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{-\langle \alpha, \omega^i \rangle} \prod_{i' \neq i} \frac{dt_{i'}}{t_{i'}} \right) = 0$$

следует, что

$$\sum_{j=1}^N \omega_j^i a_j f(\alpha - e_j, a) = \langle \omega^i, \alpha \rangle f(\alpha, a), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Отсюда и из (1.1) следуют соотношения (1.3).

Рассмотрим произвольное координатное подпространство V_j , в окрестности которого существуют регулярные GG -функции. Не нарушая общности, можно предполагать, что $j = N$. Согласно предложению 1.2, условие существования в окрестности V_N регулярных GG -функций имеет вид:

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{l_i}{l_N} \geq 0,$$

где $l = (l_1, \dots, l_N) \in L$ — произвольный ненулевой вектор.

Поставим задачу: определить цикл C , для которого интеграл (2.1) сходится в окрестности общей точки подпространства V_N и тем самым задает в этой окрестности регулярную GG -функцию.

Пусть в качестве базиса в $L^\perp$ взяты векторы

$$\omega^i = e'_i - \frac{l_i}{l_N} e'_N.$$

Тогда интеграл (2.1) имеет вид:

$$(2.4) \quad f(\alpha, a) = \int_C \exp \left(\sum_{j=1}^{N-1} a_j t_j + a_N \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{\lambda_i} \right) \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{-\beta_i} \frac{dt_i}{t_i},$$

где

$$\lambda_i = -\frac{l_i}{l_N}, \quad \beta_i = \alpha_i - \frac{l_i}{l_N} \alpha_N, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Формальной заменой переменных $a_j t_j \mapsto t_j$, $j = 1, \dots, N-1$, интеграл (2.4) приводится к виду:

$$(2.5) \quad f(\alpha, a) = \prod_{i=1}^{N-1} a_i^{\beta_i} \int_C \exp \left(\sum_{j=1}^{N-1} t_j + x \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{\lambda_i} \right) \prod_{i=1}^{N-1} t_i^{-\beta_i} \frac{dt_i}{t_i},$$

где $x = a_N \prod_{i=1}^{N-1} a_i^{-\lambda_i}$.

Рассмотрим сначала простейший случай $N = 2$. В этом случае интеграл (2.5) имеет вид:

$$f(\alpha_1, \alpha_2; a_1, a_2) = a_1^{\beta_1} \int_C \exp(t + xt^\lambda) t^{-\beta_1-1} dt,$$

где $\beta_1 = \alpha_1 - \frac{l_1}{l_2} \alpha_2$, $\lambda = -\frac{l_1}{l_2}$, $x = a_1^{l_1/l_2} a_2$.

Из (2.3) следует, что $\operatorname{Re} \lambda \leq 1$; поэтому интеграл сходится в окрестности $x = 0$, если в качестве C взята петля, обходящая точку 0 и направленная вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Пусть теперь $N > 2$. Обозначим:

$$U = \{u \in T \mid \sum u_i = 1\},$$

и приведем интеграл (2.5) заменой переменных $t = \rho u$, где $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $u \in U$, к виду:

$$(2.6) \quad f_C(\alpha, a) = \prod_{i=1}^{N-1} a_i^{\beta_i} \int_C \exp\left(\rho + x \rho^r \prod_{i=1}^{N-1} u_i^{\lambda_i}\right) \rho^{-b} \prod_{i=1}^{N-1} u_i^{-\beta_i-1} d\rho du,$$

где $r = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i$, $b = \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i$,

$$du = \sum_{s=1}^{N-1} (-1)^{s-1} u_s du_1 \wedge \cdots \wedge du_{s-1} \wedge du_{s+1} \wedge \cdots \wedge du_{N-1}.$$

Задача свелась к построению цикла C , для которого интеграл (2.6) сходится в окрестности точки $x = 0$. Чтобы придать интегралу (2.6) точный смысл и определить цикл C , перейдем от стоящей под знаком интеграла многозначной функции на U к однозначной функции на разветвленном накрытии $\tilde{U}$ над U . Зададим бесконечнолистное накрытие $\tilde{T} \cong \mathbb{C}^{N-1}$ над T : прообраз точки $(t_1, \dots, t_{N-1}) \in T$ состоит из множества точек $(s_1, \dots, s_{N-1}) \in \mathbb{C}^{N-1}$ таких, что $e^{s_i} = t_i$, $i = 1, \dots, N-1$. Определим $\tilde{U}$ как прообраз U в этом накрытии и подынтегральную форму от u в (2.6) будем понимать как однозначную форму на $\tilde{U}$.

Введем $(N-2)$ -мерный цикл $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{U}$. Для его построения зададим симплекс

$$\Delta = \{(u_1, \dots, u_{N-1}) \in U \mid u_i \in \mathbb{R}, u_i > 0\}$$

и определим компактный цикл $\tilde{\Gamma}$ как многомерный аналог двойной петли, ассоциированный с этим симплексом, см. [6] и [39].

Для построения $\tilde{\Gamma}$ вводится симплекс $\Delta' = \{(u_1, \dots, u_{N-1}) \in \Delta \mid u_i \geq \delta\}$, где $\delta > 0$ достаточно мало, и в прообразе Δ' фиксируется 2^{N-1} связных компонент $\Delta_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}}$, $\varepsilon_i = 0, 1$, где $\Delta_{0, \dots, 0}$ определяется из условия, что $\Delta_{0, \dots, 0} \subset \mathbb{R}^{N-2}$, и

$$\Delta_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}} = \Delta_{0, \dots, 0} + 2\pi i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}).$$

Цикл $\tilde{\Gamma}$ получается присоединением к клеткам $\Delta_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}}$ дополнительных клеток $\Delta_{\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}}^{i_1, \dots, i_r}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N-1$, $r = 1, \dots, N-2$, проекции которых на $\tilde{U}$ принадлежат соответственно цилиндрам $|x_i| = \delta$, $i \neq i_1, \dots, i_r$. Подробное описание цикла $\tilde{\Gamma}$ для случаев $N = 3$ и $N = 4$ приведено в конце этого параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если $C = \gamma \times \tilde{\Gamma}$, где $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – петля, обходящая точку 0 и направленная вдоль вещественной отрицательной полуоси, а $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{U}$ – определенная выше “двойная петля”, то интеграл (2.6) сходится в окрестности точки 0.

В самом деле, из (2.3) следует, что $\operatorname{Re} r \leq 1$. Но тогда сходимость интеграла (2.6) в окрестности $x = 0$ следует из сходимости интеграла $\int_{\gamma} e^{\rho} \rho^{-b-1} d\rho$.

Установим связь между GG -функцией $f_C(\alpha, a)$, заданной интегралом (2.6), и GG -рядами f_{jk} , определенными в п. 1.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для выбранного выше цикла C справедливо равенство:

$$(2.7) \quad f_C(\alpha, a) = -(2\pi i)^{N-1} (f_{N,0}(\alpha, a) - f_{N,-1}(\alpha, a)), \quad \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку GG -функции, регулярные в окрестности общей точки на V_N , однозначно определяются своими значениями на V_N , то достаточно сравнить значения левой и правой частей в (2.7) при $x = 0$. Имеем:

$$f_C(\alpha, a)|_{x=0} = \prod_{i=1}^{N-1} a_i^{\beta_i} \int_{\gamma} e^{\rho} \rho^{-b-1} d\rho \int_{\tilde{\Gamma}} \prod_{i=1}^{N-1} u_i^{-\beta_i-1} du_1 \cdots du_{N-2}.$$

Воспользуемся следующими формулами:

$$\int_{\gamma} e^{\rho} \rho^{-b-1} d\rho = \frac{2\pi i}{\Gamma(b+1)}$$

(формула Ганкеля);

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \prod_{i=1}^{N-1} u_i^{-\beta_i-1} du_1 \cdots du_{N-2} = \frac{(2\pi i)^{N-1} e^{-\pi i \sum \beta_i}}{\Gamma(-\sum \beta_i) \prod_{i=1}^{N-1} \Gamma(\beta_i + 1)}.$$

Используя эти равенства и равенство $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$, получаем:

$$f_C(\alpha, a)|_{x=0} = -(2\pi i)^{N-1} \left(\prod_{i=1}^{N-1} a_i^{\beta_i} \right) \frac{1 - e^{-2\pi i \sum \beta_i}}{\prod_{i=1}^{N-1} \Gamma(\beta_i + 1)}.$$

Сравнивая это выражение с выражениями для $f_{N,0}$ и $f_{N,k}$ при $x = 0$, получаем (2.7).

В заключение вернемся к описанию цикла $\tilde{\Gamma}$ при $N = 3$ и $N = 4$.

В случае $N = 3$ цикл $\tilde{\Gamma}$ одномерен (классическая петля). Он получается присоединением к четырем отрезкам $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ четырех дуг Δ_{ε}^i , $i = 1, 2$, $\varepsilon = 0, 1$. Пусть 1, 2 – концы отрезка Δ' и $1_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, $2_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ – их прообразы в $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Тогда дуга Δ_{ε}^2 определяется двумя условиями: 1) ее проекция на U принадлежит $|u_1| = \delta$, и 2) концы дуги Δ_{ε}^1 совпадают с точками $1_{0, \varepsilon}$ и $1_{1, \varepsilon}$. Аналогично определяется дуга Δ_{ε}^2 .

В случае $N = 4$ цикл $\tilde{\Gamma}$ двумерен. Он получается присоединением к восьми треугольникам $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ набора клеток, гомеоморфных квадрату $[0, 1]^2$: $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{1,2}$, $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_3}^{1,3}$, $\Delta_{\varepsilon_2, \varepsilon_3}^{2,3}$ и Δ_{ε}^1 , Δ_{ε}^2 , Δ_{ε}^3 .

Обозначим стороны Δ' числами 1, 2 и 3, а вершины – парами чисел (1, 2), (2, 3) и (1, 3). Прообразы в $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ i -й стороны и вершины (i, j) треугольника Δ' обозначим соответственно через $i_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ и $(i, j)_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$.

Приведем описание дополнительных клеток. Клетка $\Delta_{\varepsilon_2, \varepsilon_3}^{2,3}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) ее проекция на U принадлежит цилиндру $|u_1| = \delta$; 2) две ее противоположные стороны совпадают соответственно с $1_{0, \varepsilon_2, \varepsilon_3} \subset \Delta_{0, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ и $1_{1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} \subset \Delta_{1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$. Обозначим две другие стороны клетки $\Delta_{\varepsilon_2, \varepsilon_3}^{2,3}$ через $i_{\varepsilon_2, \varepsilon_3}$, $i = 2, 3$; предполагается, что $i_{\varepsilon_2, \varepsilon_3}$ имеет своими концами $(1, i)_{0, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ и $(1, i)_{1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$. Аналогично задаются клетки $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{1,2}$ и $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_3}^{1,3}$.

Клетки Δ_{ε}^i определяются так. Рассмотрим четверку дуг $2_{0, \varepsilon_3}$, $1_{1, \varepsilon_3}$, $2_{1, \varepsilon_3}$ и $1_{0, \varepsilon_3}$. Они образуют цикл, гомологичный нулю, и в качестве $\Delta_{\varepsilon_3}^3$ берется натянутая на него пленка такая, что ее проекция на U принадлежит пересечению цилиндров $|u_1| = \delta$ и $|u_2| = \delta$. Аналогично задаются клетки $\Delta_{\varepsilon_1}^1$ и $\Delta_{\varepsilon_2}^2$.

§ 3. Связь с гипергеометрическими функциями одной переменной

3.1. Гипергеометрические системы. В этом параграфе рассматривается случай, когда одномерное подпространство $L \subset \mathbb{C}^N$ содержит ненулевые векторы с целыми координатами. Выберем среди них вектор

$$l = (l_1, \dots, l_N), \quad l_i \in \mathbb{Z},$$

координаты которого не имеют общего множителя; этот вектор определен однозначно, с точностью до знака. Если $\sum_{i=1}^N l_i \neq 0$, то выберем дополнительно знак вектора l так, что $\sum_{i=1}^N l_i > 0$. Напомним, что по сделанному в начале § 1 предположению все координаты вектора l отличны от нуля.

Для определенности в дальнейшем будем предполагать, что

$$l_i < 0 \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, p; \quad l_i > 0 \quad \text{при} \quad i = p+1, \dots, p+q \quad (p+q = N).$$

Цель этого параграфа – исследовать связь между GG -функциями, ассоциированными с L , и введенными в [9] общими гипергеометрическими функциями. Согласно [9], общие гипергеометрические функции $f(a)$ на $\mathbb{C}^N$, ассоциированные с L и произвольным вектором $\alpha \in \mathbb{C}^N$, определяются как голоморфные решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$(3.1) \quad \prod_{i=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{-l_i} f = \prod_{i=p+1}^{p+q} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l_i} f \quad (p+q = N),$$

где $l = (l_1, \dots, l_N)$ – определенный выше вектор из L ,

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \langle \omega, \alpha \rangle f$$

для любого вектора $\omega \in (\mathbb{C}^N)'$, ортогонального к L .

В отличие от [9], где параметр α предполагался фиксированным, мы будем рассматривать решения системы (3.1), (3.2) как функции от $\alpha \in \mathbb{C}^N$ и $a \in \mathbb{C}^N$ и обозначать их через $f(\alpha, a)$.

Как и в случае GG -функций, из уравнений (3.2) следует, что любую гипергеометрическую функцию f можно представить в виде

$$(3.3) \quad f(\alpha, a) = a^\alpha F(\alpha, x), \quad x = a^l,$$

где l – определенный выше вектор из L . Найденные так функции F назовем приведенными гипергеометрическими функциями, ассоциированными с L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Приведенные гипергеометрические функции $F(\alpha, x)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению степени $Q = \sum_{i=p+1}^{p+q} l_i$:*

$$(3.4) \quad x \prod_{i=1}^p \prod_{k=0}^{-l_i-1} \left(\alpha_i - k + l_i x \frac{d}{dx} \right) F = \prod_{i=p+1}^N \prod_{k=0}^{l_i-1} \left(\alpha_i - k + l_i x \frac{d}{dx} \right) F.$$

Обратно, если F – любое решение уравнения (3.4), то функция f , заданная равенством (3.3), удовлетворяет системе уравнений (3.1), (3.2).

В самом деле, подставим (3.3) в уравнение (3.1). Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left(a^\beta F(\alpha, x) \right) = a^{\beta - e_i} \left(\beta_i + l_i x \frac{d}{dx} \right) F(\alpha, x) \quad \text{для любого } \beta,$$

получаем для функции F уравнение (3.4).

Заметим, что коэффициент при старшей производной $\frac{d^Q f}{dx^Q}$ в уравнении (3.4) равен $(\prod_{i=p+1}^N l_i^{l_i}) x^Q$ в случае $\sum l_i > 0$ и $(\prod_{i=p+1}^N l_i^{l_i} - \prod_{i=1}^p l_i^{-l_i} x) x^Q$ в случае $\sum l_i = 0$. Отсюда следует, что при $\sum l_i > 0$ уравнение (3.4) имеет только две особые точки – 0 и ∞ , а при $\sum l_i = 0$ – кроме точек 0 и ∞ , особой является также точка $x = \prod_{i=1}^p l_i^{l_i}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Любая GG -функция, ассоциированная с подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, удовлетворяет системе уравнений (3.1), (3.2), т.е. является гипергеометрической функцией, ассоциированной с L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\alpha, a)$ – любое решение GG -системы (1.1)–(1.3). Нам нужно доказать лишь, что f удовлетворяет уравнению (3.1). В силу (1.1) имеем:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{-l_i} f(\alpha, a) &= f \left(\alpha + \sum_{i=1}^p l_i e_i, a \right), \\ \prod_{i=p+1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l_i} f(\alpha, a) &= f \left(\alpha - \sum_{i=1}^p l_i e_i, a \right). \end{aligned}$$

Так как, в силу (1.2), $f(\alpha + l, a) = f(\alpha, a)$, то правые части этих равенств равны; значит, равны и левые части.

СЛЕДСТВИЕ. Приведенные GG-функции, ассоциированные с подпространством L , удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.4).

3.2. Базисы в пространстве решений. Заметим, что множество решений гипергеометрической системы (3.1), (3.2) сохраняется при умножении на любую функцию $u(\alpha)$, а множество решений GG-системы – только при умножении на функции $u(\alpha)$, удовлетворяющие условиям:

$$(3.5) \quad u(\alpha - e_i) = u(\alpha), \quad i = 1, \dots, N; \quad u(\alpha + l) = u(\alpha) \quad \text{для любого } l \in L.$$

Таким образом, первые образуют модуль над кольцом R всех функций $u(\alpha)$, а вторые – модуль над подкольцом R_0 функций $u(\alpha)$, удовлетворяющих условиям (3.5).

Построим базисы в пространстве решений этих систем. Рассмотрим формальные GG-ряды $F_{jk}(\alpha, x)$, введенные в п. 1.5.

ЛЕММА 1. Для любого $j = 1, \dots, N$ среди формальных рядов F_{jk} имеется точно $|l_j|$ линейно независимых над кольцом функций R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим явно эти $|l_j|$ рядов. Так как по предположению координаты $l_1, \dots, l_N$ вектора l не имеют общего множителя, то существуют целые числа $k_1^o, \dots, k_N^o$ такие, что

$$\sum k_i^o l_i = 1.$$

Тогда для любого $s \in \mathbb{Z}$ имеем: $s \sum_{i \neq j} k_i^o l_i \equiv s \pmod{l_j}$. Обозначим:

$$(3.6) \quad \Phi_{j,s} = F_{j,sk^o}, \quad s = 0, 1, \dots, |l_j| - 1.$$

Легко убедиться, что ряды $\Phi_{j,s}$ линейно независимы над R . С другой стороны, для любого $k \in \mathbb{Z}^N$, если $\sum_{i \neq j} k_i l_i \equiv s \pmod{l_j}$, то ряды F_{jk} и $\Phi_{j,s}$ различаются только множителем из R .

ЛЕММА 2. При $j = p+1, \dots, N$ ряды F_{jk} сходятся в окрестности точки $x = 0$.

В самом деле, по предположению, $\sum_{i=1}^N l_i \geq 0$ и $l_j > 0$ при $j > p$. Следовательно, $\sum_{i=1}^N l_i/l_j \geq 0$, и сходимость рядов следует из предложения 1.4.

СЛЕДСТВИЕ. Ряды F_{jk} , $j = p+1, \dots, N$, задают в окрестности $x = 0$ решения приведенной GG-системы (1.5), (1.6) и гипергеометрического уравнения (3.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. В окрестности точки $x = 0$ функции $\Phi_{j,s}$, $j = p+1, \dots, p+q$ ($p+q = N$), $s = 0, 1, \dots, |l_j| - 1$, образуют базис в пространстве решений дифференциального уравнения (3.4) и в пространстве решений приведенной GG-системы (1.5), (1.6) соответственно над кольцом функций R и над подкольцом R_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться, что функции $\Phi_{j,s}$ линейно независимы над R . Так как их число равно порядку $Q = \sum_{i=p+1}^N l_i$ уравнения (3.4), то в окрестности $x = 0$ любое решение Φ этого уравнения представимо в виде линейной комбинации

$$(3.7) \quad \varphi(\alpha, x) = \sum_{j,s} u_{j,s}(\alpha) \varphi_{j,s}(\alpha, x).$$

Если Φ – решение GG -системы в окрестности точки $x = 0$, то Φ удовлетворяет уравнению (3.4), а потому представимо в виде (3.7). Подставив (3.7) в уравнения (1.5), (1.6) для приведенных GG -функций, убеждаемся, что функции $u_{j,s}$ удовлетворяют условиям (3.5), и, значит, $u_{j,s} \in R_0$.

3.3. Случай вектора $l = (l_1, \dots, l_N)$ с координатами $l_i = \pm 1$. Применим результаты пп. 3.1 и 3.2 к случаю, когда подпространство $L \subset \mathbb{C}^N$ натянуто на вектор l с координатами ± 1 . Согласно первоначальному предположению, мы полагаем:

$$l_i = -1 \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, p; \quad l_i = 1 \quad \text{при} \quad i = p+1, \dots, p+q \quad (p+q = N),$$

причем $p \leq q$.

Из п. 3.2 следует:

1) каждому $j = p+1, \dots, p+q$ отвечает приведенная GG -функция Φ_j :

$$(3.8) \quad \Phi_j(\alpha, x) = x^{-\alpha_j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{jn}(\alpha) \frac{x^n}{n!},$$

где

$$(3.9) \quad c_{jn}(\alpha) = \left(\prod_{i \neq j} \Gamma(\alpha - l_i \alpha_i + l_i n + 1) \right)^{-1};$$

при $p < q$ этот ряд сходится для всех $x \neq 0$, а при $p = q$ – только в области $|x| < 1$;

2) функции Φ_j удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению порядка q :

$$(3.10) \quad x \prod_{i=1}^p \left(\alpha_i - x \frac{d}{dx} \right) \Phi = \prod_{i=p+1}^{p+q} \left(\alpha_i + x \frac{d}{dx} \right) \Phi;$$

3) в окрестности точки $x = 0$ они образуют базис в пространстве решений приведенной GG -системы (1.5), (1.6), ассоциированной с подпространством L , и в пространстве решений уравнения (3.4) соответственно над кольцами R_0 и R .

Установим связь между функциями $\Phi_j(\alpha, x)$ и классическими гипергеометрическими функциями – функцией Похгаммера ${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| x \right)$, $r \leq s+1$, и G -функцией

Мейера $G_{pq}^{mn} \left(x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right)$, $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$.

Согласно определению (см., например, [41]),

$$(3.11) \quad {}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| x \right) = c(a, b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a_1) \cdots \Gamma(n+a_r)}{\Gamma(n+b_1) \cdots \Gamma(n+b_s)} \frac{x^n}{n!},$$

где $c(a, b) = \prod_{i=1}^s \Gamma(b_i) / \prod_{i=1}^r \Gamma(a_i)$. Чтобы установить связь рядов Φ_j с рядами ${}_rF_s$, преобразуем выражения (3.9) для коэффициентов ряда Φ_j , $j > p$, используя соотношение $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$. Имеем:

$$c_{jn}(\alpha) = u_j(\alpha) (-1)^{pn} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(n - \alpha_i - \alpha_j)}{\prod_{i=p+1, i \neq j}^N \Gamma(n + \alpha_i - \alpha_j + 1)},$$

где $u_j(\alpha)$ не зависит от n . Сравнивая коэффициенты рядов ${}_rF_s$ и Φ_j , заключаем, что с точностью до множителя $x^{\alpha_j} \Phi_j(\alpha, x)$ совпадает с

$${}_pF_{q-1} \left(\begin{matrix} -\alpha_1 - \alpha_j, \dots, -\alpha_p - \alpha_j \\ \alpha_{p+1} - \alpha_{j+1}, \dots, *, \dots, \alpha_N - \alpha_{j+1} \end{matrix} \middle| (-1)^p x \right), \quad j = p+1, \dots, N,$$

(звездочка означает, что отброшено $\alpha_j - \alpha_j + 1$). Поскольку при $x = 0$ функции ${}_pF_{q-1}$ и Φ_j равны соответственно 1 и $(\prod_{i \neq j} \Gamma(\alpha_i - l_i \alpha_j + 1))^{-1}$, то заключаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Функции $\Phi_j(\alpha, x)$, $j = p+1, \dots, N$, и ${}_pF_{q-1}$ связаны соотношением:*

$$(3.12) \quad \Phi_j(\alpha, x) = \left(\prod_{i \neq j} \Gamma(\alpha_i - l_i \alpha_j + 1) \right)^{-1} x^{-\alpha_j} \times {}_pF_{q-1} \left(\begin{matrix} -\alpha_1 - \alpha_j, \dots, -\alpha_p - \alpha_j \\ \alpha_{p+1} - \alpha_{j+1}, \dots, *, \dots, \alpha_N - \alpha_{j+1} \end{matrix} \middle| (-1)^p x \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (3.12) справедливо и при $p > q$, если Φ_j и ${}_pF_{q-1}$ понимать как формальные ряды.

Теперь установим связь функций Φ_j с G -функциями Мейера. По определению, G -функция Мейера $G_{pq}^{mn} \left(x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right)$ есть специальный случай функции Фокса $H_{pq}^{mn} \left[x \middle| \begin{matrix} [a_p, A_p] \\ [b_q, B_q] \end{matrix} \right]$ (см. п. 1.6), отвечающий $A_1 = \dots = A_p = B_1 = \dots = B_q = 1$. Поэтому ее выражение через GG -функции получается как следствие результатов п. 1.6. Прделаем это вычисление непосредственно, воспользовавшись известным выражением функции G_{pq}^{mn} через функции ${}_pF_{q-1}$ (см. [41]):

$$(3.13) \quad G_{pq}^{mn} \left(x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\prod'_{i=1}^m \Gamma(b_i - b_j) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 + b_j - a_i)}{\prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 + b_j - b_i) \prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i - b_j)} x^{b_j} \times {}_pF_{q-1} \left(\begin{matrix} 1 + b_j - a_1, \dots, 1 + b_j - a_p \\ 1 + b_j - b_1, \dots, *, \dots, 1 + b_j - b_q \end{matrix} \middle| (-1)^{p-m-n} x \right).$$

Из (3.12) следует, что при четном $m + n$

$$\begin{aligned} x^{b_j} {}_pF_{q-1} \left(\begin{matrix} 1 + b_j - a_1, \dots, 1 + b_j - a_p \\ 1 + b_j - b_1, \dots, *, \dots, 1 + b_j - b_q \end{matrix} \middle| (-1)^{p-m-n} x \right) \\ = \left(\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i - b_j) \prod_{i=1}^q \Gamma(1 + b_j - b_i) \right) \Phi_{p+j}(\alpha, x), \end{aligned}$$

где

$$(3.14) \quad \alpha_i = a_i - 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad \alpha_{p+i} = -b_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

Подставив это выражение в (3.13) и воспользовавшись соотношением $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$, получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. G -функция Мейера G_{pq}^{mn} при четном $m+n$ следующим образом выражается через GG -функции Φ_j :

$$(3.15) \quad G_{pq}^{mn} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \pi^{m+n-1} \left(\prod_{i=1, i \neq j}^m \sin \pi(b_i - b_j) \prod_{i=1}^n \sin \pi(a_i - b_j) \right)^{-1} \Phi_{p+j}(\alpha, x).$$

Здесь параметр $\alpha \in \mathbb{C}^N$ связан с a_i, b_j соотношениями (3.14).

Аналогичное соотношение имеет место и при нечетном $m+n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (3.15) следует, что наряду с функциями Φ_j функция Мейера G_{pq}^{mn} удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.10). В то же время, поскольку коэффициенты разложения (3.15) не принадлежат подкольцу R_0 , она не является GG -функцией.

3.4. Соотношение между GG -рядами и рядами Похгаммера ${}_pF_q$. Найдем для произвольного вектора $l = (l_1, \dots, l_N) \in \mathbb{Z}^N$ выражение GG -рядов F_{jk} , $j = p+1, \dots, N$, ассоциированных с l , через ряды Похгаммера ${}_pF_q$. Для случая $l_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, N$, это выражение установлено в предыдущем пункте.

Поскольку для каждого фиксированного j GG -ряды F_{jk} получают один из другого только заменой ветвей многозначной функции x^{1/l_j} , ограничимся рядом

$$(3.16) \quad \Phi_j(\alpha, x) = x^{-\alpha_j/l_j} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) \frac{(x^{1/l_j})^n}{n!}, \quad j = p+1, \dots, N,$$

где

$$c_n(\alpha) = \left(\prod_{i \neq j} \Gamma \left(\alpha_i - \frac{l_i}{l_j} \alpha_j + n \frac{l_i}{l_j} + 1 \right) \right)^{-1}.$$

Как и раньше, будем предполагать, что $l_i < 0$ при $i = 1, \dots, p$, $l_i > 0$ при $i = p+1, \dots, p+q$ ($p+q = N$) и что $\sum l_i \geq 0$.

Введем следующие обозначения:

$$P = - \sum_{i=1}^p l_i, \quad Q = \sum_{i=p+1}^N l_i, \quad a = \prod_{i=1}^N |l_i|^{-l_i}.$$

Далее, обозначим через $\gamma'_i(s)$, $\gamma''_i(s)$ следующие множества параметров:

$$\gamma'_i(s) = \left\{ -\frac{\alpha_j - s}{l_j} + \frac{\alpha_i - r}{l_i} \mid r = 0, 1, \dots, |l_i| - 1 \right\}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\gamma''_i(s) = \left\{ -\frac{\alpha_j - s}{l_j} + \frac{\alpha_{p+i} + r}{l_{p+i}} \mid r = 1, \dots, l_{p+i} \right\}, \quad i = 1, \dots, q;$$

где предполагается, что из множества $\gamma''_{j-p}(s)$ выброшено число 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. В принятых обозначениях GG-функции $\Phi_j(\alpha, x)$, $j = p+1, \dots, N$, следующим образом выражаются через функции Похгаммера:

$$(3.17) \quad \Phi_j(\alpha, a) = x^{-\alpha_j/l_j} \sum_{s=0}^{l_j-1} \frac{x^{s/l_j}}{\prod_{i=1}^N \Gamma\left(\alpha_i - \frac{(\alpha_j-s)l_i}{l_j} + 1\right)} \times {}_P F_{Q-1} \left(\begin{matrix} \gamma'_1(s), \dots, \gamma'_p(s) \\ \gamma''_1(s), \dots, \gamma''_q(s) \end{matrix} \middle| (-1)^P a x \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $n = l_j k + s$, где $s = 0, 1, \dots, l_j - 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, представим ряд (3.16) в виде суммы l_j рядов:

$$\Phi_j(\alpha, a) = x^{-\alpha_j/l_j} \sum_{s=0}^{l_j-1} \left(x^{s/l_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{s,k}(\alpha) x^k \right),$$

где

$$\begin{aligned} c_{s,k}(\alpha) &= \left(\prod_{i=1}^N \Gamma\left(l_i k + \alpha_i + 1 - \frac{(\alpha_j-s)l_i}{l_j}\right) \right)^{-1} \\ &= u_s(\alpha) (-1)^{kP} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(-l_i k - \alpha_i + \frac{(\alpha_j-s)l_i}{l_j})}{\prod_{i=p+1}^N \Gamma(l_i k + \alpha_i + 1 - \frac{(\alpha_j-s)l_i}{l_j})}. \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением:

$$\Gamma(mt) = (2\pi)^{-1/2} (m-1)! k^{mt-1/2} \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(t + \frac{r}{m}\right), \quad m = 2, 3, \dots$$

На основании этого соотношения получаем:

$$c_{s,k}(\alpha) = v_s(\alpha) (-1)^{kP} a^k \frac{\prod_{i=1}^p \prod_{r=0}^{|l_i|-1} \Gamma\left(k - \frac{\alpha_j-s}{l_j} + \frac{\alpha_i-r}{l_i}\right)}{\prod_{i=p+1}^N \prod_{r=0}^{l_i-1} \Gamma\left(k - \frac{\alpha_j-s}{l_j} + \frac{\alpha_i+1+r}{l_i}\right)},$$

где $a = \prod_{i=1}^N |l_i|^{-l_i}$.

Отсюда следует, что ряд $c_{s,k}(\alpha) x^k$ совпадает, с точностью до множителя, с рядом Похгаммера

$${}_P F_{Q-1} \left(\begin{matrix} \gamma'_1(s), \dots, \gamma'_p(s) \\ \gamma''_1(s), \dots, \gamma''_q(s) \end{matrix} \middle| (-1)^P a x \right),$$

где числа P, Q и подмножества параметров $\gamma'_i(s), \gamma''_i(s)$ определены выше. Для вычисления множителя достаточно заметить, что значения этого ряда и ряда Похгаммера в точке $x = 0$ равны соответственно $\left(\prod_{i=1}^N \Gamma\left(\alpha_i - \frac{(\alpha_j-s)l_i}{l_j} + 1\right) \right)^{-1}$ и 1.

Глава 2. Общие GG -функции

§ 4. GG -системы и GG -функции

4.1. Определение GG -системы. Пусть $L \subset \mathbb{C}^N$ – произвольное фиксированное линейное подпространство и $L^\perp \subset (\mathbb{C}^N)'$ – ортогональное дополнение к L , т.е. множество всех векторов $\omega \in (\mathbb{C}^N)'$ таких, что $\langle \omega, l \rangle = 0$ для всех $l \in L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. GG -системой, ассоциированной с линейным подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, называется следующая система уравнений в пространстве функций $f(\alpha, a)$, $\alpha, a \in \mathbb{C}^N$:

$$(4.1) \quad \frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_i} = f(\alpha - e_i, a), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $e_1, \dots, e_N$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^N$,

$$(4.2) \quad f(\alpha + l, a) = f(\alpha, a) \quad \text{для любого } l \in L,$$

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \langle \alpha, \omega \rangle f$$

для любого $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in L^\perp$.

Голоморфные относительно a решения этой системы называются GG -функциями, ассоциированными с L .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В силу (4.1) уравнения (4.3) в определении GG -системы могут быть заменены уравнениями:

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i a_i f(\alpha - e_i, a) = \langle \alpha, \omega \rangle f(\alpha, a)$$

для любого $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in L^\perp$.

2. Системы (4.3) и (4.4) эквивалентны подсистемам из $n = \dim L^\perp$ уравнений, в которых ω пробегает произвольный фиксированный базис в $L^\perp$.

3. Уравнения (4.1) можно представить в симметричной форме:

$$(4.5) \quad (\partial_i + \delta_i)f = f, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial a_i}$, а δ_i – разностные операторы:

$$\delta_i f = f(\alpha, a) - f(\alpha - e_i, a), \quad i = 1, \dots, N.$$

Отметим следующее обобщение уравнения (4.5):

$$(4.6) \quad (\partial_i^h + \delta_i^k)f = (h + k)f, \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$$\begin{aligned}\partial_i^h f &= \frac{1}{h} (f(\alpha, a + he_i) - f(\alpha, a)), \\ \delta_i^k f &= \frac{1}{k} (f(\alpha, a) - f(\alpha - ke_i, a)).\end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0, k \rightarrow 1$ уравнение (4.6) переходит в уравнение (4.5).

4. Существует q -аналог GG -системы (4.1)–(4.3). Он получается заменой в уравнениях (4.1) операторов дифференцирования операторами q -дифференцирования: $(\partial_q f)(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{t(q - 1)}$.

Из определения GG -системы непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. GG -система (4.1)–(4.3) инвариантна относительно преобразований

$$(4.7) \quad (L_\omega f)(\alpha, a) = e^{\langle \alpha, \omega \rangle} f(\alpha, e^{-\omega} a), \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in L^\perp,$$

где $e^{-\omega} a = (e^{-\omega_1} a_1, \dots, e^{-\omega_N} a_N)$. Таким образом, операторы L_ω переводят GG -функции снова в GG -функции.

4.2. Другое описание GG -систем. В силу (4.2) GG -функции, ассоциированные с подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, можно считать заданными на $V \times \mathbb{C}^N$, где $V = \mathbb{C}^N / L$. Приведем уравнения GG -системы в этой реализации. Обозначим: $\pi e_i = \omega^i$, $i = 1, \dots, N$, $\pi \alpha = \beta$, где $\pi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N / L$ – естественная сюръекция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. В реализации на пространстве $V \times \mathbb{C}^N$ уравнения GG -системы имеют следующий вид:

$$(4.8) \quad \frac{\partial \varphi(\beta, a)}{\partial a_i} = \varphi(\beta - \omega^i, a), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$(4.9) \quad \sum_{i=1}^N \left(a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \right) \omega^i = \varphi \beta.$$

В самом деле, очевидно, что при переходе к функциям на $V \times \mathbb{C}^N$ уравнения (4.1) переходят в уравнения (4.8). Далее, поскольку $\omega_i = \langle \omega, e_i \rangle$, система (4.3) эквивалентна соотношению

$$\pi \left(\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} e_i \right) = \pi(\varphi \alpha).$$

Таким образом, в новой реализации GG -система задается не подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, а набором $\{\omega^1, \dots, \omega^N\}$ векторов из V , $\dim V \leq N$, линейно порождающих V .

4.3. Специальные случаи. Рассмотрим два крайних случая: $L = \mathbb{C}^N$ и $L = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Имеется с точностью до постоянного множителя единственная GG -функция, ассоциированная с пространством $L = \mathbb{C}^N$, а именно,*

$$(4.10) \quad f(\alpha, a) = \prod_{i=1}^N e^{a_i}.$$

В самом деле, при $L = \mathbb{C}^N$ GG -функция f не зависит, в силу (4.2), от α , а в силу (4.1), она удовлетворяет уравнениям: $\frac{\partial f}{\partial a_i} = f$, $i = 1, \dots, N$. Отсюда следует (4.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *GG -функции, ассоциированные с подпространством $L = 0$, имеют вид:*

$$(4.11) \quad f(\alpha, a) = u(\alpha) \prod_{i=1}^N \frac{a_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)},$$

где $u(\alpha)$ – произвольная периодическая функция с периодом 1 по каждому α_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $L = 0$ уравнения (4.4) имеют место для любого вектора $\omega \in (\mathbb{C}^N)'$; следовательно, они эквивалентны системе уравнений:

$$a_i f(\alpha - e_i, a) = \alpha_i f(\alpha, a), \quad i = 1, \dots, N.$$

Общее решение этой системы имеет вид (4.11), где $u(\alpha)$ – произвольная функция от α . Из уравнений (4.1) следует, что функция $u(\alpha)$ периодична с периодом 1 по каждому α_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Если пространство $L \subset \mathbb{C}^N$ содержит отличное от нуля координатное подпространство или само содержится в собственном координатном подпространстве, или, наконец, содержит разность каких-либо двух базисных векторов e_i и e_j , то в каждом из этих случаев GG -система на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ сводится к GG -системе на пространстве меньшей размерности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $e_N \in L$. Тогда из (4.1) и (4.2) следует, что любая GG -функция f , ассоциированная с L , не зависит от α_N и $\frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_N} = f(\alpha, a)$. Следовательно, она имеет вид

$$f(\alpha, a) = e^{\alpha_N} f_1(\alpha', a'),$$

$\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$, $a' = (a_1, \dots, a_{N-1})$, где f_1 – GG -функция на $\mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C}^{N-1}$, ассоциированная с подпространством $L' = L \cap \mathbb{C}^{N-1}$; $\mathbb{C}^{N-1} \subset \mathbb{C}^N$ – подпространство, натянутое на $e_1, \dots, e_{N-1}$.

Далее, предположим, например, что $L \subset \mathbb{C}^{N-1}$, где $\mathbb{C}^{N-1}$ определено выше. Тогда любая GG -функция, ассоциированная с L , удовлетворяет условию

$$a_N f(\alpha - e_N, a) = \alpha_N f(\alpha, a).$$

Отсюда следует, что

$$f(\alpha, a) = u(\alpha_N) \frac{a_N^{\alpha_N}}{\Gamma(\alpha_N + 1)} f_1(\alpha', a'),$$

где u – периодическая функция с периодом 1, а f_1 – GG-функция на $\mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C}^{N-1}$, ассоциированная с подпространством $L \subset \mathbb{C}^{N-1}$.

Наконец, если, например, $e_{N-1} - e_N \in L$, то из уравнений GG-системы следует, что любая GG-функция f имеет вид:

$$f(\alpha, a) = f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-2}, \alpha'_{N-1}; a_1, \dots, a_{N-2}, a'_{N-1}),$$

$\alpha'_{N-1} = \frac{1}{2}(\alpha_{N-1} + \alpha_N)$, $a'_{N-1} = \frac{1}{2}(a_{N-1} + a_N)$; f_1 – GG-функция на $\mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C}^{N-1}$, где $\mathbb{C}^{N-1}$ – подпространство, натянутое на $e_1, \dots, e_{N-2}$ и $e'_{N-1} = e_{N-1} + e_N$, ассоциированная с подпространством $L' = L \cap \mathbb{C}^{N-1}$.

Исходя из предложений 1.2–1.4 можно всегда предполагать, что подпространство $L \subset \mathbb{C}^N$ отлично от 0 и $\mathbb{C}^N$, не содержит собственных координатных подпространств, само не содержится ни в каком собственном координатном подпространстве, а также не содержит разностей никаких двух базисных векторов.

Если исходить из эквивалентного определения GG-системы как системы, ассоциированной с набором векторов $\{\omega^1, \dots, \omega^N\}$ в V (см. п. 4.2), то эти предположения означают, что, во-первых, исключаются случаи $V = 0$ и $V = \mathbb{C}^N$ и, во-вторых, предполагается, что все векторы ω^i отличны от нуля, попарно различны и каждый из них представим как линейная комбинация остальных.

4.4. Дифференциальные уравнения для GG-функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть $l = (l_1, \dots, l_N)$, $l' = (l'_1, \dots, l'_N)$ – любые векторы с целыми неотрицательными координатами такие, что $l - l' \in L$. Тогда GG-функции f , ассоциированные с подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l_i} f = \prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l'_i} f.$$

В самом деле, из (4.1) следует, что

$$\prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l_i} f(\alpha, a) = f(\alpha - l, a), \quad \prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l'_i} f(\alpha, a) = f(\alpha - l', a).$$

Так как $l - l' \in L$, то в силу (4.2) правые части этих равенств совпадают.

Нетрудно убедиться, что число независимых уравнений такого вида равно рангу решетки $\Lambda = L \cap \mathbb{Z}^N$.

4.5. Приведенные GG-функции. Подобно одномерному случаю из § 1 зададим представление аддитивной группы $L^\perp$ в пространстве $\mathbb{C}^N$, сопоставив каждому $\omega \in L^\perp$ преобразование:

$$a \mapsto e^\omega a,$$

где $e^\omega a = (e^{\omega_1} a_1, \dots, e^{\omega_N} a_N)$. Орбиты общего положения группы $L^\perp$ в $\mathbb{C}^N$ имеют размерность $n = \dim L^\perp$, а многообразие X этих орбит – размерность $\dim L$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Для любой GG -функции $f(\alpha, a)$, ассоциированной с подпространством L , функция $a^{-\alpha} f(\alpha, a)$, где $a^{-\alpha} = (a_1^{-\alpha_1}, \dots, a_N^{-\alpha_N})$, при любом фиксированном α постоянна на орбитах группы $L^\perp$.

В самом деле, из уравнений (4.3) следует, что $f(\alpha, e^\omega a) = e^{\langle \omega, \alpha \rangle} f(\alpha, a)$. Тем же свойством обладает и моном $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$, а именно, $(e^\omega a)^\alpha = e^{\langle \omega, \alpha \rangle} a^\alpha$. Следовательно, отношение $a^{-\alpha} f(\alpha, a)$ постоянно на орбитах группы $L^\perp$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем функции $a^{-\alpha} f(\alpha, a)$, где f — GG -функция, ассоциированная с подпространством L , приведенными GG -функциями, ассоциированными с L .

В силу предложения 4.7, приведенные GG -функции являются функциями на $\mathbb{C}^N \times X$, где X — многообразие орбит группы $L^\perp$.

Введем координаты на многообразии X . Для этого фиксируем в подпространстве $L \subset \mathbb{C}^N$ произвольный базис

$$l_j = (l_j^1, \dots, l_j^N), \quad j = 1, \dots, r \quad (r = \dim L),$$

и полагаем

$$x_j = a^{l_j} = a_1^{l_j^1} \dots a_N^{l_j^N}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Очевидно, что функции x_j на $\mathbb{C}^N$ независимы, и, так как $(e^\omega a)^{l_j} = e^{\langle \omega, \alpha \rangle} a^{l_j} = a^{l_j}$ для любого $\omega \in L^\perp$, они постоянны на орбитах группы $L^\perp$. Поэтому их можно принять в качестве координат на многообразии орбит X .

Согласно предложению 4.7, любое решение f GG -системы (4.1)–(4.3) имеет вид:

$$f(\alpha, a) = a^\alpha F(\alpha, x), \quad x = (x_1, \dots, x_r),$$

где F — приведенная GG -функция. Подставив это выражение для f в уравнения GG -системы, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Приведенные GG -функции $F(\alpha, x)$, заданные в выбранной системе координат $x_1, \dots, x_r$ на X , удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(4.12) \quad F(\alpha + t l_j, x) = x_j^{-t} F(\alpha, x) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{C}; \quad j = 1, \dots, r;$$

$$(4.13) \quad \left(\alpha_i + \sum_{j=1}^r l_j^i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) F(\alpha, x) = F(\alpha - e_i, x), \quad i = 1, \dots, N.$$

Назовем систему уравнений (4.12), (4.13) приведенной GG -системой, ассоциированной с подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$. Подчеркнем, что приведенная GG -система зависит не только от подпространства L , но и от выбора координат на многообразии орбит X .

§ 5. Описание решений GG-системы

5.1. Постановка задачи. Обозначим через $\mathbb{C}^I$, где $I \subset [1, N]$, координатное подпространство в $\mathbb{C}^N$, порожденное векторами e_i , $i \in I$. Назовем подмножество $I \subset [1, N]$ базой относительно подпространства $L \subset \mathbb{C}^N$, если $\#I = \text{codim } L$ и $\mathbb{C}^I \cap L = 0$.

Заметим, что для подпространств L общего положения базами являются все подмножества в $[1, N]$ из $n = \text{codim } L$ элементов.

Рассмотрим GG-систему, ассоциированную с произвольным линейным подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$. Поставим задачу: описать все решения этой системы, регулярные в окрестности любой общей точки подпространства $\mathbb{C}^I \subset \mathbb{C}^N$, где I – произвольная база. Сведем эту задачу к задаче для функций на $V \times X$, где $V = \mathbb{C}^N/L$, а X – многообразие орбит группы $L^\perp$.

Свяжем с каждой базой I системы координат на X и $\mathbb{C}^N$. Пусть $I \subset [1, N]$ – произвольная база и $J = [1, N] \setminus I$. Зададим в подпространстве L базис, состоящий из векторов вида

$$f_j = e_j + \sum_{i \in I} l_j^i e_i, \quad j \in J.$$

Очевидно, что такой базис существует и однозначно определен. Отметим, что векторы дуального пространства $(\mathbb{C}^N)'$

$$\omega^i = e'_i - \sum_{j \in J} l_j^i e'_j, \quad i \in I,$$

принадлежат $L^\perp$ и образуют базис в $L^\perp$.

Введем на X систему координат, связанную с базисом $\{f_j\}$:

$$(5.1) \quad y_j = a_j \prod_{i \in I} a_i^{l_j^i}, \quad j \in J,$$

а на $\mathbb{C}^N$ – систему координат a_i , $i \in I$, и y_j , $j \in J$.

Пусть $\pi_I: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^I$ – линейное отображение, заданное условиями: $\pi_I L = 0$, $\pi_I e_i = e_i$ при $i \in I$. Очевидно, что

$$(\pi \alpha)_i = \alpha_i - \sum_{j \in J} l_j^i \alpha_j, \quad i \in I,$$

где l_j^i – координаты векторов базиса в L , согласованного с базой I . Обозначим: $l_j = -\pi_I e_j$, $j \in J$, т.е. $l_j = \sum_{i \in I} l_j^i e_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. В системе координат a_i , $i \in I$, и y_j , $j \in J$, любая GG-функция f представима в виде:

$$(5.2) \quad f(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \Phi(\beta, y), \quad y \in \mathbb{C}^J,$$

где $\beta = \pi_I \alpha$, координаты вектора $y \in \mathbb{C}^J$ задаются равенствами (5.1), а Φ – решение следующей системы уравнений:

$$(5.3) \quad \frac{\partial \Phi(\beta, y)}{\partial y_j} = \Phi(\beta + l_j, y) \quad \text{при } j \in J,$$

$$(5.4) \quad \left(\beta_i + \sum_{j \in J} l_j^i y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \Phi(\beta, y) = \Phi(\beta - e_i, y) \quad \text{при } i \in I.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.1, любая GG -функция f представима в виде: $f(\alpha, a) = a^\alpha F(\alpha, y)$, где F – приведенная GG -функция. Из (5.1) следует, что $a_j = y_j \prod_{i \in I} a_i^{-l_j^i}$, $j \in J$, откуда $a^\alpha = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \prod_{j \in J} y_j^{\alpha_j}$. Здесь $\beta_i = \alpha_i - \sum_{j \in J} l_j^i \alpha_j$, $i \in I$, т.е. $\beta = \pi_I \alpha$. Таким образом, $f(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \varphi(\alpha, y)$, где $\varphi(\alpha, y) = \prod_{j \in J} y_j^{\alpha_j} F(\alpha, y)$. Из уравнения (4.2) для f следует, что $\varphi(\alpha + l, y) = \varphi(\alpha, y)$ для любого $l \in L$. Значит, $\varphi(\alpha + l, y) = \Phi(\beta, y)$, где $\beta = \pi_I \alpha$, т.е. функция f представима в виде (5.2). Подставив (5.2) в уравнения (4.1) GG -системы, получаем для F систему уравнений (5.3) и (5.4).

Заметим, что если принять a_i , $i \in I$, и y_j , $j \in J$, в качестве координат на $\mathbb{C}^N$ в окрестности общей точки подпространства $\mathbb{C}^I$, то подпространство $\mathbb{C}^I$ задается в этих координатах уравнениями $y_j = 0$, $j \in J$. Отсюда следует, что GG -функция f регулярна в окрестности общей точки подпространства $\mathbb{C}^I$ тогда и только тогда, когда функция $\Phi(\beta, y)$, связанная с f соотношением (5.2), регулярна в окрестности $y = 0$.

Задача об описании GG -функций, регулярных в окрестности общих точек подпространства $\mathbb{C}^I$, свелась тем самым к описанию всех решений системы (5.3)–(5.4), регулярных в окрестности точки $y = 0$.

5.2. Основная теорема. Обозначим для любого $\beta \in \mathbb{C}^I$:

$$\Gamma_I(\beta) = \prod_{i \in I} \Gamma(\beta_i),$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Обозначим далее $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^I$.

ЛЕММА. Любое решение $\Phi(\beta, y)$ системы (5.3), (5.4), регулярное в окрестности $y = 0$, имеет вид:

$$(5.5) \quad \Phi(\beta, y) = \sum_m \left\{ \frac{u(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \prod_{j \in J} \frac{y_j^{m_j}}{m_j!} \right\},$$

где $u(\beta)$ – периодическая функция на $\mathbb{C}^I$ с периодом 1 по каждой координате β_i ; суммирование ведется по всем целым неотрицательным m_j , $j \in J$.

Обратно, любой формальный ряд (5.5), где $u(\beta)$ – периодическая функция с периодом 1 по каждому β_i , формально удовлетворяет уравнениям (5.3), (5.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi(\beta, y)$ – произвольное решение системы (5.3), (5.4), регулярное в окрестности точки $y = 0$. Рассмотрим разложение функции Φ в ряд в окрестности точки $y = 0$:

$$\Phi(\beta, y) = \sum_m c_m(\beta) \frac{y^m}{m!}.$$

Из (5.3) следует, что

$$(5.6) \quad c_m(\beta) = \Phi\left(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j, 0\right).$$

Из (5.4) следует, что функция $v(\beta) = \Phi(\beta, 0)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\beta_i v(\beta) = v(\beta - e_i), \quad i \in I.$$

Общее решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$v(\beta) = \frac{u(\beta)}{\Gamma_I(\beta + \mathbf{1})},$$

где $u(\beta)$ – произвольная периодическая функция на $\mathbb{C}^I$ с периодом 1 по каждой координате β_i . Подставив это выражение в (5.6), получаем:

$$c_m(\beta) = \frac{u(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})}.$$

Обратно, убедимся, что любой формальный ряд (5.5), где $u(\beta)$ – произвольная периодическая функция на $\mathbb{C}^I$ с периодом 1 по каждой координате β_i , формально удовлетворяет системе (5.3)–(5.4). В самом деле, имеем для любого $j_0 \in J$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\beta, y)}{\partial y_{j_0}} &= \sum_m \left\{ \frac{u(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \frac{y^{m-e_{j_0}}}{(m-e_{j_0})!} \right\} \\ &= \sum_m \left\{ \frac{u(\beta + j_0 + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta + l_{j_0} + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \frac{y^m}{m!} \right\} = \Phi(\beta + l_{j_0}, y). \end{aligned}$$

Далее, для любого $i \in I$ имеем:

$$\begin{aligned} \left(\beta_i + \sum_{j \in J} l_j^i y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \Phi(\beta, y) &= \left(\beta_i + \sum_{j \in J} l_j^i y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \sum_m \left\{ \frac{u(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \frac{y^m}{m!} \right\} \\ &= \sum_m \left\{ \left(\beta_i + \sum_{j \in J} m_j l_j^i \right) \frac{u(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \frac{y^m}{m!} \right\} \\ &= \sum_m \left\{ \frac{u(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta - e_i + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \frac{y^m}{m!} \right\} = \Phi(\beta - e_i, y). \end{aligned}$$

Из леммы следует

ТЕОРЕМА 5.1. Любое решение GG-системы (4.1)–(4.3), регулярное в окрестности общих точек координатного подпространства $\mathbb{C}^I \subset \mathbb{C}^N$, где I – произвольная база, имеет вид

$$(5.7) \quad f(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \sum_m \left\{ \frac{u(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j)}{\Gamma_I(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \prod_{j \in J} \frac{y_j^{m_j}}{m_j!} \right\},$$

где $\beta = \pi_I \alpha$, $l_j = -\pi_I e_j$, $y \in \mathbb{C}^J$ задается равенством (5.1), а $u(\beta)$ – периодическая функция на $\mathbb{C}^I$ с периодом 1 по каждой координате β_i .

Обратно, любой формальный ряд вида (5.7), где $u(\beta)$ – произвольная периодическая функция на $\mathbb{C}^I$ с периодом 1 по каждой координате β_i , формально удовлетворяет GG-системе (4.1)–(4.3).

СЛЕДСТВИЕ. Любая GG -функция, регулярная в окрестности общих точек координатного пространства $\mathbb{C}^I \subset \mathbb{C}^N$, однозначно определяется своими значениями на $\mathbb{C}^I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем базу I правильной, если существуют ненулевые GG -функции, регулярные в окрестности общих точек подпространства $\mathbb{C}^I \subset \mathbb{C}^N$.

Из теоремы 5.1 и из асимптотических оценок для гамма-функции следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. База I правильна тогда и только тогда, когда

$$(5.8) \quad \sum_{i \in I} \operatorname{Re} l_j^i \geq -1 \quad \text{для всех } j \in J.$$

ПРИМЕРЫ. 1. L – одномерное подпространство, порожденное вектором $l = (l_1, \dots, l_N)$ с отличными от нуля координатами. Тогда базами являются все подмножества $I_j = [1, N] \setminus \{j\}$, причем база I_j правильна, если $\operatorname{Re}(\sum_{i=1}^N l_i/l_j) \geq 0$.

2. $\dim L = N-1$. Тогда $L^\perp$ – одномерное подпространство, порожденное вектором $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$. Можно предполагать, что все координаты вектора ω отличны от нуля; в противном случае L содержало бы координатное подпространство. В этом случае базой является каждое одноэлементное подмножество $\{j\}$, причем эта база правильна, если $\operatorname{Re}(\omega_i/\omega_j) \leq 1$ для всех i .

5.3. Операторы L_k . Зададим на множестве GG -функций f действие аддитивной группы $(\mathbb{Z}^I)'$. Обозначим для любых $k \in (\mathbb{Z}^I)'$ и $\beta \in \mathbb{C}^I$:

$$\langle k, \beta \rangle = \sum_{i \in I} k_i \beta_i.$$

Пусть $f(\alpha, a)$ – произвольная GG -функция. Представим ее, в соответствии с предложением 5.1, в виде

$$f(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \Phi(\beta, y), \quad y \in \mathbb{C}^J,$$

где функция Φ удовлетворяет уравнениям (5.3), (5.4). Определим оператор L_k следующим равенством:

$$(L_k f)(\alpha, a) = \left(\prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \right) e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} \Phi(\beta, e^{2\pi i \langle k, l \rangle} y), \quad k \in (\mathbb{Z}^I)',$$

где $e^{2\pi i \langle k, l \rangle} y = \sum_{j \in J} e^{2\pi i \langle k, l_j \rangle} y_j e_j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Операторы L_k переводят множество GG -функций в себя.

В самом деле, утверждение следует из легко проверяемого факта, что система уравнений (5.3), (5.4) для функций Φ сохраняется при преобразованиях

$$\Phi(\beta, y) \mapsto e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} \Phi(\beta, e^{2\pi i \langle k, l \rangle} y).$$

Теоремой 5.1 для каждой базы I определено отображение

$$u(\beta) \mapsto f(\alpha, a),$$

относящее периодическим функциям на $\mathbb{C}^I$ с периодом 1 по каждой координате формальные ряды вида (5.7), формально удовлетворяющие GG -системе (4.1)–(4.3). Используя это отображение, можно любую операцию на множестве периодических функций $u(\beta)$ перенести на множество формальных рядов вида (5.7). Очевидно, что операции умножения на периодическую функцию $e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle}$, $k \in (\mathbb{Z}^I)'$, отвечает в пространстве формальных рядов оператор L_k .

5.4. GG -ряды.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем GG -рядами, ассоциированными с базой I , формальные ряды (5.7), где $u(\beta) = e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle}$, $k \in (\mathbb{Z}^I)'$:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} f_{I,k}(\alpha, a) &= e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \sum_m \left\{ \Gamma_I^{-1}(\beta + \sum m_j l_j + 1) \prod_{j \in J} \frac{(e^{2\pi i \langle k, l_j \rangle} y_j)^{m_j}}{m_j!} \right\} \\ &= (L_k f_I)(\alpha, a), \end{aligned}$$

где

$$(5.10) \quad f_I(\alpha, a) \equiv f_{I,0}(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \sum_m \left\{ \Gamma_I^{-1}(\beta + \sum m_j l_j + 1) \prod_{j \in J} \frac{y_j^{m_j}}{m_j!} \right\}.$$

Из теоремы 5.1 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Ряды (5.9) формально удовлетворяют GG -системе (4.1)–(4.3). Если база I правильна, они сходятся в окрестности любой общей точки $a \in \mathbb{C}^I$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из асимптотических оценок для гамма-функции следует: если база I такова, что

$$\operatorname{Re} \sum_{i \in I} l_j^i > -1 \quad \text{для всех } j \in J,$$

то ряды $f_{I,k}$ сходятся при любых $a \in \mathbb{C}^N \setminus \Sigma$, где Σ – объединение всех координатных подпространств.

§ 6. Интегральные представления

6.1. Постановка задачи. Интегральные представления GG -функций, ассоциированных с одномерными подпространствами $L \subset \mathbb{C}^N$, которые были получены в главе 1, имеют место и для подпространств L произвольной размерности. Именно, пусть $\omega^i = \sum_{j=1}^N \omega_j^i e_j'$, $i = 1, \dots, n$, – произвольный фиксированный базис в подпространстве $L^\perp \subset (\mathbb{C}^N)'$, ортогональном $L \subset \mathbb{C}^N$, где $n = \dim L^\perp$. Обозначим: $T = \mathbb{C}^n \setminus \Sigma$,

где Σ – объединение всех координатных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Тогда, если $C \subset T$ – произвольный цикл размерности n , то интеграл

$$(6.1) \quad f(\alpha, a) = \int_C \exp\left(\sum_{j=1}^N a_j t_1^{\omega_j^1} \cdots t_n^{\omega_j^n}\right) \prod_{i=1}^n t_i^{-\langle \alpha, \omega^i \rangle} \frac{dt_i}{t_i}$$

формально удовлетворяет GG -системе (4.1)–(4.3). Как и в главе 1, заменой переменных $t_i = e^{s_i}$ этот интеграл можно свести к интегралу от однозначной функции:

$$(6.2) \quad f(\alpha, a) = \int_{\gamma} \exp\left(\sum_{j=1}^N a_j e^{\sum_{i=1}^n \omega_j^i s_i} - \sum_{i,j} \alpha_j \omega_j^i s_i\right) ds_1 \cdots ds_n.$$

Таким образом, в области своей сходимости интегралы (6.1) и (6.2) задают GG -функцию, ассоциированную с подпространством L .

Поставим задачу: для каждой правильной базы $I \subset [1, N]$ определить цикл C такой, что интеграл (6.1) сходится в окрестности общей точки подпространства $\mathbb{C}^I$ и задает тем самым GG -функцию, регулярную в этой окрестности.

6.2. Случай $\dim L = N - 1$. Если $\dim L = N - 1$, то подпространство $L^\perp$ порождено одним вектором $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, и интеграл (6.1) однократен:

$$(6.3) \quad f(\alpha, a) = \int_C \exp\left(\sum_{j=1}^N a_j t^{\omega_j}\right) t^{-\langle \omega, \alpha \rangle - 1} dt,$$

или, по-другому,

$$f(\alpha, a) = \int_{\gamma} \exp\left(\sum_{j=1}^N a_j e^{s \omega_j} - s \langle \omega, \alpha \rangle\right) ds.$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что все координаты вектора ω отличны от нуля; в противном случае L содержало бы координатное подпространство и исходная GG -система сводилась бы к GG -системе на пространстве меньшей размерности. При этом предположении любое одноэлементное подмножество в $[1, N]$ является базой.

Не нарушая общности, будем предполагать, что база $\{1\}$ правильна, и определим цикл C , для которого интеграл (6.3) сходится в окрестности соответствующего координатного подпространства $a_2 = \dots = a_N = 0$.

Приведем заменой переменной $a_1 t^{\omega_1} \mapsto t$ интеграл (6.3) к виду:

$$(6.4) \quad f_C(\alpha, a) = a_1^\beta \int_C \exp\left(t + \sum_{i=2}^N x_i t^{\omega_i/\omega_1}\right) t^{-\beta-1} dt,$$

где $\beta = \langle \omega, \alpha \rangle / \omega_1$, $x_i = a_i a_1^{-\omega_i/\omega_1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть C – петля вокруг точки 0, направленная вдоль вещественной отрицательной полуоси. Тогда если база $I = \{1\}$ правильна, то интеграл (6.4) сходится в окрестности любой ненулевой точки координатной прямой $a_2 = \dots = a_N = 0$.

В самом деле, если база $I = \{1\}$ правильна, то $\operatorname{Re}(\omega_i/\omega_1) \leq 1$ для любого i . Поэтому сходимость интеграла (6.4) при достаточно малых значениях x_i следует непосредственно из сходимости интеграла $\int_C e^t t^{-\beta-1} dt$.

Предложение 6.2. *Имеет место равенство:*

$$(6.5) \quad f_C(\alpha, a) = 2\pi i f_I(\alpha, a), \quad I = \{1\},$$

где f_I – GG-функция, заданная GG-рядом (5.10):

$$(6.6) \quad f_I(\alpha, a) = a_1^\beta \sum_m \left\{ \Gamma^{-1} \left(\beta - \sum_{i=2}^N \frac{\omega_i}{\omega_1} m_i + 1 \right) \prod_{i=2}^N \frac{x_i^{m_i}}{m_i!} \right\}.$$

Доказательство. Согласно §5, GG-функции, регулярные в окрестности общих точек координатных подпространств $\mathbb{C}^I$, где I – правильная база, однозначно определяются своими значениями на этих подпространствах. Поэтому достаточно сравнить значения f_C и f_I при $x_2 = \dots = x_N = 0$. Из определения f_I следует, что $f_I|_{x=0} = \frac{a^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$. С другой стороны,

$$f_C(\alpha, a)|_{x=0} = a_1^\beta \int_C e^t t^{-\beta-1} dt = a_1^\beta \frac{2\pi i}{\Gamma(\beta+1)}$$

(формула Ганкеля). Отсюда следует равенство (6.6).

6.3. Случай $\dim L < N - 1$. Если $\dim L < N - 1$, т.е. кратность интеграла (6.1) больше 1, то конструкция цикла C аналогична приведенной в главе 1 для случая $\dim L = 1$. Именно, очевидно прежде всего следующее утверждение:

Предложение 6.3. *Если в качестве базиса $\{\omega^i\}$ в $L^\perp$ взят базис, согласованный с базой I , см. п. 5.1, то интеграл (6.1) приводится к следующему виду:*

$$(6.7) \quad f(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \int_C \exp \left(\sum_{i \in I} t_i + \sum_{j \in J} \left(y_j \prod_{i \in I} t_i^{-l_j^i} \right) \right) \prod_{i \in I} t_i^{-\beta_i-1} dt_i, \quad C \subset T,$$

где $T = \mathbb{C}^I \setminus \Sigma$, $\beta = \pi_I \alpha \in \mathbb{C}^I$ и $y \in \mathbb{C}^J$ задается равенством (5.1). По-другому,

$$(6.8) \quad f_\gamma(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \int_\gamma \exp \left(\sum_{i \in I} e^{s_i} + \sum_{j \in J} y_j e^{-\sum_{i \in I} l_j^i s_i} - \sum_{i \in I} \beta_i s_i \right) \prod_{i \in I} ds_i, \quad \gamma \subset (\mathbb{C}^I)'. \quad (6.8)$$

Замечание. Из определения операторов $L_k, k \in (\mathbb{C}^I)'$, непосредственно следует, что интегралы (6.8) связаны соотношением:

$$(6.9) \quad L_k f_\gamma = f_{\gamma+2\pi i k}, \quad k \in (\mathbb{Z}^I)'.$$

Введем далее, как и в §2, плоскость $U = \{(u_1, \dots, u_N) \in T \mid \sum u_i = 1\}$ и приведем интеграл (6.7) заменой переменных $t = \rho u, \rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, u \in U$, к виду:

$$(6.10) \quad f_C(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \int_C \exp \left(\rho + \sum_{j \in J} x_j \rho^{r_j} \prod_{i \in I} u_i^{-l_j^i} \right) \rho^{-\sum \beta_i-1} d\rho \prod_{i \in I} u_i^{-\beta_i-1} du,$$

где $r_j = -\sum_{i \in I} l_j^i$, а du – голоморфная форма объема на U .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Если база I правильна и в качестве C взят цикл $\gamma \times \tilde{\Gamma}$, определенный в § 2, то интеграл (6.10) сходится в окрестности общих точек на $\mathbb{C}^I$ и

$$(6.11) \quad f_C(\alpha, a) = -(2\pi i)^n (f_I(\alpha, a) - f_{I, -1}(\alpha, a)), \quad \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1),$$

где $f_I, f_{I, k}$ – GG -функции, заданные равенствами (5.9) и (5.10).

В самом деле, если база I правильна, то $\text{Re } r_j \leq 1$ для всех $j \in J$. Отсюда следует сходимость интеграла (6.10) при достаточно малых значениях y . Равенство (6.11) устанавливается дословно так же, как в § 2 для случая $\dim L = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если для всех $j \in J$ выполняется строгое неравенство $\text{Re } \sum_{i \in I} l_j^i > -1$, то интеграл (6.10) по определенному здесь циклу C сходится при всех $a \in \mathbb{C}^N$, не принадлежащих координатным подпространствам.

§ 7. Связь с общими гипергеометрическими функциями

7.1. Общие гипергеометрические функции. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ – произвольная подрешетка, т.е. подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Z}^N$, и $\Lambda^\perp \subset (\mathbb{Z}^N)'$ – подрешетка, ей ортогональная. Обозначим через $L \subset \mathbb{C}^N$ и $L^\perp \subset (\mathbb{C}^N)'$ комплексные линейные подпространства, порожденные соответственно Λ и $\Lambda^\perp$.

Согласно [9], общей гипергеометрической системой, ассоциированной с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\alpha \in \mathbb{C}^N/L$, называется следующая система дифференциальных уравнений в пространстве функций на $\mathbb{C}^N$:

$$(7.1) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \langle \alpha, \omega \rangle f \quad \text{для любого } \omega \in L^\perp;$$

$$(7.2) \quad \prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l_i} f = \prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)^{l'_i} f$$

для любых векторов $l = (l_1, \dots, l_N)$, $l' = (l'_1, \dots, l'_N)$ с целыми неотрицательными координатами таких, что $l - l' \in \Lambda$.

Голоморфные решения этой системы называются общими гипергеометрическими функциями, ассоциированными с Λ и α .

В [9] доказано, что система (7.1), (7.2) голономна, а потому пространство ее решений в окрестности точки общего положения конечномерно.

В отличие от [9], где α предполагалось фиксированным, мы будем рассматривать решения этой системы как функции от $a \in \mathbb{C}^N$ и от $\alpha \in \mathbb{C}^N/L$. При такой трактовке пространство общих гипергеометрических функций наделено естественной структурой модуля над кольцом R всех функций $u(\alpha)$ на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих условию (4.2). С другой стороны, пространство GG -функций, ассоциированных с подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$, наделено структурой модуля над подкольцом $R_\Lambda \subset R$ функций $u(\alpha)$ на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих, кроме условия (4.2), также условию $u(\alpha - e_i) = u(\alpha)$, $i = 1, \dots, N$.

Предложение 7.1. Любая GG-функция $f(\alpha, a)$, ассоциированная с пространством L , удовлетворяет системе уравнений (7.1), (7.2).

В самом деле, из определения GG-системы следует, что f удовлетворяет уравнениям (7.1). То, что f удовлетворяет уравнениям (7.2), следует из предложения 4.6.

7.2. Г-ряды, ассоциированные с базами. В [10] каждой базе $I \subset [1, N]$ относительно подпространства L было сопоставлено конечное число формальных рядов гипергеометрического типа (Г-ряды), формально удовлетворяющих уравнениям (7.1), (7.2). Приведем их описание.

Пусть $J = [1, N] \setminus I$ и $\mathbb{Z}^J \subset \mathbb{Z}^N$ – подрешетка, порожденная базисными векторами $e_j, j \in J$. Обозначим через $\Lambda^J \subset \mathbb{Z}^J$ проекцию решетки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ на $\mathbb{Z}^J$ и положим

$$\mathcal{L}^J = \mathbb{Z}^J / \Lambda^J.$$

Поскольку I – база, подрешетка $\Lambda^J \subset \mathbb{Z}^J$ имеет максимальный ранг, а потому $\mathcal{L}^J$ конечно.

Отнесем каждому элементу $\lambda \in \mathcal{L}^J$ следующий Г-ряд:

$$(7.3) \quad \varphi_{I,\lambda}(\alpha, a) = \sum_{l \in \Lambda} \left(\prod_{i \in I} \frac{a_i^{l_i + \gamma_i}}{\Gamma(l_i + \gamma_i + 1)} \prod_{j \in J} \frac{a_j^{l_j + r_j}}{\Gamma(l_j + r_j + 1)} \right),$$

где $r \in \mathbb{Z}^J$ – произвольный представитель класса λ , а $\gamma \in \mathbb{C}^I$ определяется из уравнений:

$$\sum_{i \in I} \omega_i \gamma_i + \sum_{j \in J} \omega_j r_j = \langle \alpha, \omega \rangle \quad \text{для любого } \omega \in L^\perp.$$

Легко убедиться, что

- 1) $\varphi_{I,\lambda}$ не зависит от выбора представителя $r \in \lambda$;
- 2) $\varphi_{I,\lambda}$ формально удовлетворяет уравнениям (7.1) и (7.2);
- 3) ряды $\varphi_{I,\lambda}, \lambda \in \mathcal{L}^J$ линейно независимы.

Лемма. В обозначениях п. 5.1 ряд $\varphi_{I,\lambda}$ может быть представлен в следующей форме:

$$(7.4) \quad \varphi_{I,\lambda}(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \sum_{m \in \lambda} \left\{ c(m) \prod_{j \in J} \frac{y_j^{m_j}}{m_j!} \right\},$$

$$\text{где } c(m) = \prod_{i \in I} \Gamma^{-1} \left(\beta_i + \sum_{j \in J} m_j l_j^i + 1 \right) = \Gamma_I^{-1} \left(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1} \right).$$

Доказательство – непосредственная проверка.

7.3. Связь между GG-рядами $f_{I,k}$ и Г-рядами $\varphi_{I,\lambda}$. Представим GG-ряды (5.9) в следующей форме:

$$(7.5) \quad f_{I,k}(\alpha, a) = \prod_{i \in I} a_i^{\beta_i} \sum_m \left\{ \frac{\chi(k, m)}{\Gamma_I(\beta + \sum_{j \in J} m_j l_j + \mathbf{1})} \prod_{j \in J} \frac{y_j^{m_j}}{m_j!} \right\},$$

где

$$\chi(k, m) = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{i \in I, j \in J} l_j^i k_i m_j \right\}.$$

Очевидно, что функция χ является характером аддитивной группы $(\mathbb{Z}^I)' \times \mathbb{Z}^J$.

Введем по аналогии с группой $\mathcal{L}^J = \mathbb{Z}^J / \Lambda^J$ группу

$$(\mathcal{L}^\perp)^I = (\mathbb{Z}^I)' / (\Lambda^\perp)^I,$$

где $(\Lambda^\perp)^I$ — проекция $\Lambda^\perp \subset (\mathbb{Z}^N)'$ на $(\mathbb{Z}^I)'$.

ЛЕММА. Если $m \in \Lambda^J$ или $k \in (\Lambda^\perp)^I$, то $\chi(k, m) = 1$. Таким образом, χ является характером на факторгруппе $(\mathcal{L}^\perp)^I \times \mathcal{L}^J$.

В самом деле, если, например, $m \in \Lambda^J$, то $\sum_{j \in J} l_j^i m_j \in \mathbb{Z}$ для всех $i \in I$, а потому $\chi(k, m) = 1$ для всех $k \in (\mathbb{Z}^I)'$.

В дальнейшем по мере надобности мы вместо $\chi(k, m)$ будем писать $\chi(k, \lambda)$ или $\chi(\kappa, \lambda)$, где $\lambda \in \mathcal{L}^J$, $\kappa \in (\mathcal{L}^\perp)^I$.

Из (7.5) и явного выражения (2.4) для рядов $\varphi_{I, \lambda}$ следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Ряды $f_{I, k}$ и $\varphi_{I, \lambda}$ связаны соотношением:

$$(7.6) \quad f_{I, k}(\alpha, a) = e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle} \sum_{\lambda \in \mathcal{L}^J} \chi(k, \lambda) \varphi_{I, \lambda}(\alpha, a), \quad k \in (\mathbb{Z}^I)'.$$

Отметим, что

$$(7.7) \quad f_{I, k+k^0} = e^{2\pi i \langle k^0, \beta \rangle} f_{I, k} \quad \text{для любого } k^0 \in (\Lambda^\perp)^I.$$

Если подрешетка $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ полна, т.е. не является собственной подрешеткой решетки того же ранга в $\mathbb{Z}^N$, то и обратно, функции $\varphi_{I, \lambda}$ выражаются через функции $f_{I, k}$. Именно, в этом случае имеем: $\mathcal{L}^J \cong (\mathcal{L}^\perp)^I$, и отображение $\lambda \mapsto \chi(\cdot, \lambda)$ является изоморфизмом группы $\mathcal{L}^J$ на группу характеров группы $(\mathcal{L}^\perp)^I$. Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Если решетка Λ полна, то имеет место следующая формула обращения соотношения (7.6):

$$(7.8) \quad \varphi_{I, \lambda}(\alpha, a) = (\#\mathcal{L}^J)^{-1} \sum_{\kappa \in (\mathcal{L}^\perp)^I} \chi^{-1}(\kappa, \lambda) (e^{-2\pi i \langle k, \beta \rangle} f_{I, k}(\alpha, a)), \quad \lambda \in \mathcal{L}^J,$$

где k — произвольный представитель класса κ .

7.4. Интегральные представления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Если $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ — полная решетка и I — правильная база, то все GG -ряды и Γ -ряды, ассоциированные с L и I , являются линейными комбинациями над кольцом R GG -функций f_γ , представимых интегралами вида (6.8).

Доказательство. В силу предложения 7.3 достаточно доказать утверждение для GG -рядов $f_{I,k}$.

Положим

$$v(\beta) = (1 - e^{-2\pi i r \langle \mathbf{1}, \beta \rangle})^{-1},$$

где r – наименьшее целое положительное число такое, что $r\mathbf{1} \in (\Lambda^\perp)^I$. Очевидно, что $v(\beta) \in R_\Lambda$. Далее, в силу тождества $1 = (1 - q^r)^{-1} \sum_{s=0}^{r-1} q^s (1 - q)$ имеем

$$1 = v(\beta) \sum_{s=0}^{r-1} e^{-2\pi i s \langle \mathbf{1}, \beta \rangle} (1 - e^{-2\pi i \langle \mathbf{1}, \beta \rangle}).$$

Заменив в этом равенстве функции от β ассоциированными с ними GG -функциями, получаем:

$$f_I(\alpha, a) = v(\beta) \sum_{s=0}^{r-1} L_{-s\mathbf{1}} (f_I(\alpha, a) - f_{I, -\mathbf{1}}(\alpha, a)).$$

Согласно предложению 6.4, существует цикл γ такой, что

$$f_I(\alpha, a) - f_{I, -\mathbf{1}}(\alpha, a) = -(2\pi i)^{-n} f_\gamma(\alpha, a),$$

где функция f_γ задается интегралом (6.8). Отсюда следует, что

$$f_I(\alpha, a) = -(2\pi i)^{-n} v(\beta) \sum_{s=0}^{r-1} L_{-s\mathbf{1}} f_\gamma(\alpha, a) = -(2\pi i)^{-n} v(\beta) \sum_{s=0}^{r-1} f_{\gamma - 2\pi i s \mathbf{1}}(\alpha, a).$$

Применив к обеим частям полученного равенства оператор L_k , $k \in (\mathbb{Z}^I)'$, получаем:

$$f_{I,k}(\alpha, a) = -(2\pi i)^{-n} v(\beta) \sum_{s=0}^{r-1} f_{\gamma + 2\pi i(k-s\mathbf{1})}(\alpha, a), \quad k \in (\mathbb{Z}^I)'.$$

7.5. Основная теорема. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ – произвольная подрешетка и $L \subset \mathbb{C}^N$ – порожденное ею комплексное подпространство. Обозначим через R кольцо функций $u(\alpha)$ на $\mathbb{C}^N$, постоянных на классах смежности по L , и через $R_\Lambda \subset R$ – подкольцо функций $u(\alpha)$, удовлетворяющих дополнительно условию периодичности:

$$(7.9) \quad u(\alpha - e_i) = u(\alpha), \quad i = 1, \dots, N.$$

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ – произвольная полная подрешетка и $L \subset \mathbb{C}^N$ – линейное подпространство, порожденное подрешеткой Λ . Тогда существуют множество $\mathcal{I}$ баз I относительно L и область $U \subset \mathbb{C}^N$ такие, что

- 1) GG -ряды $f_{I,k}$, где $I \in \mathcal{I}$, а k для каждого I пробегает по одному представителю из каждого класса $\kappa \in (\mathcal{L}^\perp)^I = (\mathbb{Z}^I)' / (\Lambda^\perp)^I$, сходятся в области U и линейно независимы над кольцом R всех функций на $\mathbb{C}^N / L$;
- 2) в области U пространство решений GG -системы, ассоциированной с L , и пространство общих гипергеометрических функций, ассоциированных с Λ , линейно порождены этими GG -функциями $f_{I,k}$ соответственно над кольцом R_Λ и кольцом R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатом, установленным в [10], см. также [27]: существует множество $\mathcal{I}$ баз I такое, что Γ -ряды $\varphi_{I,\lambda}$, $I \in \mathcal{I}$, $\lambda \in \mathcal{L}^J$, имеют общую область сходимости U и образуют базис в пространстве общих гипергеометрических функций на U .

В силу предложений 7.2 и 7.3 утверждение остается справедливым при замене функций $\varphi_{I,\lambda}$ функциями $f_{I,k}$. Тем самым, для общих гипергеометрических функций утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $f(\alpha, a)$ – произвольная GG -функция на U . Тогда функция f является решением общей гипергеометрической системы, и, следовательно, она представима в виде суммы

$$f(\alpha, a) = \sum u_{I,k}(\alpha) f_{I,k}(\alpha, a),$$

где (I, k) пробегает определенное выше множество, а $u_{I,k}$ – функции на $\mathbb{C}^N$, постоянные на классах смежности по L . Подставив это выражение в уравнения (4.1), получаем, что функции $u_{I,k}$ удовлетворяют условию периодичности (7.9).

ПРИМЕЧАНИЕ. Явное описание множеств $\mathcal{I}$ см. в [10].

§ 8. Резонансные GG -системы

8.1. Определение резонансной GG -системы. Существуют GG -системы такие, что при некоторых соотношениях между параметрами GG -функции удовлетворяют дополнительным дифференциальным уравнениям. Мы называем такие GG -системы резонансными, а дополнительные соотношения для GG -функций – резонансными соотношениями. Перейдем к определениям.

Будем исходить из определения GG -системы, данном в п. 4.2: GG -система на $V \times \mathbb{C}^N$ задается набором $A = \{\omega\}$ из N ненулевых векторов пространства V , линейно порождающих V . Для удобства будем нумеровать координаты в $\mathbb{C}^N$ не числами, а элементами из A , т.е. вместо a_i , $i = 1, \dots, N$, будем писать a_ω , $\omega \in A$. В этих обозначениях, в соответствии с п. 4.2, GG -система, ассоциированная с A , имеет следующий вид:

$$(8.1) \quad \frac{\partial \varphi(\beta, a)}{\partial a_\omega} = \varphi(\beta - \omega, a), \quad \omega \in A,$$

$$(8.2) \quad \sum_{\omega \in A} \left(a_\omega \frac{\partial \varphi(\beta, a)}{\partial a_\omega} \right) \omega = \varphi(\beta, a) \cdot \beta.$$

Введем для произвольного вектора $v \in V$ следующие обозначения:

$$A_v = \{\omega \in A \mid \omega + v \in A \cup \{0\}\}; \quad B_v = A \setminus A_v; \quad L_v \subset V$$

– линейное подпространство, порожденное векторами $\omega \in B_v$. В частности, $A_0 = A$, $B_0 = \emptyset$, $L_0 = 0$.

Очевидно, что для векторов v общего положения $A_v = \emptyset$, $B_v = A$, а потому $L_v = V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем вектор $v \in V$ согласованным с набором A , если $L_v \subset V$ является собственным подпространством в V .

В частности, вектор $v = 0$ согласован с любой системой A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем GG -систему (8.1), (8.2) резонансной, если существует хотя бы один вектор $v \neq 0$, согласованный с набором A .

ПРИМЕР. GG -система гауссова типа: множество A состоит из четырех векторов e_1, e_2, e_3 и $e_1 + e_2 - e_3$ в $\mathbb{C}^3$. С множеством A согласованы четыре вектора – векторы $\pm(e_1 - e_3)$ и векторы $\pm(e_2 - e_3)$. Если, например, $v = e_1 - e_3$, то $A_v = \{e_2, e_3\}$.

8.2. Описание резонансных GG -систем. Установим несколько простых свойств согласованных пар A и v . Отметим, прежде всего, что A_v непусто для любого вектора v , согласованного с A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Если вектор $v \neq 0$ согласован с A , то $v \notin A \cup L_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вектор $v \neq 0$ согласован с A , то существует вектор $\omega \in A$ такой, что $\omega \notin L_v$. Значит, $\omega \in A_v$, а потому $\omega + v \in A \cup \{0\}$. Предположим, что $v \in L_v$. Тогда $\omega + v \notin L_v$; следовательно, $\omega + v \in A_v$, а потому $\omega + 2v \in A \cup \{0\}$. Продолжая рассуждение, заключаем, что $A \cup \{0\}$ содержит бесконечное множество векторов $\omega + nv, n = 1, 2, \dots$, что невозможно. Итак, доказано, что $v \notin L_v$, и, значит, $v \notin B_v$.

Докажем, что $v \notin A_v$. Если $v \in A_v$, то $2v \in A$. Так как по уже доказанному $v \notin L_v$, то $2v \in A_v$, а потому $3v \in A$. Таким образом, A содержит бесконечное число векторов $nv, n = 1, 2, \dots$, что невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. $A_v \cap L_v = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует вектор $\omega \in A_v \cap L_v$. Рассмотрим последовательность векторов $\omega + nv, n = 1, 2, \dots$. Ни один из них не принадлежит подпространству L_v : в противном случае мы бы имели $v \in L_v$, что противоречит предложению 8.1. Отсюда индукцией по n убеждаемся, что все эти векторы принадлежат A_v , что невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. $\text{codim } L_v = 1$ для любого вектора $v \neq 0$, согласованного с множеством A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что любой вектор $\omega \in A$ принадлежит подпространству в V , порожденному L_v и v .

Пусть $\omega \in A$. Если $\omega \in B_v$, то утверждение очевидно. Если $\omega \in A_v$, то обозначим через n наименьшее натуральное число такое, что $\omega + kv \in A_v$ при $k < n$ и $\omega + nv \notin A_v$. Очевидно, что тогда либо $\omega + nv = 0$, либо $\omega + kv \in B_v$. В обоих случаях ω принадлежит пространству, порожденному L_v и v .

На основании предложений 8.1, 8.2, 8.3 получаем следующее описание всех множеств A из N ненулевых векторов в V , с которыми согласован произвольный фиксированный вектор $v \neq 0$.

Фиксируем 1) произвольный набор из $r < N$ попарно различных ненулевых векторов $\omega_1, \dots, \omega_r$ в V такой, что порожденное ими линейное подпространство $L \subset V$ имеет коразмерность 1 и не содержит вектора v , и 2) произвольный набор натуральных чисел $k_0, k_1, \dots, k_r$ такой, что $\sum_{i=0}^r k_i = N + 1$.

Отвечающее этим наборам множество A задается так:

$$A = \{\omega_i - jv \mid j = 0, 1, \dots, k_i - 1; i = 1, \dots, r\} \cup \{-jv \mid j = 1, \dots, k_0 - 1\};$$

при $k_0 = 1$ второе подмножество предполагается пустым.

8.3. Резонансные соотношения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Свяжем с каждым вектором $v \neq 0$, согласованным с множеством A , следующую гиперплоскость $\Pi_v \subset V$:

$$\Pi_v = L_v + v.$$

ТЕОРЕМА 8.1. Если GG -система (8.1), (8.2) резонансна, то с каждым вектором $v \neq 0$, согласованным с набором A , связано следующее резонансное соотношение для решений $\varphi(\beta, a)$ этой системы:

$$(8.3) \quad \sum_{\omega \in A_v} \langle \lambda, \omega \rangle a_\omega \frac{\partial \varphi(\beta, a)}{\partial a_{\omega+v}} = 0 \quad \text{при} \quad \beta \in \Pi_v,$$

где $\lambda \neq 0$ – вектор дуального пространства V^* , ортогональный к L_v . Здесь в случае $\omega + v = 0$ под $\frac{\partial}{\partial a_{\omega+v}}$ следует понимать единичный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в (8.2) β на $\beta - v$, получаем:

$$\sum_{\omega \in A} \left(a_\omega \frac{\partial \varphi(\beta - v, a)}{\partial a_\omega} \right) \omega = \varphi(\beta - v, a) \cdot (\beta - v),$$

откуда

$$(8.4) \quad \sum_{\omega \in A} \langle \lambda, \omega \rangle a_\omega \frac{\partial \varphi(\beta - v, a)}{\partial a_\omega} = \langle \lambda, \beta - v \rangle \varphi(\beta - v, a).$$

Имеем $\langle \lambda, \omega \rangle = 0$ при $\omega \in B_v$. Далее, если $\beta \in \Pi_v$, то $\langle \lambda, \beta - v \rangle = 0$. Таким образом, при $\beta \in \Pi_v$ равенство (8.4) сводится к следующему:

$$\sum_{\omega \in A_v} \langle \lambda, \omega \rangle a_\omega \frac{\partial \varphi(\beta - v, a)}{\partial a_\omega} = 0.$$

Остается заметить, что из (8.1) следует:

$$\frac{\partial \varphi(\beta - v, a)}{\partial a_\omega} = \varphi(\beta - v - \omega, a).$$

Значит, при $\omega \in A_v$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\beta - v, a)}{\partial a_\omega} &= \varphi(\beta, a), \quad \text{если } \omega + v = 0, \\ \frac{\partial \varphi(\beta - v, a)}{\partial a_\omega} &= \frac{\partial \varphi(\beta, a)}{\partial a_{\omega+v}}, \quad \text{если } \omega + v \neq 0. \end{aligned}$$

8.4. Пример резонансной системы. Пусть $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^n$ – пространство $(p \times n)$ -матриц $a = \|a_{ij}\|$, и пусть A – набор из $N = pn$ векторов $\omega_{ij} = e_j + f_i \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^p$,

где $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_p$ – базисы соответственно в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^p$. Обозначим через V подпространство в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^p$, порожденное векторами ω_{ij} .

Рассмотрим GG -систему в пространстве функций $f(\alpha, \beta; a)$, $(\alpha, \beta) \in V$, $a \in \mathbb{C}^N$, ассоциированную с набором A векторов ω_{ij} . В соответствии с общим определением GG -системы, она состоит из следующих уравнений:

$$(8.5) \quad \frac{\partial f(\alpha, \beta; a)}{\partial a_{ij}} = f(\alpha - e_j, \beta - f_i; a), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(8.6) \quad \sum_{i=1}^p a_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = \alpha_j f, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(8.7) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = \beta_i f, \quad i = 1, \dots, p.$$

Отметим, что условие $(\alpha, \beta) \in V$ эквивалентно соотношению $\sum \alpha_j = \sum \beta_i$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Общая гипергеометрическая система в пространстве функций на $\mathbb{C}^N$, ассоциированная с этим набором A , изучалась в [23].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. *Ограничения $f(\alpha, a) = f(\alpha, -1; a)$ GG -функций $f(\alpha, \beta; a)$ на плоскость $\Pi \subset V$, заданную уравнениями $\beta_i = -1$, $i = 1, \dots, p$, удовлетворяют следующим дополнительным соотношениям:*

$$(8.8) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_{i'j}} = 0, \quad i, i' = 1, \dots, p, \quad i \neq i'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим векторы $v_{ii'} = f_{i'} - f_i \in V$, $i' \neq i$. Очевидно, что в принятых выше обозначениях $A_{v_{ii'}} = \{\omega_{ij} \mid j = 1, \dots, n\}$, а подпространство $L_{v_{ii'}}$ линейно порождено векторами $\omega_{i''j} = e_j + f_{i''}$, где $i'' \neq i$. Отсюда следует, что $L_{v_{ii'}}$ – собственное подпространство в V , и, значит, векторы $v_{ii'}$ согласованы с набором A . Далее, очевидно, что гиперплоскость

$$\Pi_{v_{ii'}} = L_{v_{ii'}} + v_{ii'}$$

задается уравнением $\beta_i = -1$. Поскольку $\omega_{ij} + v_{ii'} = \omega_{i'j}$, то, в силу теоремы 8.1, ограничение GG -функции f на плоскость $\Pi_{v_{ii'}}$ удовлетворяет резонансному соотношению:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f(\alpha, a)}{\partial a_{i'j}} = 0.$$

Отсюда, поскольку $\Pi = \bigcap \Pi_{v_{ii'}}$, следует утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Ограничение $f(\alpha, a)$ GG -функции $f(\alpha, \beta; a)$ на плоскость $\Pi \subset V$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(8.9) \quad \sum_{i=1}^p a_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = \alpha_j f, \quad \text{где} \quad \sum \alpha_i = -p,$$

$$(8.10) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{i'j}} = -\delta_{ii'} f, \quad i, i' = 1, \dots, p,$$

$$(8.11) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a_{ij} \partial a_{i'j'}} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_{ij'} \partial a_{i'j}}, \quad i, i' = 1, \dots, p, \quad j, j' = 1, \dots, n.$$

В самом деле, уравнения (8.9) и уравнения (8.10) при $i = i'$ входят в определение GG -функций. Уравнения (8.10) при $i \neq i'$ суть дополнительные резонансные соотношения. Уравнения (8.11) следуют непосредственно из уравнений (8.5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно [2], система (8.9)–(8.11) представляет собой гипергеометрическую систему уравнений, связанную с грассманианом $G_{p,n}$ p -мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Мы видим, что эта система возникает как резонансный случай общей GG -системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М. Общая теория гипергеометрических функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. №1. С. 14–18.
- [2] Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Обобщенные гипергеометрические уравнения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. №2. С. 279–283.
- [3] Гельфанд И. М., Граев М. И. Теорема двойственности для общих гипергеометрических функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289. №1. С. 19–23.
- [4] Гельфанд И. М., Зелевинский А. В. Алгебраические и комбинаторные аспекты общей теории гипергеометрических функций // Функцион. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. №1. С. 17–34.
- [5] Васильев В. А., Гельфанд И. М., Зелевинский А. В. Поведение общих гипергеометрических функций в комплексной области // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. №2. С. 277–281.
- [6] Васильев В. А., Гельфанд И. М., Зелевинский А. В. Общие гипергеометрические функции на комплексных грассманианах // Функцион. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. №1. С. 23–38.
- [7] Гельфанд И. М., Граев М. И. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{3,6}$ // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. №2. С. 288–293.
- [8] Гельфанд И. М., Серганова В. В. Комбинаторные геометрии и страты тора на однородных компактных многообразиях // УМН. 1987. Т. 42. №2. С. 107–134.
- [9] Гельфанд И. М., Граев М. И., Зелевинский А. В. Голономные системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. №1. С. 14–19.
- [10] Гельфанд И. М., Зелевинский А. В., Капранов М. М. Гипергеометрические функции и торические многообразия // Функцион. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. №2. С. 12–26.
- [11] Гельфанд И. М., Ретах В. С., Серганова В. В. Обобщенные функции Эйри, жордановы группы и клетки Шуберта // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. №1. С. 17–21.
- [12] Гельфанд И. М., Граев М. И. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{3,6}$ // Матем. сб. 1989. Т. 180. №1. С. 3–38.
- [13] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Г-ряды и общие гипергеометрические функции на многообразиях $(k \times n)$ -матриц // Препринт ИПМ № 64, 1990.

- [14] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Гипергеометрические функции на стратах малых коразмерностей в $G_{k,n}$ // Препринт ИПМ № 138, 1990.
- [15] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Формулы приведения для гипергеометрических функций на грассманиане $G_{k,n}$ и описание гипергеометрических функций на стратах малых коразмерностей // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 793–797.
- [16] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Гипергеометрические функции на k -й внешней степени пространства $\mathbb{C}^n$ и грассманиане $G_{k,n}$ и связь между ними // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 1. С. 20–24.
- [17] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Обобщенные гипергеометрические функции, связанные с произвольным конечным или локально компактным полем // Докл. РАН. 1992. Т. 323. № 3. С. 394–397.
- [18] Граев М. И. Общие гипергеометрические функции // Функцион. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 2. С. 69–71.
- [19] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // УМН. 1992. Т. 47. № 4. С. 3–82.
- [20] Гельфанд И. М., Граев М. И. GG-функции // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 6. С. 645–648.
- [21] Гельфанд И. М., Граев М. И. Гипергеометрические функции на флаговых многообразиях // Докл. РАН. 1994. V. 338. № 2. Р. 154–157.
- [22] Граев М. И. Уравнения и ряды гипергеометрического типа // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 1. С. 72–76.
- [23] Гельфанд И. М., Граев М. И. Гипергеометрические функции на пространстве p -мерных матриц // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 1. С. 7–10.
- [24] Гельфанд И. М., Граев М. И., Спирин С. А. Гипергеометрические функции и многогранник Ньютона, связанные с действием тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на $\wedge^k \mathbb{C}^n$ // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 2. С. 155–158.
- [25] Гельфанд И. М., Граев М. И. GG-функции одной переменной // Докл. РАН. 1996. Т. 352. № 2. С. 1–4.
- [26] Гельфанд И. М., Граев М. И. GG-функции многих переменных и их связь с общими гипергеометрическими функциями // Докл. РАН. 1996. Т. 352. № 4. С. 1–4.
- [27] Adolphson A. Hypergeometric functions and rings generated by monomials // Duke Math. J. 1994. V. 73. № 2. P. 269–290.
- [28] Aomoto K. On the structure of integrals of power products of linear functions // Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokio. 1977. V. 27. № 2. P. 49–61.
- [29] Ehrenpreis L. Hypergeometric functions // Algebraic Analysis 1 / ed. M. Kashiwara, M. Kawai, 1988.
- [30] Ehrenpreis L. Hypergeometric functions // Special Functions. Proc. Hayashibara Forum, 1990. P. 78–89.
- [31] Fox C. H -functions as symmetric Fourier kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 98. № 3. P. 395–429.
- [32] Gelfand I. M., Graev M. I., Retakh V. S. Recent developments in the theory of general hypergeometric functions // Proc. Taniguchi Workshop, 1991. P. 86–91.
- [33] Gelfand I. M., Graev M. I., Retakh V. S. Formulas of reduction for hypergeometric functions connected with the Grassmanian and hypergeometric functions on strata of small codimension // Russian J. Math. Phys. 1991. V. 1. № 1.
- [34] Gelfand I. M., Graev M. I., Retakh V. S. Hypergeometric functions on $\wedge^k \mathbb{C}^n$ and the Grassmanian $G_{k,n}$; their connections and integral representations // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 3. P. 19–56.
- [35] Gelfand I. M., Graev M. I., Retakh V. S. Formulas of reduction for hypergeometric functions connected with the Grassmanian and hypergeometric functions on strata of small codimension // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 1. № 1. P. 289–311.
- [36] Gelfand I. M., Graev M. I., Postnikov A. Combinatorics in hypergeometric functions associated with positive roots // Arnold–Gelfand Math. Sem. Boston: Birkhäuser, 1997. P. 205–221.

- [37] Gelfand I. M., Kapranov N. M., Zelevinsky A. V. Generalized Euler integrals and A -hypergeometric systems // *Adv. Math.* 1990. V. 84. №2. P. 255–271.
- [38] Gelfand I. M., Kapranov N. M., Zelevinsky A. V. Hypergeometric functions, toric varieties and Newton polyhedra // *Special Functions. Proc Hayashibara Forum*, 1990. P. 101–121.
- [39] Pham F. Formules de Picar–Lefschetz généralisées en ramification des integrales // *Bull. Soc. Math. France*. 1965. V. 93. P. 333–367.
- [40] Pöthhammer L. Über die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singularen Punkten // *J. Reine Angew. Math.* 1887. V. 102. P. 76–159.
- [41] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [42] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
- [43] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
- [44] Гельфанд И. М., Граев М. И., Гиндикин С. Г. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах // *Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем.* Т. 16. М.: ВИНТИ, 1980. С. 53–228.
- [45] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
- [46] Уиттекер К. Дж., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963.
- [47] Федорюк М. В. Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
- [48] Dwork B. Generalized Hypergeometric Functions. Oxford, 1990.
- [49] Gelfand I. M., Kapranov N. M., Zelevinsky A. V. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [50] Mathai A. M., Saxena R. K. The H -functions with Applications in Statistics and Other Disciplines. New York: Halsted Press, Wiley, 1978.
- [51] Slater L. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966.
- [52] Srivastava H. M., Gupta K. C., Goyal S. P. The H -functions of One and Two Variables with Applications. New Delhi: South Asia Publ., 1982.
- [53] Srivastava H. M., Karlsson P.-O. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Chichester, 1985.