Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соловьев, Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 49–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:44:58

УДК 519.6+519.23

**ДВОЙСТВЕННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ
К ЗАДАЧАМ МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ**

В. Н. Соловьёв

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	49
Глава 1. Двойственность невыпуклых экстремальных задач	51
§ 1.0. Определения	51
§ 1.1. Сопряженные функции	52
§ 1.2. Характеризация выпуклости в терминах гладкости	56
§ 1.3. Теоремы о минимаксе	60
§ 1.4. Сопряженная функция к максимуму семейства квадратичных форм	62
§ 1.5. Двойственность невыпуклых экстремальных задач в случае гладкости двойственной задачи	70
Глава 2. Минимаксное оценивание параметров в линейных моделях наблюдения с неопределёнными статистиками второго порядка	71
§ 2.1. Постановка задачи	71
§ 2.2. Теорема двойственности	72
§ 2.3. Минимаксные оценки и метод наименьших квадратов	73
§ 2.4. Линейность минимаксных оценок	74
Глава 3. Приложения к теории плохо обусловленных задач	75
§ 3.1. Постановка задачи	75
§ 3.2. Теорема двойственности	76
§ 3.3. Оценка Кука–Ольмана	77
§ 3.4. Несимметричные ограничения на параметры регрессии	81
Список литературы	83

Введение

Основы теории двойственности в выпуклом анализе заложены еще в классических работах Г. Минковского, Г. Хана, Дж. фон Неймана, Э. Хелли. Эта теория приобрела стройные очертания после фундаментальных работ В. Фенхеля и Р. Т. Рокафеллара, в которых были введены и систематически изучены свойства сопряженных

функций. Выпуклый анализ занял видное место в современной теории экстремальных задач (см. монографии В.М. Алексеева, В.М. Тихомирова и С.В. Фомина [2], А. Д. Иоффе и В.М. Тихомирова [19], Е. Г. Гольштейна [96], Ж.-П. Обена и И. Эккланда [39], Б. Т. Поляка [42], Б. Н. Пшеничного [43], Р. Т. Рокафеллара [45], И. Эккланда и Р. Теама [65]).

Настоящая работа посвящена тому фрагменту теории двойственности, в котором важную роль играет связь выпуклости в исходном пространстве с гладкостью в сопряженном пространстве. По-видимому, впервые связь двойственности с гладкостью была установлена В. Л. Шмудлем [62], который обнаружил, что банахово пространство рефлексивно, если норма в сопряженном пространстве дифференцируема по Фреше. Попутно обнаружилось, что в этом случае единичный шар исходного пространства является равномерно (или строго) выпуклым (граница этого шара не содержит прямолинейных отрезков; аналитическую формулировку см., например, в [97, с. 510]). Связь строгой выпуклости в исходном пространстве с гладкостью в сопряженном пространстве затем исследовалась М. Дзем, В. Кли, Е. Асплундом, Р. Т. Рокафелларом и другими. Много позднее и в других терминах связь двойственности с гладкостью была также отмечена в задачах минимаксного оценивания (С. Верду и Г. В. Пур [84], И. Ф. Пинелис [40], [41]). Наше изложение основано на работах [47], [87], [88], возникших в связи с различными приложениями теории двойственности экстремальных задач (в частности, к задачам минимаксного оценивания), в которых систематически использовался аппарат сопряженных функций.

Основная идея работы [47] состояла в том, что гладкость в сопряженном пространстве автоматически влечет за собой выпуклость в исходном пространстве, даже если об этом заранее ничего не было известно. Однако затем обнаружилось, что такого рода результаты совсем просто следуют из фундаментальных результатов Е. Асплунда и Р. Т. Рокафеллара [66], [67] о связи строгой выпуклости (rotundity) в исходном пространстве с гладкостью в сопряженном (см. теоремы 1.1.0 и 1.1.1 ниже).

В § 1.1 показано, что для полунепрерывных снизу функций, даже без выпуклости, в некоторых точках y_0 должна сохраняться двойственность (т.е. значения функции в этих точках совпадают со значениями второй сопряженной функции). С помощью этого факта в § 1.2 показано, что произвольная (слабо) полунепрерывная снизу функция, заданная на рефлексивном банаховом пространстве, будет выпуклой, если ее сопряженная дифференцируема по (Гато) Фреше. В свою очередь, этот результат позволяет доказать средствами выпуклого анализа тонкие теоремы о выпуклости чебышёвских множеств, принадлежащие Н. В. Ефимову и С. Б. Стечкину [15]. В § 1.3 обсуждаются теоремы о минимаксности без условий вогнутости, впервые обнаруженные С. Верду [47]. Эти результаты являются аналогами теорем из § 1.1. Обширный § 1.4 посвящен вычислению сопряженных функций к максимуму семейств квадратичных форм. Это имеет многочисленные применения в анализе и статистике [87], [88]. В § 1.5 результаты § 1.1 применяются к теории двойственных экстремальных задач [87]. Здесь основной результат состоит в том, что разрывы двойственности должны быть связаны с негладкостью двойственной задачи (двойственная задача либо вообще не имеет решения, либо она не дифференцируема в точке своего минимума).

Глава 2 посвящена задаче минимаксного оценивания параметров в линейных регрессионных моделях с неопределенными статистиками второго порядка. Различные

постановки задач минимаксного оценивания были независимо предложены почти в одно и то же время (около 1963 года) А. Н. Колмогоровым [30], Н. Н. Красовским [22], М. Л. Лидовым [32] и П. Хьюбером [60]. Эти задачи интересны не только тем, что здесь была обнаружена связь двойственности с гладкостью, но прежде всего тем, что они дают одно из самых ярких свидетельств в пользу применения теории двойственности. В § 2.2 вместо исходной негладкой задачи, в которой может быть очень много переменных, осуществляется переход к двойственной задаче, в которой сопряженная функция непрерывно дифференцируема и для ряда практически важных случаев статистических ограничений может быть вычислена аналитически. В этих случаях двойственная задача заключается в безусловной минимизации эффективно вычисляемой гладкой выпуклой функции вектора состояния, которая имеет небольшую размерность [8], [48], [50], [52]. В § 2.3 показано, что решением минимаксной задачи является оценка наименьших квадратов, соответствующая наименее благоприятной матрице вторых моментов (результат, по-видимому, восходящий еще к Вальду [90]). С его помощью в конце главы 2 установлена линейность минимаксных оценок скалярного параметра.

В главе 3 рассматривается задача восстановления параметра $l = \langle c, \theta \rangle$ из вектора данных $\eta = A\theta + \xi$ при наличии априорной информации $\theta \in \Theta$. Из обширной теории плохо обусловленных задач наиболее близкими по постановкам и подходам работами являются [29], [58]. Сначала мы сосредоточимся на случае центрально-симметричного множества Θ . В § 3.2 дано конечномерное обобщение одного важного результата, принадлежащего И. А. Ибрагимову и Р. З. Хасьминскому [17], [18], а также А. М. Федотову [58], на задачи минимаксного оценивания с неопределенными статистиками второго порядка. В § 3.3 приведено обобщение красивого результата, принадлежащего В. Б. Меласу [38], которое в случае точно определенных статистик первого и второго порядка приводит к аномальной двойственной задаче. В конце главы 3 показано, что если априорное множество Θ не симметрично относительно нуля, все результаты этой главы по-прежнему применимы, но множество Θ следует симметризовать относительно нуля. В доказательствах используются теоремы о минимаксе из § 1.3 (стандартными теоремами о минимаксах в этих задачах воспользоваться не удастся (см. [17], [18], [58])).

Поскольку одной из целей этой работы было продемонстрировать, как в разных ситуациях работают одни и те же методы, и так как многие результаты в ней публикуются впервые, то обычно (исключая главу 2), они даны с доказательствами. Автор осознает, что неизбежно чьи-то труды не были отражены в этом обзоре, и заранее приносит их авторам свои искренние извинения.

Глава 1.

Двойственность невыпуклых экстремальных задач

§ 1.0. Определения

Пусть Y – локально выпуклое линейное топологическое (или нормированное) пространство, Y^* – его топологически сопряженное и $\langle y, y^* \rangle$ – значение функционала $y^* \in Y^*$ на элементе $y \in Y$. Как известно, билинейная форма $\langle y, y^* \rangle$ осуществляет двойственность между Y и Y^* . Для произвольной функции $g(y): Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} :=$

$\mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ определим сопряженную и вторую сопряженную (бисопряженную) функции соотношениями

$$(0.1) \quad g^*(y^*) := \sup_{y \in Y} \{\langle y, y^* \rangle - g(y)\}$$

и

$$g^{**}(y) := \sup_{y^* \in Y^*} \{\langle y, y^* \rangle - g^*(y^*)\}$$

соответственно. Легко видеть, что всегда

$$(0.2) \quad g(y) \geq g^{**}(y), \quad g^*(y^*) + g^{**}(y) \geq \langle y^*, y \rangle.$$

Говорят, что функция $g(y) : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *полуниепрерывна снизу* (далее – *пн. снизу*) в точке $y_0 \in Y$ (в которой $g(y_0) < +\infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V точки y_0 такая, что $g(y) \geq g(y_0) - \varepsilon$ при всех $y \in V$.

Напомним, что для выпуклой функции g при всех $y \in Y$ существует предел

$$(0.3) \quad g'(y_0; y) := \lim_{\lambda \rightarrow +0} (g(y_0 + \lambda y) - g(y_0)) / \lambda,$$

который называется *производной функции g по направлению y* . Если $g'(y_0; y) = -g'(y_0; -y)$, то эта производная называется *двусторонней*. Если же $g'(y_0; y) = \langle y, y_0^* \rangle$ для некоторого элемента $y_0^* \in Y^*$ при всех $y \in Y$, то функция g называется дифференцируемой по Гато в точке y_0 . Если, более того, предел (0.3) существует равномерно по всем y из единичной сферы пространства Y , то функция g называется дифференцируемой по Фреше в точке y_0 . Элемент $y_0^* \in Y^*$ такой, что $g'(y_0; y) = \langle y, y_0^* \rangle$, называется производной (Фреше или Гато) функции g в точке y_0 .

Аналогично определяются производные Фреше и Гато для сопряженной функции $g^*(y^*)$, с той лишь разницей, что теперь производные принадлежат второму сопряженному пространству Y^{**} . Будем говорить, что элемент $y_0 \in Y$ является производной Фреше (или Гато) сопряженной функции $g^*(y^*)$ в точке $y_0^* \in Y^*$, если g^* дифференцируема по Фреше (или Гато), причем $g^{*'}(y_0^*; y^*) = \langle y_0, y^* \rangle$ при всех $y^* \in Y^*$ (см. также замечание после теоремы 1.1.1).

§ 1.1. Сопряженные функции

В выпуклом анализе и его приложениях основополагающую роль играет равенство

$$(1.1) \quad g^{**}(y_0) = g(y_0),$$

справедливое для выпуклой полуниепрерывной снизу функции $g(y)$ во всех точках $y_0 \in Y$ (см. [2], [19], [45], [65]). Отправной точкой этой работы является следующий фундаментальный результат Е. Асплунда и Р. Т. Рокафеллара [66], [67].

ТЕОРЕМА 1.1.0. *Элемент $y_0 \in Y$ тогда и только тогда является производной Фреше (Гато) сопряженной функции g^* в точке $y_0^* \in Y^*$, когда функция $y \mapsto \langle y_0^*, y \rangle - g^{**}(y)$ достигает максимума в точке y_0 и любая ее максимизирующая последовательность сходится (слабо сходится) к y_0 .*

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой теореме и далее параллельно даются два утверждения: одно из них для случая дифференцируемости по Фреше и пн. снизу в нормированной топологии, а другое для случая дифференцируемости по Гато и пн. снизу в слабой топологии.

Отсюда сразу следует, что даже при отсутствии выпуклости равенство (1.1) остается справедливым в некоторых точках y_0 .

ТЕОРЕМА 1.1.1. Пусть произвольная функция $g(y): Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ пн. снизу (слабо пн. снизу) в точке $y_0 \in Y$, и при этом точка y_0 является производной Фреше (Гато) сопряженной функции g^* в некоторой точке $y_0^* \in Y^*$. Тогда справедливо равенство (1.1) [47], [87].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{y_k\}$ — максимизирующая последовательность для (0.1) в точке $y^* = y_0^*$. Тогда в силу (0.2) получаем, что

$$0 \leq g^*(y_0^*) + g^{**}(y_k) - \langle y_0^*, y_k \rangle \leq g^*(y_0^*) + g(y_k) - \langle y_0^*, y_k \rangle \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, поэтому

$$0 \leq g^*(y_0^*) + g^{**}(y_k) - \langle y_0^*, y_k \rangle \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Это означает, что $\{y_k\}$ — максимизирующая последовательность функции $y \rightarrow \langle y_0^*, y \rangle - g^{**}(y)$. По теореме 1.1.0 она сходится (слабо сходится) к y_0 . Так как $g(y)$ пн. снизу (слабо пн. снизу) в точке y_0 , из предыдущего неравенства получаем

$$g^*(y_0^*) + g(y_0) - \langle y_0^*, y_0 \rangle \leq 0.$$

Если бы равенство (1.1) было не верно, мы бы имели

$$g^*(y_0^*) + g^{**}(y_0) - \langle y_0^*, y_0 \rangle < 0,$$

что противоречит (0.2).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Полунепрерывность сопряженной функции g^* можно понимать в смысле последовательностей. 2) Производные Фреше (Гато) сопряженной функции g^* заведомо принадлежат исходному пространству Y , а не просто Y^{**} , если Y полно (слабо секвенциально полно) (см. [67, с. 451]).

СЛЕДСТВИЕ 1.1.2. Если функция $g(y): Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ пн. снизу (слабо пн. снизу) в нуле и сопряженная функция Фреше (Гато) дифференцируема в точке своего минимума, то [87]

$$(1.2) \quad g^{**}(0) = g(0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагается, что точка минимума y_0^* сопряженной функции $g^*(y^*)$ существует. Поскольку $0 \in \partial g^*(y_0^*)$, отсюда и следует результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.3. Если функция $g(y): \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ пн. снизу, то двойственность (1.1) выполняется для всех крайних точек y_0 субдифференциалов $\partial g^*(y^*)$, $y^* \in \mathbb{R}^n$ [87].

Следующий пример показывает, что в теореме 1.1.1 нельзя заменить производную по Фреше на производную по Гато, если полунепрерывность снизу имеет место лишь в нормированной, но не слабой топологии.

ПРИМЕР БОЛЬЦА. Рассмотрим гильбертово пространство $Y = H_0^1(0, 1)$ абсолютно непрерывных функций $y(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, равных нулю на концах отрезка $[0, 1]$ и имеющих производную $\dot{y}(t) \in L_2(0, 1)$. Как известно (см. [2, с. 71] и [39, с. 24]), функционал

$$g(y) := \int_0^1 \{y^2(t) + [1 - (\dot{y}(t))^2]^2\} dt: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

пн. снизу в нормированной топологии, но задача

$$(1.3) \quad \inf_{y \in Y} g(y)$$

минимизации g не имеет решения. Мы покажем, что релаксированная задача минимизации бисопряженного функционала g^{**} имеет единственное решение $y_0(t) \equiv 0$. Поскольку множество всех точек минимума функционала g^{**} совпадает с субдифференциалом $\partial g^*(0)$ и, как мы покажем, сопряженный функционал g^* непрерывен, то $y_0(t) \equiv 0$ – производная по Гато сопряженного функционала g^* в нуле [65]. В то же время $1 = g(0) > g^{**}(0) = 0$.

Введем обозначения $u(\alpha) := (\alpha^2 - 1)^2$, $\alpha_+ := \max(\alpha, 0)$,

$$\tilde{g}(y) := \int_0^1 [y^2(t) + u^{**}(\dot{y}(t))] dt: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Так как вторая сопряженная $u^{**}(\alpha)$, равная $[(\alpha^2 - 1)_+]^2$, неотрицательна, то $g(y) \geq \tilde{g}(y) \geq 0 \ \forall y \in Y$. А поскольку выпуклый функционал $\tilde{g}(y)$ так же, как и $g(y)$, пн. снизу, то

$$(1.4) \quad g(y) \geq g^{**}(y) \geq \tilde{g}(y) \geq 0 \quad \forall y \in Y.$$

Покажем, что задача минимизации функционала $g^{**}(y)$ на Y имеет единственное решение $y_0(t) \equiv 0$. Для этого рассмотрим минимизирующую последовательность $\{y_n(t)\}$ в задаче (1.3):

$$y_n(0) = 0, \quad \dot{y}_n(t) = (-1)^{k-1}, \quad \frac{k-1}{2n} < t < \frac{k}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

принадлежащую гильбертову пространству $Y = H_0^1(0, 1)$ и равномерно сходящуюся к нулю [19], [39]. Она ограничена в Y :

$$\|y_n\|^2 = \int_0^1 \dot{y}_n^2(t) dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и сходится к нулю на множестве бесконечно дифференцируемых функций $z(t) \in Y^* = Y$, которое плотно в Y^* :

$$\langle y_n, z \rangle = \int_0^1 \dot{y}_n(t) \dot{z}(t) dt = - \int_0^1 y_n(t) \ddot{z}(t) dt \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

так как последовательность $y_n(\cdot)$ равномерно сходится к нулю и функция $\ddot{z}(t)$ ограничена на отрезке $[0, 1]$. Поэтому последовательность $y_n(\cdot)$ слабо сходится к нулю (см. [21, с. 195]). Поскольку $g(y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ [19], [39] и выпуклый пн. снизу функционал $g^{**}(y)$ пн. снизу в слабой топологии, то с учетом (1.4) имеем

$$0 = \varliminf_{n \rightarrow \infty} g(y_n) \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} g^{**}(y_n) \geq g^{**}(0) \geq 0,$$

т.е. $g^{**}(0) = 0$. С другой стороны, если $g^{**}(y) = 0$, то в силу (1.4) $\tilde{g}(y) = 0$. Но функционал $\tilde{g}(y)$ равен нулю только в точке $y_0(t) \equiv 0$, т.е. $y_0(t) \equiv 0$ – единственная точка минимума функционала $g^{**}(y)$ на Y .

Таким образом, субдифференциал $\partial g^*(0) = \{0\}$ состоит из единственного элемента. Если мы покажем, что сопряженный функционал $g^*(y^*)$ непрерывен, то это будет означать, что $y_0(t) \equiv 0$ – производная по Гато функционала $g^*(y^*)$ в нуле (см. [65, с. 33]).

Рассмотрим функционал

$$(1.5) \quad h(y) := \int_0^1 u(\dot{y}(t)) dt: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Поскольку $g(y) \geq h(y)$ для любого $y \in Y$, то $g^*(y^*) \leq h^*(y^*)$ для любого $y^* \in Y^*$. Кроме того, из неравенства

$$\int_0^1 u(\dot{y}(t)) dt + \int_0^1 u^*(\dot{y}^*(t)) dt \geq \int_0^1 \dot{y}(t) \dot{y}^*(t) dt = \langle y, y^* \rangle$$

и определения (1.5) вытекает, что

$$h^*(y^*) = \sup_{y \in Y} \{ \langle y, y^* \rangle - h(y) \} \leq \int_0^1 u^*(\dot{y}^*(t)) dt,$$

т.е.

$$g^*(y^*) \leq h^*(y^*) \leq \int_0^1 u^*(\dot{y}^*(t)) dt \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Теперь воспользуемся неравенством $u^{**}(\alpha) \geq [(|\alpha| - 1)_+]^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ или после взятия операции сопряжения

$$u^*(\beta) \leq \beta^2/4 + |\beta| \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

В силу последних двух неравенств сопряженный функционал $g^*(y^*)$ всюду конечен, а потому и непрерывен на гильбертовом пространстве $Y^* = H_0^1(0, 1)$ (см. [65, с. 23]). Это доказывает, что $y_0(t) \equiv 0$ – производная по Гато функционала $g^*(y^*)$ в нуле. В то же время, как мы видели, $g^{**}(0) = 0$, хотя, очевидно, $g(0) = 1$.

§ 1.2. Характеризация выпуклости в терминах гладкости

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть Y – банахово (слабо секвенциально полное банахово) пространство и функция $g(y): Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ пн. снизу (слабо пн. снизу) на Y . Кроме того, пусть множество $C := \{y^* \in Y^* : \partial g^*(y^*) \neq \emptyset\}$ не пусто и сопряженная функция g^* дифференцируема по Фреше (Гато) на C . Тогда функция $g(y)$ выпукла [55].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D := \{y = \nabla g^*(y^*), y^* \in C\}$ будет образом множества C при градиентном отображении $y = \nabla g^*(y^*)$. В обоих случаях это множество расположено в банаховом пространстве Y (см. замечание к теореме 1.1.1), так что согласно теореме 1.1.1 равенство (1.1) справедливо на множестве D . Напомним, что [39], [45]

$$(2.1) \quad y \in \partial g^*(y^*) \iff y^* \in \partial g^{**}(y)$$

и

$$\partial g^*(y^*) = \{\nabla g^*(y^*)\}, \quad y^* \in C.$$

Поскольку субдифференциал $\partial g^*(y^*)$ пуст, если $y^* \notin C$, бисопряженная функция $g^{**}(y)$ субдифференцируема в точке y , только если $y \in D$. По теореме Бренстеда и Рокафеллара [39], [73] для любой точки $y_0 \in \text{dom } g^{**}$ существует последовательность $y_k \rightarrow Y_0$ такая, что

$$\partial g^{**}(y_k) \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots, \quad g^{**}(y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} g^{**}(y_k).$$

Поэтому $y_k \in D$ и двойственность (1.1) становится $g^{**}(y_k) = g(y_k)$, $k = 1, 2, \dots$. В силу пн. снизу функции $g(y)$ отсюда получаем

$$g^{**}(y_0) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} g^{**}(y_k) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} g(y_k) \geq g(y_0)$$

для любого $y_0 \in \text{dom } g^{**}$ (здесь мы также пользуемся тем фактом, что слабо пн. снизу функция является пн. снизу и в сильной топологии). Поскольку в любом случае $g^{**}(y_0) \leq g(y_0)$, двойственность (1.1) имеет место на множестве $\text{dom } g^{**}$. Но когда $y_0 \notin \text{dom } g^{**}$, тогда $g(y_0) \geq g^{**}(y_0) = +\infty$, так что $g(y) \equiv g^{**}(y)$, и следовательно, функция $g(y)$ выпукла.

ЗАМЕЧАНИЯ. Этот результат справедлив в произвольном банаховом пространстве не только в случае Фреше-, но и Гато-дифференцируемости, если дополнительно потребовать, чтобы производные сопряженной функции принадлежали этому пространству. Можно доказать, что в действительности сопряженный функционал к рассмотренному выше функционалу Больца дифференцируем по Гато на всем пространстве, так что в теореме 1.2.1 тоже нельзя заменить производную по Фреше на производную по Гато, если полунепрерывность снизу имеет место лишь в нормированной, но не слабой топологии.

Здесь мы покажем, что в проблеме выпуклости чебышёвских множеств эта теорема дает такой результат: *всякое слабо замкнутое чебышёвское множество в гильбертовом пространстве выпукло*. В конечномерном случае этот факт сводится

к известной теореме Т. Мошкина, общий результат доказан в работе Н. В. Ефимова, С. Б. Стечкина [15]; см. также [68], [94], [95]. Напомним, что множество A называется чебышёвским, если для любой точки $x \in H$ существует ровно один элемент $y(x)$ такой, что

$$(2.2) \quad |y(x) - x| = \rho(x, A) := \inf_{y \in A} |y - x|, \quad x \in H, \quad y(x) \in A.$$

ТЕОРЕМА 1.2.2. Пусть A – замкнутое множество в гильбертовом пространстве H . Множество A выпукло в том и только том случае, когда квадрат расстояния $\rho^2(x, A)$ от произвольной точки x до множества A дифференцируем по Фреше на H [95].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию $g(y) := |y|^2/2 + \delta(y | A)$ [68], где $\delta(y | A) := 0$, $y \in A$, $\delta(y | A) := +\infty$, $y \notin A$, – индикаторная функция множества A . Легко заметить, что она пн. снизу, а сопряженная функция $g^*(x)$ может быть записана как

$$(2.3) \quad g^*(x) = |x|^2/2 - \rho^2(x, A)/2.$$

Поэтому, если функция $\rho^2(x, A)$ Фреше-дифференцируема на H , сопряженная функция $g^*(x)$ также Фреше-дифференцируема на H , и по теореме 1.2.1 функция $g(y)$ выпукла. Тогда ее множество уровня

$$(2.4) \quad A = \{y \in H : g(y) < +\infty\}$$

тоже выпукло. Наоборот, если множество A выпукло и замкнуто в гильбертовом пространстве H , то индикаторная функция $\delta(y | A)$ выпукла и пн. снизу. Следовательно, функция $\rho^2(x, A)$ Фреше-дифференцируема на H (см. [39, с. 194]).

ТЕОРЕМА 1.2.3. Пусть A будет слабо замкнутым множеством в гильбертовом пространстве H . Тогда следующие свойства эквивалентны [55]:

- а) множество A выпукло;
- б) A – чебышёвское множество;
- с) функция $\rho^2(x, A)$ дифференцируема по Гато на H ;
- д) функция $\rho^2(x, A)$ дифференцируема по Фреше на H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку слабо замкнутые множества замкнуты и в нормированной топологии, свойства а) и д) эквивалентны по теореме 1.2.2. Когда множество A слабо замкнуто и выпукло, множества уровня $\{y \in A : |x - y|^2 \leq \alpha\}$ пн. снизу строго выпуклой функции $|x - y|^2$ слабо компактны, так что а) влечет за собой б) по теореме Вейерштрасса. Мы собираемся показать, что б) влечет за собой с) и с) влечет за собой а).

Пусть A – чебышёвское множество в H и $y(x): H \rightarrow A$ – метрическая проекция точки $x \in H$ на множество A , которая единственным образом определяется равенством (2.2). Из тождества (2.3) следует, что функция $g^*(x)$ так же, как и липшицева функция $\rho(x, A)$, непрерывна на H . Пользуясь слабой замкнутостью множества A , легко показать, что метрическая проекция $y(x)$ локально ограничена и имеет слабо-сильно замкнутый график.

Ключом к доказательству теоремы 1.2.3 является замечание, что $y(x) \in \partial g^*(x)$ для всех $x \in H$. Действительно, из (2.3) и (2.2) следует, что $g^*(x) = \langle y(x), x \rangle - g(y(x))$, так что $g^*(x) + g^{**}(y(x)) \leq \langle y(x), x \rangle$, что означает $y(x) \in \partial g^*(x)$ (см. [19], [45]).

Все, что нам теперь нужно – это доказать равенства

$$\partial g^*(x) = \{\nabla g^*(x)\} = \{y(x)\}, \quad x \in H.$$

С этой целью для произвольного элемента $y \in \partial g^*(x)$ мы рассмотрим последовательность $x_k = x + (y - y(x))/k$. Поскольку $x_k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$ и метрическая проекция локально ограничена, существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такая, что $y(x_{k_n})$ слабо сходится к некоторой точке z при $n \rightarrow \infty$. Как было замечено выше, метрическая проекция имеет слабо-сильно замкнутый график, поэтому $z = y(x)$.

Учитывая монотонность субдифференциального отображения $\partial g^*(x)$, мы получаем, что векторы $y(x_{k_n}) \in \partial g^*(x_{k_n})$ и $y \in \partial g^*(x)$ подчиняются неравенствам $\langle y(x_{k_n}) - y, x_{k_n} - x \rangle \geq 0$, откуда $\langle y(x_{k_n}) - y, y - y(x) \rangle \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Когда n стремится к бесконечности, это дает $-|y(x) - y|^2 \geq 0$, ибо $y(x_{k_n})$ слабо сходится к $y(x)$. Иными словами, $y = y(x)$ для любых векторов $x \in H$ и $y \in \partial g^*(x)$.

Таким образом, субдифференциальное отображение $\partial g^*(x) = \{y(x)\}$ однозначное. Как мы заметили, сопряженная функция $g^*(x)$ непрерывна. Поэтому она Гато-дифференцируема на H [65]. В силу тождества (2.3) это относится и к функции $\rho^2(x, A)$. Это доказывает, что с) следует из b).

Наконец, если функция $\rho^2(x, A)$ Гато-дифференцируема на H , то это относится и к функции $g^*(x)$. Поскольку множество A слабо замкнуто, функция $g(y)$ слабо пн. снизу и по теореме 1.2.1 она выпукла. Следовательно, ее множество уровня (2.4) также выпукло. Таким образом, а) следует из с).

Теперь мы приведем достаточные условия выпуклости множества A в терминах гладкости его опорной функции

$$(2.5) \quad \delta^*(y^* | A) = \sup_{y \in A} \langle y^*, y \rangle.$$

ТЕОРЕМА 1.2.4. Пусть произвольное множество A будет замкнуто (слабо замкнуто) в банаховом пространстве (слабо секвенциально полном банаховом пространстве) $Y \neq \mathbb{R}^1$, а его опорная функция $\delta^*(y^* | A) \not\equiv +\infty$ и дифференцируема по Фреше (Гато) во всякой точке $y^* \neq 0$, в которой $\partial \delta^*(y^* | A) \neq \emptyset$. Тогда если замыкание его выпуклой оболочки $\overline{\text{conv}} A$ имеет непустую внутренность, то справедливо равенство [56]

$$(2.6) \quad \overline{\text{conv}} A = (A + A)/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любую граничную точку $y_0 \in \overline{\text{conv}} A$. Поскольку это множество имеет непустую внутренность, то по теореме отделмости найдется вектор $y_0^* \neq 0$ такой, что

$$\langle y, y_0^* \rangle \leq \langle y_0, y_0^* \rangle \quad \forall y \in \overline{\text{conv}} A.$$

Поэтому $y_0 \in \partial\delta^*(y_0^* | \overline{\text{conv}} A)$ (см. [19, с. 209]), так что по условию теоремы вектор $y_0 \in Y$ является производной (Гато) Фреше опорной функции

$$(2.7) \quad \delta^*(y^* | A) = \delta^*(y^* | \overline{\text{conv}} A)$$

в точке $y_0^* \in Y^*$. Применим теорему 1.1.1 к (слабо) пн. снизу функции $g(y) = \delta(y | A)$, сопряженная к которой равна опорной функции множества A . По этой теореме

$$\delta(y_0 | A) = \delta^{**}(y_0 | A) = \delta(y_0 | \overline{\text{conv}} A) = 0,$$

что означает $y_0 \in A$. Таким образом, все граничные точки замыкания выпуклой оболочки множества A принадлежат самому множеству A .

Теперь возьмем любую точку $y_0 \in \text{int } \overline{\text{conv}} A$. Поскольку $Y \neq \mathbb{R}^1$, она принадлежит некоторому двумерному сечению B множества $\overline{\text{conv}} A$, которое тоже выпукло и замкнуто и содержит точку y_0 внутри себя. Без ограничения общности рассуждения можно считать, что $y_0 = 0$ и это сечение лежит на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Поскольку $0 \in \text{int } B$, то калибровочная функция $k(x)$ сечения B конечна при всех $x \in \mathbb{R}^2$. Поэтому выпуклая функция $k(x)$ непрерывна. Покажем, что $k(c) = k(-c)$ для некоторого вектора $c \in \mathbb{R}^2$, $c \neq 0$. Для этого введем функции $r(u) := k(\cos u, \sin u)$ и $S(u) := r(u + \pi) - r(u)$. Функция $S(u)$ непрерывна и меняет знак на отрезке $[0, \pi]$, ибо $S(\pi) := r(2\pi) - r(\pi) = r(0) - r(\pi) := -S(0)$. Поэтому найдется угол u такой, что $S(u) = 0$, т.е. $k(c) = k(-c)$ для вектора $c = (\cos u, \sin u)$.

Теперь заметим, что $k(c) \neq 0$, ибо иначе сечение B целиком содержало бы прямую $\{\alpha c | \alpha \in \mathbb{R}^1\}$. Тогда само множество $\overline{\text{conv}} A$ тоже содержало бы прямую $\{\alpha z + y_0 | \alpha \in \mathbb{R}^1\}$, и поэтому опорная функция (2.7) была бы конечной только в гиперплоскости $\langle z, y^* \rangle = 0$, что противоречит дифференцируемости этой функции в точке $y_0^* \in Y$. Таким образом, $k(c) = k(-c) > 0$ и поэтому $0 \in \mathbb{R}^2$ – середина отрезка с концами в точках $\pm c/k(\pm c)$, лежащих на границе сечения B , а потому и на границе самого множества $\overline{\text{conv}} A$.

Окончательно, если y_0 – граничная точка множества $\overline{\text{conv}} A$, то $y_0 = (y_0 + y_0)/2$ с вектором $y_0 \in A$, а если y_0 – внутренняя точка $\overline{\text{conv}} A$, то $y_0 = (y_1 + y_2)/2$ с векторами $y_i \in A$, $i = 1, 2$, лежащими на границе множества $\overline{\text{conv}} A$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2.5. Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, а субдифференциалы его опорной функции $\delta^*(y^* | A)$ при $y^* \neq 0$ содержат не более одного элемента, то при $n \neq 1$ и $\delta^*(y^* | A) \neq +\infty$ имеет место представление (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае множество $\overline{\text{conv}} A$ либо состоит из одной точки, либо имеет непустую внутренность, ибо в противном случае это множество лежит в некоторой гиперплоскости с нормалью $y_0^* \neq 0$, и поэтому субдифференциал $\partial\delta^*(y_0^* | A) = \overline{\text{conv}} A$ должен состоять из одной точки. Кроме того, опорная функция дифференцируема во всякой точке $y^* \neq 0$, в которой $\partial\delta^*(y^* | A) \neq \emptyset$ (см. [45]).

СЛЕДСТВИЕ 1.2.6. Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно некоторому выпуклому компакт в $\mathbb{R}^n$, а его опорная функция дифференцируема всюду, кроме нуля, то это множество выпукло.

Это частный случай результатов Либермана (см. [10], [101]).

В заключение на еще одном примере мы покажем, что теорема 1.2.1 является довольно гибким инструментом исследования выпуклости множеств.

ТЕОРЕМА 1.2.7. Пусть функция $f(y): \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла и пн. снизу на всем пространстве и дифференцируема на выпуклом компакте C . Тогда выпуклость множества $A = \{y^* = \nabla f(y), y \in C\}$ эквивалентна дифференцируемости функции

$$f_c(y) := \sup_{x \in C} \{f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $g(y^*) := f^*(y^*) + \delta(y^* \mid A)$, которая пн. снизу, ибо градиентное отображение $\nabla f(y)$ непрерывно [45] и переводит компакт C в компакт A . В силу тождества [19], [45]

$$f^*(y^*) + f(y) = \langle y^*, y \rangle, \quad y^* = \nabla f(y), \quad y \in C,$$

сопряженная функция равна

$$(2.8) \quad g^*(y) = \sup_{y^* \in A} \{\langle y, y^* \rangle - f^*(y^*)\} = f_c(y).$$

Если она всюду дифференцируема, то по теореме 1.2.1 исходная функция $g(y^*)$ выпукла, а потому будет выпукла и ее область определения A .

Наоборот, пусть компактное множество A выпукло. Пользуясь дифференцируемостью функции $f(y)$ на множестве C , нетрудно доказать, что сопряженная к ней функция строго выпукла на множестве A . Тогда при каждом $y \in \mathbb{R}^n$ максимум в (2.8) достигается ровно на одном элементе $y^* = y^*(y) \in A$. По теореме о субдифференциале максимума семейства выпуклых функций (см. [19, с. 213]) $\partial g^*(y) = \{y^*(y)\}$ для любого y , т.е. функция $g^*(y) \equiv f_c(y)$ всюду дифференцируема.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $f_c(y)$ является наименьшей выпуклой полунепрерывной снизу функцией, совпадающей с $f(y)$ на множестве C (это вытекает из неравенства $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$).

§ 1.3. Теоремы о минимаксе

Теорема Дж. фон Неймана [82] и ее обобщения [39] утверждают, что если функция $L(x, y)$ выпукла по x на множестве A при каждом фиксированном $y \in Y$ и вогнута по y на множестве Y при каждом фиксированном $x \in A$, то при некоторых топологических предположениях на лагранжиан $L(x, y)$ справедливо минимаксное соотношение (3.2). Здесь мы покажем, что условие вогнутости можно заменить на условие дифференцируемости функции

$$(3.1) \quad \varphi(x) := \sup_{y \in Y} L(x, y) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

в точке ее минимума на множестве A . По-видимому, впервые этот факт был обнаружен С. Верду [84] и затем был переоткрыт И. Ф. Пинелисом [40], [41] и автором [47], [49]. В настоящей работе мы приводим некоторые улучшения этих результатов, основанные на следующей лемме.

ЛЕММА 1.3.1. Пусть функции $\psi_\alpha(t): \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпуклы и их верхняя грань $\psi(t) := \sup_\alpha \psi_\alpha(t)$ дифференцируема в точке τ . Тогда все функции $\psi_\alpha(t)$ такие, что $\psi_\alpha(\tau) = \psi(\tau)$, тоже дифференцируемы в точке τ и $\psi'_\alpha(\tau) = \psi'(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $\psi(\tau)$ конечна в окрестности точки τ , то все функции $\psi_\alpha(\tau)$ тоже конечны в этой окрестности. Очевидно, что если $\psi_\alpha(\tau) = \psi(\tau)$, то

$$\psi'(\tau) = \psi'(\tau; 1) \geq \psi'_\alpha(\tau; 1), \quad -\psi'(\tau) = \psi'(\tau; -1) \geq \psi'_\alpha(\tau; -1).$$

Складывая эти неравенства, получим $0 \geq \psi'_\alpha(\tau; 1) + \psi'_\alpha(\tau; -1) \geq \psi'_\alpha(\tau; 0) = 0$, ибо производная $\psi'_\alpha(\tau; \cdot)$ выпукла. Таким образом, правая и левая производные функции $\psi_\alpha(t)$ в точке τ равны $\psi'(\tau)$.

ТЕОРЕМА 1.3.2. Пусть функция $L(x, y): X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла по x при фиксированном $y \in Y$ на линейном пространстве X и множество $A \subset X$ выпукло. Пусть $x_* \in A$ — точка минимума функции (3.1) на множестве A , причем при $x = x_*$ максимум (3.1) достигается на некотором элементе $y_* \in Y$. Если функция (3.1) имеет двусторонние производные $\varphi'(x_*; x - x_*)$ в любом допустимом направлении $x - x_*$, $x \in A$, то (x_*, y_*) — седловая точка функции $L(x, y)$ на множестве $A \times Y$ и

$$(3.2) \quad \min_{x \in A} \sup_{y \in Y} L(x, y) = \max_{y \in Y} \inf_{x \in A} L(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (3.1) достигает своего минимума на множестве A в точке $x_* \in A$, поэтому $\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)x_*) \geq \varphi(x_*)$ для всех $x \in A$, $\lambda \in (0, 1)$, и, следовательно, $(\varphi(x_* + \lambda(x - x_*)) - \varphi(x_*))/\lambda \geq 0$. При $\lambda \rightarrow 0$ получаем из этого неравенства

$$(3.3) \quad \varphi'(x_*; x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in A.$$

Поскольку функция (3.1) имеет двусторонние производные (3.3) и по условию

$$(3.4) \quad L(x_*, y_*) = \max_{y \in Y} L(x_*, y),$$

то по лемме 1.3.1, примененной к функциям $\psi_y(t) = L(x_* + t(x - x_*), y)$ в точке $\tau = 0$, производная функции $L(\cdot, y_*)$ в точке x_* по любому направлению $x - x_*$, $x \in A$, равна соответствующей производной по направлению функции $\varphi(x)$.

В силу этого и выпуклости лагранжиана $L(\cdot, y_*)$ имеем

$$(3.5) \quad L(x, y_*) - L(x_*, y_*) \geq \varphi'(x_*; x - x_*), \quad x \in A,$$

что ввиду (3.3) преобразуется к

$$(3.6) \quad L(x_*, y_*) = \min_{x \in A} L(x, y_*).$$

Соотношения (3.4), (3.6) означают, что (x_*, y_*) — седловая точка лагранжиана $L(x, y)$ на множестве $A \times Y$, и поэтому справедлива двойственность (3.2) [65].

ТЕОРЕМА 1.3.3. Пусть функция $L(x, y): X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла по x на линейном пространстве X и полунепрерывна сверху по y на компактном топологическом пространстве Y , и пусть $x_* \in A$ – точка минимума функции (3.1) на выпуклом множестве $A \subset X$. Тогда двойственность (3.2) справедлива при выполнении любого из следующих условий:

- а) для фиксированного $x \in A$ функции $L(\cdot, y_*)$ имеют двусторонние производные в точке x_* в направлении $x - x_*$, которые совпадают для всех элементов $y_* \in Y$, дающих максимум в (3.4);
- б) функции $L(\cdot, y_*)$ совпадают для всех элементов $y_* \in Y$, дающих максимум в (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством [19], [43]

$$(3.7) \quad \psi'(\tau) = \max_{\alpha} \{ \psi'_{\alpha}(\tau) \mid \psi_{\alpha}(\tau) = \psi(\tau) \}.$$

В случае а) функция (3.1) имеет двусторонние производные $\psi'(x_*; x - x_*)$ в любом направлении $x - x_*$, $x \in A$, и теорема 1.3.3 следует из теоремы 1.3.2. В случае б) мы получаем из (3.7), что производные по направлению функции $L(\cdot, y_*)$ равны соответствующим производным функции $\varphi(x)$ [41], что дает неравенство (3.5), которое использовалось в доказательстве теоремы 1.3.2.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.4. Пусть функция $L(x, y): X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла по x на линейном пространстве X и полунепрерывна сверху по y на компактном топологическом пространстве Y , и пусть $x_* \in A$ – точка минимума функции (3.1) на выпуклом множестве $A \subset X$. Если максимум (3.4) достигается на единственном элементе $y_* \in Y$, то справедлива двойственность (3.2) [40].

В настоящее время известны два подхода к теории двойственности, основанные на теории сопряженных функций и на теоремах о минимаксе, которые в выпуклом случае почти идентичны (см. [65], а также доказательство леммы 1.4.1). Как видно из §§ 1.1, 1.3, в невыпуклом случае эти подходы уже не так близки.

§ 1.4. Сопряженная функция к максимуму семейства квадратичных форм

Пусть $C_i, i = 1, \dots, k$, будут компактными подмножествами евклидова n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{D}$ будет компактным множеством неотрицательно определенных матриц D порядка n . Рассмотрим функцию

$$(4.1) \quad 2D(x) := \max_{D \in \mathcal{D}, c_i \in C_i} \langle Dx, x \rangle + \sum_{i=1}^k \langle c_i, x \rangle^2.$$

Без потери общности можно предположить, что множества C_i центрально-симметричны и все множества $\mathcal{D}, C_i, i = 1, \dots, k$, выпуклы (иначе нужно симметризовать множества C_i и заменить все эти множества на их выпуклые оболочки). Введем множество

$$(4.2) \quad \mathcal{K} = \left\{ K = D + \sum_{i=1}^k c_i c_i^T \mid D \in \mathcal{D}, c_i \in C_i, i = 1, \dots, k \right\}$$

неотрицательно определенных матриц K порядка n . Тогда

$$(4.3) \quad 2D(x) = \max_{K \in \mathcal{K}} \langle Kx, x \rangle.$$

Пусть $\mathcal{R}(K) := \{y = Kx : x \in \mathbb{R}^n\}$ и $\mathcal{N}(K) := \{x \in \mathbb{R}^n : Kx = 0\}$ будут образом и ядром матрицы $K \geq 0$ соответственно. Как известно (см. [45, с. 125]), сопряженная функция к квадратичной форме $g(x) := \langle Kx, x \rangle/2$, равна

$$(4.3a) \quad g^*(y) = \langle K^+ y, y \rangle/2,$$

где K^+ обозначает псевдообратную матрицу, причем по соглашению $\langle K^+ y, y \rangle := +\infty$ при $y \notin \mathcal{R}(K)$. Чтобы обобщить этот результат, нам нужна следующая

ЛЕММА 1.4.1. *Пусть D будет неотрицательно определенной матрицей порядка n и все множества C_i строго выпуклы. Тогда*

$$(4.4) \quad f(y) := \inf_{c_i \in C_i} \left\langle \left(D + \sum_{i=1}^k c_i c_i^T \right)^+, y, y \right\rangle / 2$$

будет выпуклой функцией на $\mathbb{R}^n$.

1-Е ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опорные функции $\delta^*(x \mid C_i)$ строго выпуклых множеств C_i дифференцируемы всюду, кроме нуля. Поэтому функция

$$(4.5) \quad 2D(x) = \langle Dx, x \rangle + \sum_{i=1}^k \delta^{*2}(x \mid C_i)$$

тоже всюду дифференцируема (ее градиент в нуле равен нулю, ибо $\delta^{*2}(x \mid C) \leq M^2|x|^2$, если $|c| \leq M$ для любого вектора $c \in C$). Проверим, что функция (4.5) сопряжена к функции $f(y)$:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} f^*(x) &= \sup_y \left\{ \langle x, y \rangle - \inf_{c_i \in C_i} \langle K^+ y, y \rangle / 2 \right\} \\ &= \sup_{c_i \in C_i} \sup_y \left\{ \langle x, y \rangle - \langle K^+ y, y \rangle / 2 \right\} \\ &\quad \text{по (4.3a) и (1.1)} \\ &= \sup_{c_i \in C_i} \langle Ky, y \rangle / 2 = D(x). \end{aligned}$$

По теореме о маргинальном значении (см. [39, следствие 3.22]) функция $f(y)$ пн. снизу, ибо функция (4.3a) пн. снизу по обоим переменным K и y в совокупности и отображение

$$(4.7) \quad K = D + \sum_{i=1}^k c_i c_i^T$$

непрерывно по переменным c_i на компактных множествах C_i , $i = 1, \dots, k$. Таким образом, функция $f(y)$ выпукла по теореме 1.2.1.

2-Е ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем лагранжиан

$$L(x, c) := \left\langle \left(D + \sum_{i=1}^k c_i c_i^T \right) x, x \right\rangle / 2 - \langle x, y \rangle,$$

являющийся выпуклым по x на $\mathbb{R}^n$ и пн. сверху по переменным $c = (c_1, \dots, c_k)$ на декартовом произведении $C_1 \times \dots \times C_k$. С учетом (4.5) функция (3.1) принимает вид

$$\varphi(x) = \sup_{c_i \in C_i} L(x, c) = D(x) - \langle x, y \rangle.$$

Она всюду дифференцируема, и мы далее покажем, что ее минимум достигается в некоторой точке x_0 . Поэтому по теореме 1.3.2

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) &= \max_{c_i \in C_i} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, c) \\ &\text{по (4.3a)} \\ &= \max_{c_i \in C_i} \{ -\langle K^+ y, y \rangle / 2 \} = -f(y). \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что точка минимума x_0 функции $\varphi(x)$ действительно существует, достаточно заметить, что $x_0 \in \partial D^*(y)$ (см. [39, теорема 23.5]). Поскольку функция $D(x)$ однородна степени два, то сопряженная функция $D^*(y)$ тоже однородна степени два (см. [39, следствие 15.3.1]), так что она конечна на линейном пространстве в $\mathbb{R}^n$. Поэтому она субдифференцируема в каждой точке y , где она конечна [39]:

$$(4.9) \quad x_0 \in \partial D^*(y) \neq \emptyset, \quad \text{если } D^*(y) \neq +\infty.$$

Теперь (4.8) становится $D^*(y) = f(y)$, если $D^*(y) \neq +\infty$. Но когда $D^*(y) = +\infty$, это тоже верно, ибо $\min \max \geq \max \min$. Таким образом, функция $f(y) \equiv D^*(y)$ выпукла, так как $D^*(y)$ является верхней гранью линейных функций.

Следующий результат будет играть ключевую роль в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1.4.2. Пусть $\mathcal{D}$ будет компактным выпуклым множеством неотрицательно определенных матриц порядка n , C_i , $i = 1, \dots, k$, — компактные выпуклые и центрально симметричные множества в $\mathbb{R}^n$ и

$$(4.9a) \quad \mathcal{L} := \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{N}(K) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid D(x) = 0\}$$

будет пересечением ядер всех матриц из множества (4.2). Тогда сопряженная к функции (4.3) имеет вид

$$(4.10) \quad D^*(y) = \begin{cases} \min_{K \in \mathcal{K}} \langle K^+ y, y \rangle / 2, & y \in \mathcal{L}^\perp, \\ +\infty, & y \notin \mathcal{L}^\perp. \end{cases}$$

Для фиксированного вектора $y \in \mathcal{L}^\perp$ матрица $K_y \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда будет решением вспомогательной задачи (4.10), когда

$$(4.11) \quad \langle K_y x_y, x_y \rangle = \max_{K \in \mathcal{K}} \langle K x_y, x_y \rangle$$

для вектора x_y такого, что $K_y x_y = y$. В этом случае

$$(4.12) \quad D^*(y) = D(x_y), \quad x_y \in \partial D^*(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим одноточечное множество $\mathcal{D} = \{D\}$ и любые множества C_i . Тогда существуют непрерывные многозначные отображения $\alpha \rightarrow C_i(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, с компактными, строго выпуклыми, центрально симметричными значениями $C_i(\alpha) \supset C_i$, $\alpha \neq 0$, такие, что $C_i(0) = C_i$, $i = 1, \dots, k$. Определим функции $f_\alpha(y)$ заменой множеств C_i в (4.4) на множества $C_i(\alpha)$. По теореме о маргинальном значении (см. [39, предложение 3.21]) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(y) \geq f(y)$. С другой стороны, $\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(y) \leq f(y)$, ибо $C_i(\alpha) \supset C_i$. Как было показано в лемме 1.4.1, функции $f_\alpha(y)$ выпуклы и пн. снизу для $\alpha \neq 0$, поэтому их предел $f(y)$ тоже выпуклый и пн. снизу. Следовательно, в силу (1.1) и (4.6)

$$f(y) = (f^*)^*(y) = D^*(y) := \sup_x \left\{ \langle x, y \rangle - \left[\langle Dx, x \rangle + \sum_{i=1}^k \delta^{*2}(x | C_i) \right] / 2 \right\}.$$

Таким образом, функция $f(D, y) := f(y)$ есть верхняя грань линейных функций. Поэтому она выпукла на множестве $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, ее минимум

$$\varphi(y) := \inf_{D \in \mathcal{D}} f(D, y) = \inf_{K \in \mathcal{K}} \langle K^+ y, y \rangle / 2$$

на компактном, выпуклом множестве $\mathcal{D}$ является выпуклой функцией [45]. Функция $\varphi(y)$ пн. снизу, ибо функция $f(D, y)$ пн. снизу по обеим переменным D и y и отображение (4.7) непрерывно по переменной D на компактном множестве $\mathcal{D}$. По той же причине минимум вверху достигается всякий раз, когда он конечен. Вновь легко проверяется, что $\varphi^*(x) = D(x)$ (как определено в (4.1)), откуда $D^*(y) = \varphi^{**}(y) = \varphi(y)$, как и требовалось в (4.10).

Теперь заметим, что $\langle K^+ y, y \rangle \neq +\infty$, только если $y \in \mathcal{R}(K)$. Поэтому $\text{dom}(D^*) := \{y \mid D^*(y) < +\infty\} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{R}(K)$. Как мы знаем, это множество является линейным пространством в $\mathbb{R}^n$, поэтому [45]

$$\begin{aligned} \text{dom}(D^*) &= [\text{dom}(D^*)]^{**} = \left[\left(\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{R}(K) \right)^* \right]^* = \left[\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{R}^*(K) \right]^* \\ &= \left[\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{R}^\perp(K) \right]^* = \left[\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{N}(K) \right]^* = \mathcal{L}^* = \mathcal{L}^\perp. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство (4.10).

Если $y \in \mathcal{L}^\perp$, то согласно (4.9) существует вектор $x_y \in \partial D^*(y)$. Это эквивалентно равенству

$$(4.13) \quad D(x_y) + D^*(y) = \langle x_y, y \rangle.$$

Поскольку функция $\langle K^+ y, y \rangle$ пн. снизу на компактном множестве $\mathcal{K}$, существует матрица K_y такая, что

$$(4.14) \quad \langle K_y^+ y, y \rangle / 2 = D^*(y), \quad y \in \mathcal{L}^\perp.$$

Тогда (4.3) и (4.13) означают, что

$$(4.15) \quad \langle K_y x_y, x_y \rangle / 2 + \langle K_y^+ y, y \rangle / 2 \leq \langle x_y, y \rangle.$$

Но это возможно только при $K_y x_y = y$.

Чтобы доказать (4.11), достаточно заметить, что если бы левая часть (4.11) была меньше, чем ее правая часть, мы бы получили строгое неравенство в (4.15), противоречие. Первое тождество в (4.12) следует из (4.14) и (4.11):

$$\begin{aligned} 2D^*(y) &= \langle K_y^+ y, y \rangle = \langle K_y^+ K_y x_y, K_y x_y \rangle \\ &= \langle K_y K_y^+ K_y x_y, x_y \rangle = \langle K_y x_y, x_y \rangle = 2D(x_y), \quad y \in \mathcal{L}^\perp. \end{aligned}$$

Наоборот, если (4.11) выполнено для вектора x_y такого, что $K_y x_y = y$, то по теореме о субдифференциале максимума семейства выпуклых функций [19] $y = K_y x_y \in \partial D(x_y)$ и, следовательно, $x_y \in \partial D^*(y)$. Поэтому из (4.13) и (4.11) получаем

$$D^*(y) = \langle x_y, y \rangle - D(x_y) = \langle x_y, y \rangle - \langle K_y x_y, x_y \rangle / 2 = \langle K_y x_y, x_y \rangle / 2.$$

Следовательно, K_y – решение вспомогательной задачи (4.10).

ТЕОРЕМА 1.4.3 [87]. *Если все матрицы из множества (4.2) положительно определены, то функция (4.3) строго выпукла, а ее сопряженная непрерывно дифференцируема, причем $\nabla D^*(y) = x_y = K_y^{-1}y$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.4.4. *Если ядро $\mathcal{L}$ в (4.9а) равно нулю, то*

$$\|x\|_{\mathcal{K}} := \max_{K \in \mathcal{K}} \langle Kx, x \rangle^{1/2} \quad \text{и} \quad \|y\|_{\mathcal{K}}^0 = \min_{K \in \mathcal{K}} \langle K^+ y, y \rangle^{1/2}$$

являются двойственными нормами в $\mathbb{R}^n$.

Это вытекает непосредственно из [39, следствие 15.3.2].

СЛЕДСТВИЕ 1.4.5. *Объединение эллипсоидов*

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \{y \in \mathbb{R}^n : \langle K^+ y, y \rangle \geq 1\}$$

выпукло и компактно, если $\mathcal{L} = \{0\}$.

В самом деле, его можно записать как множество уровня нормы $\{y : \|y\|_{\mathcal{K}}^0 \leq 1\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.6. *Опорная функция $\delta^*(y \mid E)$ пересечения*

$$(4.16) \quad E := \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Kx, x \rangle \leq 1\}$$

эллипсоидов равна

$$(4.16a) \quad \delta^*(y \mid E) = \min_{K \in \mathcal{K}} \langle K^+ y, y \rangle^{1/2}.$$

Это следует из представления $E = \{x : D(x) \leq 1/2\}$ и [45, теорема 13.5].

СЛЕДСТВИЕ 1.4.7. Пусть все матрицы $D \in \mathcal{D}$ невырождены, и пусть

$$(4.17) \quad 2D(x) = \max_{D \in \mathcal{D}} \langle Dx, x \rangle + \|x\|^2, \quad \|x\| := \max_{c \in C} \langle x, c \rangle.$$

Тогда

$$(4.18) \quad 2D^*(y) = \min_{D \in \mathcal{D}, c \in C} \left\{ \langle D^{-1}y, y \rangle - \frac{\langle D^{-1}y, c \rangle^2}{1 + \langle D^{-1}c, c \rangle} \right\},$$

$$(4.19) \quad \nabla D^*(y) = x_y = D_y^{-1}(y - \lambda c_y),$$

где $D_y \in \mathcal{D}$, $c_y \in C$ и $\lambda \geq 0$ удовлетворяют условиям

$$(4.20) \quad \langle D_y x_y, x_y \rangle = \max_{D \in \mathcal{D}} \langle Dx_y, x_y \rangle, \quad c_y \in \partial \|x_y\|,$$

$$(4.21) \quad \lambda = \|x_y\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.7)

$$(4.22) \quad K^{-1} = D^{-1} - D^{-1}c(D^{-1}c)^T / (1 + \langle D^{-1}c, c \rangle),$$

что влечет за собой (4.18). Тогда правая часть (4.12) принимает вид (4.19), где λ обозначает число

$$(4.23) \quad \lambda = \langle D_y^{-1}c_y, y \rangle / (1 + \langle D_y^{-1}c_y, c_y \rangle).$$

Далее, в случае (4.17) уравнение (4.11) сводится к (4.20), так что остается доказать (4.21). Для этого воспользуемся равенством $\|x_y\| = \langle c_y, x_y \rangle$ [45]. После простого вычисления, использующего (4.19) и (4.23), последняя величина принимает вид (4.23).

СЛЕДСТВИЕ 1.4.8. Если $2D(x) = |x|^2 + \|x\|^2$, то

$$2D^*(y) = |y|^2 - \max_{c \in C} \frac{\langle y, c \rangle^2}{1 + |c|^2}, \quad \nabla D^*(y) = x_y = y - \lambda c_y,$$

где величины c_y и λ удовлетворяют условиям (4.20), (4.21).

Результаты §1.4 обобщают соответствующие результаты работы [87] на случай вырожденных матриц. Они позволяют взглянуть на некоторые известные результаты с новой точки зрения. Отправной точкой здесь является тот неожиданный факт, что любое замкнутое, выпуклое, центрально симметричное множество E можно представить как пересечение эллипсоидов по меньшей мере тремя разными способами.

ТЕОРЕМА 1.4.9. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ будет выпуклым, замкнутым, центрально симметричным множеством и E^0 будет его полярой. Определим матричные множества

$$\mathcal{K}_0 := \{K = yy^T, y \in E^0\}, \quad \mathcal{K}_1 := \text{conv } \mathcal{K}_0, \quad \mathcal{K}_2 := \{K \geq 0 \mid \langle Ke, e \rangle \leq 1 \ \forall e \in E\}.$$

Тогда $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$ и любое множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}_i$ подойдет для представления (4.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $E^{00} = E$, т.е.

$$(4.24) \quad E = \{e \in \mathbb{R}^n : \langle e, y \rangle \leq 1 \ \forall y \in E^0\}.$$

Поскольку поляр E^0 центрально-симметрична, то

$$(4.25) \quad E = \{e \in \mathbb{R}^n : \langle e, y \rangle^2 \leq 1 \ \forall y \in E^0\}.$$

Это дает (4.16) для матричного множества $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$.

Очевидно, $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1$. Покажем, что $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$. С этой целью рассмотрим любую матрицу $K = yy^T$, $y \in E^0$, принадлежащую множеству $\mathcal{K}_0$. Тогда $\langle Ke, e \rangle = \langle e, y \rangle^2 \leq 1 \ \forall e \in E$. Поскольку $\langle Ke, e \rangle = \langle e, y \rangle^2 \geq 0$ для любого $e \in \mathbb{R}^n$, то $K \geq 0$. Поэтому $K \in \mathcal{K}_2$ для любой матрицы $K \in \mathcal{K}_0$, т.е. $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_2$. Множество $\mathcal{K}_2$ выпукло, поэтому оно содержит выпуклые комбинации матриц из множества $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_2$, так что $\mathcal{K}_1 := \text{conv } \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_2$.

Итак, $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$ и (4.16) выполнено с $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$. Легко понять, что остается проверить равенство (4.16) для матричного множества $\mathcal{K}_2$. Пусть F обозначает правую часть (4.16) с $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2$. Если $e \in E$, то $e \in F$ по определению множества F . Наоборот, пусть $e \in F$. Как было показано выше, для любого $y \in E^0$ матрица $K = yy^T$ принадлежит множеству $\mathcal{K}_2$. Поэтому $\langle Ke, e \rangle = \langle e, y \rangle^2 \leq 1 \ \forall y \in E^0$, и ввиду (4.25) мы имеем $e \in E$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.10. Поляр E^0 можно заменить в теореме 1.4.9 на множество всех ее крайних точек, если она ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выпуклое множество C компактно, то $[45] C = \text{conv ext } C$, где $\text{ext } C$ обозначает множество всех крайних точек множества C . Поэтому можно переписать (4.24) как

$$(4.26) \quad \begin{aligned} E &= \{e \in \mathbb{R}^n : \delta^*(e \mid E^0) \leq 1\} \\ &= \{e \in \mathbb{R}^n : \delta^*(e \mid \text{ext } E^0) \leq 1\} \\ &= \{e \in \mathbb{R}^n : \langle e, y \rangle^2 \leq 1 \ \forall y \in \text{ext } E^0\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.11. Множество $\mathcal{K}_2$ дает все эллипсоиды $\langle Ke, e \rangle \leq 1$, описанные вокруг множества E .

СЛЕДСТВИЕ 1.4.12. Пусть $\mathcal{K}$ будет любым из матричных множеств $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ или даже $\mathcal{K}_3 := \text{conv}\{K = yy^T \mid y \in \text{ext } E^0\}$, когда поляра E^0 ограничена. Тогда справедлива формула (4.16а).

Случай $\mathcal{K} = \mathcal{K}_i, i = 1, 2, 3$, в чуть иной форме получены В. Б. Меласом [38]. При $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ (4.16а) превращается в хорошо известное равенство [45]

$$(4.27) \quad \delta^*(y \mid E) = \inf_{\mu > 0} \{\mu \mid y \in \mu E^0\}.$$

Важный вопрос – является ли сопряженная функция $D^*(y)$ всюду конечной? Если ответ отрицателен, то двойственная задача (2.2.3) из главы 2 будет содержать неявные ограничения. Согласно теореме 1.4.2 это не так, если множество $\mathcal{L}$, определенное в (4.9а), равно нулю. Очевидно, $\mathcal{L} = \{0\}$, если множество $\mathcal{K}$ содержит невырожденную матрицу. Следующий результат показывает, что когда множество $\mathcal{K}$ выпукло, существование невырожденной матрицы $K \in \mathcal{K}$ необходимо и достаточно для того, чтобы сопряженная функция $D^*(y)$ была всюду конечной.

ТЕОРЕМА 1.4.13. Пусть $\mathcal{K}$ будет выпуклым множеством неотрицательно определенных матриц, для которых множество (4.9а) равно нулю. Тогда существует положительно определенная матрица $K \in \mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В противном случае выпуклое множество $\mathcal{K}$ и выпуклый конус положительно определенных матриц не пересекаются. По теореме отделимости [2], [45] существует симметрическая матрица $A \neq 0$ такая, что

$$(4.28) \quad \inf_{P > 0} \langle A, P \rangle \geq \sup_{K \in \mathcal{K}} \langle A, K \rangle,$$

где

$$(4.29) \quad \langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{Sp } AB^T$$

обозначает скалярное произведение прямоугольных матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Как известно [9],

$$(4.30) \quad A \geq 0, B \geq 0, \langle A, B \rangle = 0 \implies AB = 0;$$

$$(4.31) \quad A \geq 0 \iff \langle A, B \rangle \geq 0 \forall B \geq 0.$$

Поскольку правая часть (4.28) конечна, то $A \geq 0$ и левая часть равна нулю. Поэтому $\langle A, K \rangle \leq 0 \forall K \in \mathcal{K}$, так что ввиду (4.31) $\langle A, K \rangle = 0 \forall K \in \mathcal{K}$.

Согласно (4.30) это означает, что $AK = 0 \forall K \in \mathcal{K}$. Поскольку $A \neq 0$, матрица A имеет ненулевую строку x , и мы получаем из последнего равенства $Kx = 0 \forall K \in \mathcal{K}$, т.е. $0 \neq x \in \mathcal{L}$, противоречие.

§ 1.5. Двойственность невыпуклых экстремальных задач в случае гладкости двойственной задачи

1.5.1. Рокафелларова схема двойственности. В этой схеме рассматривается функционал

$$(5.1) \quad g(y) := \inf_{x \in X} \Phi(x, y),$$

где $\Phi(x, y): X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – произвольная (невыпуклая) функция. Исходная задача заключается в минимизации (5.1) при $y = 0$. В двойственной задаче нужно найти минимум

$$(5.2) \quad g^{**}(0) = - \inf_{y^* \in Y^*} g^*(y^*),$$

где

$$g^*(y^*) = \sup_{x \in X} \Phi_x^*(y^*), \quad \Phi_x(y) := \Phi(x, y).$$

Предположим, что маргинальная функция (5.1) (слабо) пн. снизу. Для этого достаточно, например, потребовать, что X – компакт и функция $\Phi(x, y)$ пн. снизу на $X \times Y$ (Y снабжается слабой топологией, если используется производная Гато).

ТЕОРЕМА 1.5.1. *Если функция $g^*(y^*): Y^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (Гато) Фреше-дифференцируема в точке своего минимума $\bar{y}^*$, то справедлива двойственность (1.2). Элемент $\bar{x} \in X$ тогда и только тогда дает глобальное решение задачи (5.1), когда $\Phi(\bar{x}, 0) + g^*(\bar{y}^*) = 0$ [47].*

1.5.2. Лагранжева схема двойственности. Пусть

$$(5.3) \quad g(y) = \min_{x \in X} \{f_0(x) \mid F(x) + y = 0\},$$

где Y – локально выпуклое топологическое векторное пространство, функция $f_0(x): X \rightarrow \mathbb{R}$ пн. снизу, а функция $F(x): X \rightarrow Y$ непрерывна на компактном топологическом пространстве X .

ТЕОРЕМА 1.5.2. *Если двойственная задача (5.2), где*

$$(5.4) \quad g^*(y^*) = - \min_{x \in X} L(x, y^*), \quad L(x, y^*) := f_0(x) + \langle y^*, F(x) \rangle,$$

имеет решение $\bar{y}^$ такое, что абсолютный минимум (5.4) лагранжиана $L(\cdot, \bar{y}^*)$ достигается на единственном элементе $\bar{x} \in X$, то справедлива двойственность (1.2). В этом случае элемент $\bar{x}$ дает абсолютное решение исходной задачи (5.3) для $y = 0$ [47].*

ЗАМЕЧАНИЕ. Когда исходная задача содержит также ограничения типа неравенств

$$(5.5) \quad f_i(x) + y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где $f_i(x): X \rightarrow \mathbb{R}$ пн. снизу функции, сопряженная функция $g^*(y^*)$ равняется (5.4), если $y_i^* \geq 0, i = 1, \dots, k$; иначе она бесконечна. Тем не менее, теорема 1.5.2 остается справедлива в той же самой формулировке [87].

Для квадратичных задач аналогичные результаты получены Н.З. Шором [63], [64].

1.5.3. ПРИМЕРЫ. 1) В некоторых задачах автоматического управления и теории операторных пучков [1], [59] встречается задача (5.3), (5.5) в случае $f_i(x) = \langle C_i x, x \rangle$, $i = 0, 1, \dots, m$, $A = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$. Двойственная задача (5.2) состоит в максимизации минимального собственного числа матричного пучка

$$(5.6) \quad C(y^*) := C_0 + y_1^* C_1 + \dots + y_m^* C_m$$

по переменным $y^* \in \mathbb{R}^m$, $y_i^* \geq 0$, $i = 1, \dots, k$. Если эта задача имеет решение $y^* = \bar{y}^*$, причем минимальное собственное число матрицы $C(\bar{y}^*)$ является простым, то согласно теореме 1.5.2 соответствующий ему нормированный собственный вектор дает глобальное решение исходной задачи (5.3), (5.5).

Любопытно, что недавно этот пример встретился также в теории оптимального планирования эксперимента [85].

2) Пусть в задаче (5.3), (5.5) $f_i(x) = \langle C_i x, x \rangle / 2 - \langle a_i, x \rangle - b_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, $A = \mathbb{R}^n$. Тогда сопряженная функция (5.4) конечна лишь для тех векторов y^* , для которых оператор (5.6) неотрицательно определен и его образ содержит вектор $a(y^*) := a_0 + y_1^* a_1 + \dots + y_m^* a_m$. Теорема 1.5.2 с последующим замечанием дают результат, полученный в работе [63]: если решение $y^* = \bar{y}^*$ двойственной задачи (5.2) удовлетворяет условиям $\bar{y}_i^* > 0$, $i = 1, \dots, k$, $C(\bar{y}^*) > 0$, то $\bar{x} = C^{-1}(\bar{y}^*)a(\bar{y}^*)$ – глобальное решение исходной задачи (5.3), (5.5).

Из многочисленных работ, посвященных теории двойственности, отметим [1], [2], [4], [19], [21], [26], [39], [42]–[47], [59], [64], [65], [69], [76], [77], [87], [96], [100].

Глава 2.

Минимаксное оценивание параметров в линейных моделях наблюдения с неопределенными статистиками второго порядка

§ 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную модель

$$(1.1) \quad \eta = A\theta + \xi, \quad l = C^T \theta,$$

в которой $\eta \in \mathbb{R}^N$ – вектор измерений, $\theta \in \mathbb{R}^m$ – вектор неизвестных параметров, $l \in \mathbb{R}^r$ – оцениваемый вектор, ξ – вектор случайных ошибок, имеющий среднее $\mathbb{E}\xi$ и ковариационную матрицу $K := \text{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T$, которые принадлежат априорно известному множеству $\mathcal{E}_0 \subset \mathbb{R}^N$ и множеству $\mathcal{K}$ положительно определенных матриц порядка N :

$$(1.2) \quad \mathbb{E}\xi \in \mathcal{E}_0, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Предполагается, что множество $\mathcal{K}$ ковариационных матриц K имеет вид

$$(1.3) \quad \mathcal{K} = \left\{ K = D + \sum_{i=1}^k e_i e_i^T \mid D \in \mathcal{D}, e_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, k \right\}$$

(см. [5]), который возникает, например, когда суммарная ошибка ξ может быть разбита на сумму $\xi = \xi_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_k e_k$ некоррелированных слагаемых $\xi_0, \varepsilon_1 e_1, \dots, \varepsilon_k e_k$, если векторы $e_i \in \mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, k$, не случайны, и выполнены условия $\mathbb{E}\xi_0 \in \mathcal{E}_0$, $\text{cov}(\xi_0, \xi_0) \in \mathcal{D}$, $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, k$ (здесь ξ_0 – ошибка общей природы, а $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ – стандартный белый шум). Будем считать, что все множества $\mathcal{E}_i \subset \mathbb{R}^N$ и $\mathcal{D}$ выпуклы, замкнуты и ограничены, причем множества $\mathcal{E}_i$, $i = 0, \dots, k$, центрально-симметричны, и что матрица A имеет полный ранг $m \leq N$.

Сначала мы будем рассматривать линейные оценки $\hat{l} = (\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_r)$, $\hat{l}_j = \langle \eta, x_j \rangle$, $x_j \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, r$, заданного параметра $l = C^T \theta \in \mathbb{R}^r$, которые имеют ошибки $\delta l_j = \hat{l}_j - l_j = \langle A^T x_j - c_j, \theta \rangle + \langle \xi, x_j \rangle$, $j = 1, \dots, r$, где через $c_j \in \mathbb{R}^m$ обозначены векторы-столбцы матрицы $C = (c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^{mr}$. Максимальное (гарантированное) значение

$$(1.4) \quad 2D(X) := \sup_{\theta, \xi} \mathbb{E}|\delta l|^2, \quad X := (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^{Nr},$$

среднеквадратичной ошибки $\mathbb{E}|\delta l|^2$ будет конечным при условии $A^T X = C$. В этом случае

$$(1.5) \quad 2D(X) = \max_{B \in \mathcal{B}} \sum_{j=1}^r \langle B x_j, x_j \rangle = \max_{B \in \mathcal{B}} \langle B X, X \rangle,$$

где $\mathcal{B}$ – априорное множество матриц вторых моментов вектора ξ

$$(1.6) \quad \mathcal{B} = \left\{ B = D + \sum_{i=0}^k e_i e_i^T \mid D \in \mathcal{D}, e_i \in \mathcal{E}_i, i = 0, \dots, k \right\}$$

(в дальнейшем удобно использовать для всех переменных матричные обозначения. Будем считать, что матрицы $X, Y \in \mathbb{R}^{Nr}$, имеющие по N строк и r столбцов, лежат в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{Nr}$ со скалярным произведением (1.4.29)). Чтобы найти минимаксную оценку $\hat{l}_* = X_*^T \eta$, нужно решить задачу

$$(1.7) \quad \delta_{\min}^2 / 2 := \min \{ D(X) : X \in \mathbb{R}^{Nr}, A^T X = C \}.$$

§ 2.2. Теорема двойственности

В §§ 2.2, 2.3 мы будем предполагать, что либо оценивается скалярный параметр l , либо ошибки наблюдений не содержат систематических составляющих $\varepsilon_i e_i$.

ЛЕММА 2.2.1. Пусть либо $l \in \mathbb{R}$, либо множество $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ компактно и выпукло. Тогда сопряженная функция $D^*(Y)$ непрерывно дифференцируема и может быть записана в форме

$$(2.1) \quad D^*(Y) = \min_{B \in \mathcal{B}} \langle B^{-1} Y, Y \rangle / 2.$$

Для фиксированного вектора $Y = (y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{R}^{Nr}$ матрица $B_Y \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда дает решение вспомогательной задачи (2.1), когда она дает решение задачи (1.5) для вектора $X_Y = B_Y^{-1} Y$. В этом случае

$$(2.2) \quad D^*(Y) = D(X_Y), \quad \nabla D^*(Y) = X_Y = B_Y^{-1} Y.$$

Доказательство следует из теорем 1.4.2 и 1.4.3.

Помимо матрицы $C = (c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^{mr}$ мы будем также рассматривать матрицы $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^{mr}$, где $\theta_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, m$.

ТЕОРЕМА 2.2.2. *Справедливо равенство*

$$(2.3) \quad -\sigma_{\min}^2/2 = \min_{\Theta \in \mathbb{R}^{mr}} \{D^*(A\Theta) - \langle C, \Theta \rangle\}.$$

Если Θ_* – решение двойственной задачи (2.3), то вектор

$$(2.4) \quad X_* = \nabla D^*(A\Theta_*)$$

является единственным решением исходной задачи (1.5)–(1.7) [88].

Доказательство следует из стандартной теоремы двойственности выпуклого программирования [2], [42].

Таким образом, вместо исходной негладкой задачи (1.7), в которой может быть очень много переменных, удобно перейти к двойственной задаче (2.3), в которой сопряженная функция $D^*(Y): \mathbb{R}^{Nr} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и для ряда практически важных случаев статистических ограничений вычислена аналитически (см. [48], [50]). В этих случаях двойственная задача (2.3) заключается в безусловной минимизации эффективно вычисляемой гладкой выпуклой функции вектора состояния, имеющей небольшую размерность (обычно $m \ll N$). В [50], [52], [88] описаны несколько алгоритмов построения итерационных последовательностей $\{\Theta_s\}$, $s = 0, 1, \dots$, дающих решение двойственной задачи (2.3).

§ 2.3. Минимаксные оценки и метод наименьших квадратов

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть либо $l \in \mathbb{R}$, либо множество $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ компактно и выпукло и $\hat{l}_* = \mathcal{X}_*^T \eta$, где

$$(3.1) \quad \mathcal{X}_* = B_*^{-1} A (A^T B_*^{-1} A)^{-1} C$$

– МНК-оценщик, соответствующий весовой матрице $B_* \in \mathcal{B}$ и имеющий среднеквадратичную ошибку

$$(3.2) \quad \mathbb{E}|\delta l_*|^2 = \max_{B \in \mathcal{B}} \langle (A^T B^{-1} A)^{-1} C, C \rangle.$$

Тогда $\sigma_{\min}^2 = \mathbb{E}|\delta l_*|^2$, оценщик $\mathcal{X}_*$ является решением минимаксной задачи (1.5)–(1.7), а вектор

$$(3.3) \quad \Theta_* = (A^T B_*^{-1} A)^{-1} C$$

является решением двойственной задачи (2.3). И наоборот, если вектор Θ_* – решение двойственной задачи (2.3), а матрица B_* – решение вспомогательной задачи (2.1), вычисленное для вектора $Y = A\Theta_*$, то B_* – наименее благоприятная матрица вторых моментов (решение задачи (3.2)) и справедливы равенства (3.1), (3.3) [88].

Доказательство вытекает из теоремы двойственности (2.3) и равенства (2.1) (см. [88]).

Эта теорема является обобщением теоремы Гаусса–Маркова (по-видимому, связь минимаксных оценок с методом наименьших квадратов впервые была замечена еще Вальдом [90]; см. также [70], [78], [81], [84]). Для случая, когда $\mathcal{E}_j = \{0\}$, $j = 0, \dots, r$, близкие задачи рассматривались И. Ф. Пинелисом [41].

§ 2.4. Линейность минимаксных оценок

Как известно, в задачах минимаксного оценивания можно ограничиться линейными алгоритмами, если ошибки измерений не случайны (см. работы Н. С. Бахвалова [6], А. Б. Куржанского [26] и других [12], [13], [34]–[36], [79], [80], [83], [99]). Здесь этот результат устанавливается для скалярного оцениваемого параметра l и случайных ошибок измерений, имеющих ковариационную матрицу из априорного класса (1.3).

Введем обозначение $\Xi = \{\xi : \mathbb{E}\xi = 0, \mathbb{E}\xi\xi^T \in \mathcal{B}\}$. Для любой нелинейной оценки $\hat{l}(\eta)$ параметра l гарантированное значение среднеквадратичного отклонения $\mathbb{E}(\delta l^2)$ ошибки $\delta l = \hat{l} - l$ равно

$$(4.1) \quad D(\hat{l}) := \sup\{\mathbb{E}(\delta l^2) \mid \eta = A\theta + \xi, \xi \in \Xi, \theta \in \mathbb{R}^m\},$$

и задача отыскания оптимального алгоритма минимаксного оценивания в классе нелинейных оценок принимает вид

$$(4.2) \quad D_{\min} := \inf_{\hat{l}(\cdot)} D(\hat{l}).$$

В дальнейшем в (4.2) будут рассматриваться только те оценки $\hat{l}(\eta)$, для которых выполнены условия регулярности (см. [16, с. 252]) в неравенстве Рао–Крамера для всех нормальных распределений $\eta \sim \mathcal{N}(A\theta, B)$, $B \in \mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 2.4.1. Пусть $l = c^T \theta \in \mathbb{R}$, $\xi \in \Xi$ и $\mathcal{E}_0 = \{0\}$. Тогда

$$(4.3) \quad D_{\min} = \max_{B \in \mathcal{B}} c^T (A^T B^{-1} A)^{-1} c.$$

Решение задачи (4.1)–(4.2) достигается на линейной оценке

$$(4.4) \quad \hat{l}_* = c^T (A^T B_*^{-1} A)^{-1} A^T B_*^{-1} \eta,$$

соответствующей обобщенному методу наименьших квадратов с весовой матрицей $B_* \in \mathcal{B}$, которая дает решение задачи (4.3). При этом наименее благоприятно нормальное распределение $\xi \sim \mathcal{N}(0, B_*)$ [51].

В [7], [88] рассматривался класс $\mathcal{P}_1$ всех распределений вектора ξ , удовлетворяющих ограничениям (1.2). В классе линейных оценок минимаксная оценка зависит только от матрицы вторых моментов $B = \mathbb{E}_P \xi \xi^T$, которая принадлежит множеству (1.6). Оказывается, что если ввести более широкий класс $\mathcal{P}_2$ всех распределений $P(x)$, удовлетворяющих ограничению $\mathbb{E}_P \xi \xi^T \in \mathcal{B}$ с априорно заданным множеством $\mathcal{B}$ вида (1.6) (распределения из классов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ имеют одни и те же матрицы вторых моментов), то минимаксная оценка тоже будет линейной.

ТЕОРЕМА 2.4.2. Пусть $l = c^T \theta \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \Xi = \{\xi : \mathbb{E} \xi \xi^T \in \mathcal{B}\}$. Тогда справедливо равенство (4.3). Решение задачи (4.1)–(4.2) достигается на линейной оценке (4.4) с весовой матрицей $B_* \in \mathcal{B}$, которая дает решение задачи (4.3). При этом наименее благоприятным является нормальное распределение $\xi \sim \mathcal{N}(0, B_*)$.

Доказательства теорем 2.4.1, 2.4.2 опираются на неравенство Рао–Крамера и теорему 2.3.1 (см. [51], где рассмотрен случай выпуклого множества $\mathcal{B} = \mathcal{D}$). Для задачи о наихудшей корреляции линейность минимаксной оценки установлена А. И. Матазовым [37]. В стохастических постановках фундаментальную роль играет теорема о нормальной корреляции [33], [53], [89].

Для априорного класса $\mathcal{P}_1$ вопрос о линейности оценок остается открытым (нужно заметить, что в близких задачах ответ отрицателен [72], [75]). Дальнейшая литература к главе 2: [3], [7], [8], [10], [11], [14], [17], [18], [20], [22]–[28], [30]–[33], [40], [41], [52], [60], [61], [70], [71], [74], [78], [84], [86]–[90].

Глава 3.

Приложения к теории плохо обусловленных задач

§3.1. Постановка задачи

Теперь мы будем рассматривать задачу восстановления параметра $l = \langle c, \theta \rangle$ из вектора данных $\eta = A\theta + \xi$. Эта задача *плохо обусловлена*, если отношение наибольшего к наименьшему сингулярному числу матрицы A велико. В этом случае малые ошибки в векторе данных η могут привести к большим ошибкам в векторе регрессионных коэффициентов θ . Общий способ уменьшения этих ошибок заключается в использовании априорной информации $\theta \in \Theta$.

Предполагается, что вектор случайных ошибок $\xi \in \mathbb{R}^N$ удовлетворяет априорным ограничениям $\mathbb{E} \xi = 0$, $K = \mathbb{E} \xi \xi^T \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – это матричное множество (2.1.3), состоящее из положительно определенных матриц порядка N . Здесь и далее мы будем рассматривать линейные оценки $\hat{l} = \langle x, \eta \rangle + t$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, заданного скалярного параметра $l = \langle c, \theta \rangle$, $c \in \mathbb{R}^m$, которые имеют ошибку $\delta l := \hat{l} - l = \langle x, \xi \rangle + \langle A^T x - c, \theta \rangle + t$. Максимальное (гарантированное) значение (2.1.4) среднеквадратичной ошибки $\mathbb{E} \delta l^2$ равно

$$(1.1) \quad d(\hat{l}) = \max_{K \in \mathcal{K}} \langle Kx, x \rangle + \max_{\theta \in \Theta} (\langle A^T x - c, \theta \rangle + t)^2.$$

Чтобы найти минимаксную оценку $\hat{l}_* = \langle x_*, \eta \rangle + t_*$, нужно решить задачу

$$(1.2) \quad D_{\min} = \min_{\hat{l} = \langle x, \eta \rangle + t} d(\hat{l}).$$

Стоит отметить, что регрессионная матрица A произвольна. Вполне может быть, что $N < m$, но даже если $N \geq m$, информационная матрица $A^T K^{-1} A$ может быть вырожденной. Случай квадратных регрессионных матриц встречается при решении

линейных алгебраических систем $A\theta = y$. Они возникают также после дискретизации линейных интегральных уравнений, так что результаты главы 3 можно использовать в весьма разных областях (см. [58]).

Существует обширная теория плохо обусловленных задач в гильбертовых и даже банаховых пространствах, включающая рассмотрение задач оценивания скалярных и векторных параметров в терминах минимакса (наиболее близкими по постановкам и методам работами являются [29], [58]). Но, как отмечается в работах А.М. Федотова [58] и И.А. Ибрагимова и Р.З. Хасьминского [17], [18], им не удалось доказать соответствующие результаты, используя стандартные теоремы о минимаксе. В нашей работе используются теоремы о минимаксе, доказанные в главе 1.

§ 3.2. Теорема двойственности

Сначала мы сосредоточимся на случае центрально-симметричного множества Θ . Все множества $\mathcal{D}, \mathcal{E}_i$ в (2.1.3), а также множество Θ предполагаются выпуклыми и компактными, причем множества $\mathcal{E}_i$ симметричны относительно нуля.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Справедлива двойственность*

$$(2.1) \quad D_{\min} = \max_{K \in \mathcal{K}, \theta \in \Theta} \frac{\langle c, \theta \rangle^2}{1 + \langle K^{-1}A\theta, A\theta \rangle}.$$

Если $K_* \in \mathcal{K}$, $\theta_* \in \Theta$ – решение двойственной задачи (2.1), то

$$(2.2) \quad \hat{l}_* = \frac{\langle c, \theta_* \rangle}{1 + \langle K_*^{-1}A\theta_*, A\theta_* \rangle} \langle K_*^{-1}A\theta_*, \eta \rangle$$

– это решение исходной задачи (1.1)–(1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим вектор $x_0 := c - A^T x \in \mathbb{R}^m$. При фиксированных $x \in \mathbb{R}^N$ минимум функции (1.1) по переменной $t \in \mathbb{R}$ достигается при $t_* = 0$. Действительно, поскольку множество Θ симметрично относительно нуля и

$$\langle x_0, \theta \rangle^2 \leq \max[(t - \langle x_0, \theta \rangle)^2, (t + \langle x_0, \theta \rangle)^2],$$

то

$$\max_{\theta \in \Theta} \langle x_0, \theta \rangle^2 \leq \max_{\theta \in \Theta} (t - \langle x_0, \theta \rangle)^2$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому исходная задача (1.2) принимает вид

$$(2.3) \quad D_{\min}/2 = \min_{x, x_0} \{D(x) + D_0(x_0) \mid A^T x + x_0 = c\},$$

где

$$2D(x) := \max_{K \in \mathcal{K}} \langle Kx, x \rangle, \quad 2D_0(x_0) := \max_{\theta \in \Theta} \langle x_0, \theta \rangle^2 = \delta^{*2}(x_0 \mid \Theta).$$

Теперь можно воспользоваться теоремой 2.2.2:

$$(2.4) \quad D_{\min}/2 = \max_{q \in \mathbb{R}^m} \{\langle c, q \rangle - D^*(Aq) - D_0^*(q)\},$$

где согласно теореме 1.4.2 и следствию 1.4.12

$$(2.5) \quad 2D_0^*(q) = \min_{\theta \in \Theta} \langle (\theta\theta^T)^+ q, q \rangle,$$

$$(2.6) \quad 2D^*(y) = \min_{K \in \mathcal{K}} \langle K^{-1}y, y \rangle.$$

Поскольку $(\theta\theta^T)^+ = \theta\theta^T / \langle \theta, \theta \rangle^2$, а образ матрицы $\theta\theta^T$ состоит из векторов $q = \lambda\theta$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} D_{\min}/2 &= \max_{q=\lambda\theta} \max_{K \in \mathcal{K}, \theta \in \Theta} \{ \langle c, q \rangle - \langle K^{-1}Aq, Aq \rangle / 2 - \langle \theta, q \rangle^2 / (2\langle \theta, \theta \rangle^2) \} \\ &= \max_{K \in \mathcal{K}, \theta \in \Theta} \max_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \lambda \langle c, \theta \rangle - \lambda^2 \langle K^{-1}A\theta, A\theta \rangle / 2 - \lambda^2 / 2 \}. \end{aligned}$$

При фиксированных $K \in \mathcal{K}$ и $\theta \in \Theta$ последний максимум достигается при $\lambda = \frac{\langle c, \theta \rangle}{1 + \langle K^{-1}A\theta, A\theta \rangle}$, что дает (2.1).

Если $K_* \in \mathcal{K}$, $\theta_* \in \Theta$ – решение двойственной задачи (2.1), то из доказанного следует, что вектор

$$(2.7) \quad q_* = \lambda_* \theta_* = \frac{\langle c, \theta_* \rangle}{1 + \langle K_*^{-1}A\theta_*, A\theta_* \rangle} \theta_*$$

дает решение задачи (2.4). Тогда, как и в теореме 2.2.2, векторы

$$x_* = \nabla D^*(Aq_*) = K_*^{-1}Aq_*, \quad x_0^* = c - A^T x_*$$

являются решением исходной задачи (2.3). Ввиду равенства (2.7) это дает (2.2).

Теорема 3.2.1 является обобщением одного важного результата, принадлежавшего И. А. Ибрагимову и Р. З. Хасьминскому [17], [18], а также А. М. Федотову [58], на задачи минимаксного оценивания с неопределенными статистиками второго порядка. Она обеспечивает многие возможности для конструирования численных алгоритмов, которые будут обсуждены в другой работе.

§ 3.3. Оценка Кука–Ольмана

3.3.1. Неопределенные статистики второго порядка. Особо интересен случай, когда Θ – это эллипсоид

$$(3.1) \quad \{ \theta \in \mathbb{R}^m \mid \langle T^{-1}\theta, \theta \rangle \leq 1 \}.$$

Кукс и Ольман показали [23]–[25], что в этом случае минимаксной будет оценка $\hat{l}_* = \langle c, \hat{\theta}_* \rangle$, в которой вектор параметров

$$(3.2) \quad \hat{\theta}_* = (A^T K^{-1} A + T^{-1})^{-1} A^T K^{-1} \eta$$

не зависит от оцениваемого скалярного параметра $l = \langle c, \theta \rangle$. Другое замечательное свойство оценки (3.2) состоит в том, что она совпадает с байесовской оценкой.

Неожиданный результат, принадлежащий В.Б. Меласу [38], состоит в том, что и для произвольного выпуклого, центрально симметричного тела Θ минимаксная оценка является *оценкой Кукса–Ольмана*, связанной с некоторым эллипсоидом (3.1), описанным вокруг множества Θ . Помимо рассмотрения неопределенных статистик случайных ошибок мы обобщаем этот результат в двух направлениях. Сначала мы будем рассматривать априорное множество

$$(3.3) \quad \Theta = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \{\theta \in \mathbb{R}^m : \langle T^{-1}\theta, \theta \rangle \leq 1\},$$

которое является объединением всех эллипсоидов (3.1), когда T пробегает матричное множество

$$(3.4) \quad \mathcal{T} := \left\{ T = T_0 + \sum_{i=1}^{k_0} c_i c_i^T : T_0 \in \mathcal{T}_0, c_i \in C_i, i = 1, \dots, k_0 \right\}.$$

Затем мы примем в качестве априорного множества пересечение

$$(3.5) \quad \Theta = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} \{\theta \in \mathbb{R}^m : \langle T\theta, \theta \rangle \leq 1\}$$

всех эллипсоидов $\langle T\theta, \theta \rangle \leq 1$ с матрицами T , пробегающими множество (3.4). Мы покажем, что в обоих случаях минимаксная оценка может рассматриваться как оценка Кукса–Ольмана, связанная с некоторыми матрицами $K \in \mathcal{K}$ и $T \in \mathcal{T}$.

Отсюда следует, что минимаксная оценка всегда является оценкой Кукса–Ольмана, поскольку, как было показано в теореме 1.4.9, любое замкнутое, выпуклое, центрально симметричное тело Θ можно представить в виде (3.5) по меньшей мере тремя различными способами.

Здесь и далее мы будем предполагать, что все множества $\mathcal{T}_0$, C_i в (3.4) выпуклы и компактны, множества C_i симметричны относительно нуля и все матрицы $T_0 \in \mathcal{T}_0$ неотрицательно определены.

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Пусть априорное множество Θ имеет вид (3.3), а все матрицы T в множестве (3.4) невырождены. Тогда справедлива двойственность*

$$(3.6) \quad D_{\min} = \max_{K \in \mathcal{K}, T \in \mathcal{T}} \langle (A^T K^{-1} A + T^{-1})^{-1} c, c \rangle.$$

Если $K_ \in \mathcal{K}$, $T_* \in \mathcal{T}$ – решение задачи (3.6), то оценка Кукса–Ольмана*

$$(3.7) \quad \hat{l}_* = \langle c, \hat{\theta}_* \rangle, \quad \hat{\theta}_* = (A^T K_*^{-1} A + T_*^{-1})^{-1} A^T K_*^{-1} \eta,$$

является решением исходной задачи (1.1)–(1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1.4.5 априорное множество (3.3) центрально симметрично, компактно и выпукло. После замены переменных

$$(3.8) \quad \theta' = \theta / (1 + \langle K^{-1} A \theta, A \theta \rangle)^{1/2}, \quad \theta = \theta' / (1 - \langle K^{-1} A \theta', A \theta' \rangle)^{1/2}$$

теорема двойственности (2.1) становится

$$(3.9) \quad D_{\min} = \max_{K \in \mathcal{K}} \max_{\theta' \in \Theta'} \langle c, \theta' \rangle^2,$$

где Θ' – это объединение эллипсоидов

$$E(T) := \{ \theta' \in \mathbb{R}^m : \langle (A^T K^{-1} A + T^{-1}) \theta', \theta' \rangle \leq 1 \}, \quad T \in \mathcal{T}.$$

Если $K_* \in \mathcal{K}$, $\theta'_* \in \Theta'$ – решение двойственной задачи (3.9), то согласно (2.2) оценка

$$(3.10) \quad \hat{l}_* = \langle c, \theta'_* \rangle \langle K_*^{-1} A \theta'_*, \eta \rangle$$

является решением исходной задачи (1.1)–(1.2). Теперь мы имеем

$$\max_{\theta' \in \Theta'} \langle c, \theta' \rangle^2 = \max_{T \in \mathcal{T}} \max_{\theta' \in E(T)} \langle c, \theta' \rangle^2 = \max_{T \in \mathcal{T}} \langle (A^T K_*^{-1} A + T^{-1})^{-1} c, c \rangle,$$

так что равенство (3.9) сводится к (3.6). Если $K_* \in \mathcal{K}$, $T_* \in \mathcal{T}$ – это решение задачи (3.6), то пара K_* , θ'_* с вектором

$$(3.11) \quad \theta'_* = (A^T K_*^{-1} A + T_*^{-1})^{-1} c / \langle (A^T K_*^{-1} A + T_*^{-1})^{-1} c, c \rangle^{1/2}$$

является решением задачи (3.9), а оценка (3.10) принимает вид (3.7).

ТЕОРЕМА 3.3.2. Пусть априорное множество Θ компактно и имеет вид (3.5). Тогда

$$(3.12) \quad D_{\min} = \max_{K \in \mathcal{K}} \min_{T \in \mathcal{T}} \langle (A^T K^{-1} A + T)^+ c, c \rangle.$$

Если $K_* \in \mathcal{K}$, $T_* \in \mathcal{T}$ – решение задачи (3.12), то оценка Кукса–Ольмана

$$(3.13) \quad \hat{l}_* = \langle K_*^{-1} A (A^T K_*^{-1} A + T_*^{-1})^+ c, \eta \rangle$$

является решением исходной задачи (1.1)–(1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять мы используем замену переменных (3.8), после которой множество (3.5) заменяется на пересечение Θ' эллипсоидов $E(T) := \{\theta' \in \mathbb{R}^m : \langle (A^T K^{-1} A + T)\theta', \theta' \rangle \leq 1\}$, $T \in \mathcal{T}$. Поскольку множество Θ' центрально симметрично, то по следствию 1.4.6 для фиксированной матрицы $K \in \mathcal{K}$ имеем

$$\max_{\theta' \in \Theta'} \langle c, \theta' \rangle^2 = \delta^{*2}(c \mid \Theta') = \min_{T \in \mathcal{T}} (A^T K^{-1} A + T)^+ c, c \rangle.$$

Используя (3.9) и последнее равенство, получим (3.12).

Чтобы доказать (3.13), мы воспользуемся равенством (3.10), в котором $K_* \in \mathcal{K}$, $\theta'_* \in \Theta'$ – это решение двойственной задачи (3.9). В этот раз получаем, что пара K_* , θ'_* с вектором

$$\theta'_* = (A^T K_*^{-1} A + T_*)^+ c / \langle (A^T K_*^{-1} A + T_*)^+ c, c \rangle^{1/2}$$

является искомым решением, ибо в силу (3.12) в этом случае

$$D_{\min} = \langle (A^T K_*^{-1} A + T_*)^+ c, c \rangle = \langle c, \theta'_* \rangle^2,$$

и поэтому равенство (3.10) преобразуется к виду (3.13).

3.3.2. Определенные статистики второго порядка. Теперь мы можем перейти к регрессионной модели, в которой вектор ошибок ξ имеет точно определенные статистики первого и второго порядка, а вектор коэффициентов регрессии θ принадлежит произвольному выпуклому центрально-симметричному телу Θ . Хотя соответствующие минимаксные задачи были разобраны В. Б. Меласом [38] и А. М. Федотовым [58], по-видимому, некоторые результаты ускользнули от их внимания (во всяком случае, новыми являются представленные здесь доказательства).

Следствие 3.3.3. Пусть множество $\mathcal{K} = \{K\}$ будет одноточечным и

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_2 := \{T \geq 0 : \langle T\theta, \theta \rangle \leq 1 \ \forall \theta \in \Theta\}$$

будет множеством всех эллипсоидов, описанных вокруг произвольного выпуклого, центрально-симметричного тела Θ . Тогда

$$(3.14) \quad D_{\min} = \min_{T \in \mathcal{T}} \langle (A^T K^{-1} A + T)^+ c, c \rangle.$$

Если $T_* \in \mathcal{T}$ – решение задачи (3.14), то оценка Кукса–Ольмана (3.13) является решением исходной задачи (1.1)–(1.2).

Этот красивый результат принадлежит В. Б. Меласу [38], который также показал, что двойственность (3.14) остается справедлива с матричным множеством $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 := \text{conv } \mathcal{T}_0$, где $\mathcal{T}_0 := \{ee^T \mid e \in \Theta^0\}$, а также с множеством $\mathcal{T}'_1$, полученным из $\mathcal{T}_1$ заменой поляр Θ^0 на множество всех ее крайних точек. Это следует из теоремы 1.4.9 и замечания 1.4.10.

Отметим, что двойственная задача (3.14) так же, как и исходная задача (1.2), является задачей минимизации. Поэтому, следуя Auchmuty [69], мы будем называть задачи (3.12) и (3.14) *аномальными двойственными задачами*.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.4. *Предыдущее следствие остается верным для матричного множества $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.*

Конечно, все результаты этого параграфа справедливы также для хорошо обусловленных задач и когда регрессионная матрица A имеет полный ранг m . В этих случаях матрица $A^T K^{-1} A + T$ оказывается невырожденной. Тогда аномальная двойственная задача далее упрощается и очень сильно походит на обыкновенную двойственную задачу (2.1) с априорным множеством Θ , замененным на его поляр Θ^0 .

СЛЕДСТВИЕ 3.3.5. *Пусть множество $\mathcal{K} = \{K\}$ будет одноточечным, Θ будет выпуклым, центрально-симметричным телом, а регрессионная матрица A имеет полный ранг m . Обозначим $F := (A^T K^{-1} A)^{-1}$. Тогда*

$$(3.15) \quad D_{\min} = \langle Fc, c \rangle - \max_{e \in \Theta^0} \frac{\langle Fc, e \rangle^2}{1 + \langle Fe, e \rangle}.$$

Если $e_* \in \Theta^0$ – решение аномальной двойственной задачи (3.15) и $T_* = e_* e_*^T$, то оценка Кука–Ольмана (3.13) является решением исходной задачи (1.1)–(1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 3.3.4 имеем

$$D_{\min} = \min_{e \in \Theta^0} \langle (A^T K^{-1} A + ee^T)^{-1} c, c \rangle.$$

Сочетая это с тождеством (1.4.22), получаем (3.15).

По-видимому, последние два результата являются новыми. Заметим, что в отличие от следствия 3.3.3, поляр Θ^0 нельзя в них заменить на множество всех ее крайних точек, и что размерность задачи (3.15) гораздо меньше, чем размерность задачи (3.14) (минимум в (3.15) берется на векторном множестве, тогда как в (3.14) он берется на матричном множестве).

§ 3.4. Несимметричные ограничения на параметры регрессии

Если априорное множество Θ не симметрично относительно нуля, все результаты, представленные в этой главе, по-прежнему применимы, но множество Θ следует симметризовать относительно нуля.

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Пусть Θ будет произвольным выпуклым телом, а*

$$(4.1) \quad \Omega := \{\theta = (\theta_1 - \theta_2)/2 : \theta_1, \theta_2 \in \Theta\}$$

будет его симметричным дубликатом. Тогда

$$(4.2) \quad D_{\min} = \max_{K \in \mathcal{K}, \theta \in \Omega} \frac{\langle c, \theta \rangle^2}{1 + \langle K^{-1} A \theta, A \theta \rangle}.$$

Если $K_* \in \mathcal{K}$, $\theta_* \in \Omega$ – решение двойственной задачи (4.2), а $\hat{l}_* = \langle x_*, \eta \rangle$ – это оценка (2.2), то оценка

$$(4.3) \quad \tilde{l}_* = \hat{l}_* - [\delta^*(A^T x_* - c \mid \Theta) - \delta^*(c - A^T x_* \mid \Theta)]/2$$

является решением исходной задачи (1.1)–(1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированных $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \in \mathbb{R}$ максимум функции $(\langle A^T x - c, \theta \rangle + t)^2$ на множестве Θ сводится к максимуму функции $(\alpha + t)^2$ на отрезке $a \leq \alpha \leq b$, где

$$(4.4) \quad \begin{aligned} a &= \min_{\theta \in \Theta} \langle A^T x - c, \theta \rangle = -\delta^*(c - A^T x \mid \Theta), \\ b &= \max_{\theta \in \Theta} \langle A^T x - c, \theta \rangle = \delta^*(A^T x - c \mid \Theta). \end{aligned}$$

Ясно, что максимум функции $(\alpha + t)^2$ достигается на границе отрезка $[a, b]$. Далее, для фиксированного $x \in \mathbb{R}^N$ мы должны найти $\min_{t \in \mathbb{R}} \max[(a + t)^2, (b + t)^2]$. Очевидно, этот минимум достигается при

$$(4.5) \quad t = -(a + b)/2$$

и равен $[(b - a)/2]^2 = \delta^{*2}(A^T x - c \mid \Omega)$. Таким образом, исходная задача (1.1)–(1.2) принимает вид

$$(4.6) \quad D_{\min}/2 = \min_{x \in \mathbb{R}^N} \{D(x) + \delta^{*2}(A^T x - c \mid \Omega)/2\},$$

причем на этот раз $\delta^*(z \mid \Omega) = [\delta^*(z \mid \Theta) + \delta^*(-z \mid \Theta)]/2$ является опорной функцией симметричного множества (4.1).

Равенство (4.2) теперь вытекает непосредственно из теоремы 3.2.1. Если $K_* \in \mathcal{K}$, $\theta_* \in \Omega$ – это решение двойственной задачи (4.2), а $\hat{l}_* = \langle x_*, \eta \rangle$ – это оценка (2.2), то оценщик $x_* \in \mathbb{R}^N$ дает решение задачи (4.6), так что согласно (4.4) и (4.5) минимаксная оценка $\tilde{l}_* = \langle x_*, \eta \rangle + t_*$ принимает вид (4.3).

СЛЕДСТВИЕ 3.4.2. Если $\Theta = \theta_0 + \Theta'$, где Θ' – выпуклое центрально-симметричное тело, а $\hat{l}_* = \langle x_*, \eta \rangle$ – это оценка (2.2), вычисленная для множества Θ' , то $\Omega = \Theta'$ и оценка $\tilde{l}_* = \hat{l}_* - \langle A^T x_* - c, \theta_0 \rangle$ является решением исходной задачи (1.1)–(1.2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В настоящее время существует несколько путей использования гладкости в сопряженном пространстве. Исторически двойственная связь гладкости со строгой (или равномерной) выпуклостью первоначально была обнаружена в функциональном анализе (см. [62], [91], [93], [98]). Из изложенного выше видно, что из гладкости автоматически следует выпуклость. Такой подход (в сочетании с предельными переходами) весьма плодотворен, и весьма заманчиво было бы его применить для осмысления с общих позиций выпуклого анализа многих разрозненных результатов, по существу относящихся к выпуклому анализу, которые иными методами были получены в автоматическом управлении [59], [100], спектральной оптимизации [1] и линейной алгебре (в теории числовых образов).

Автор благодарит С. М. Асеева и В. М. Тихомирова за помощь в этой работе. Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абрамов Ю. Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
- [2] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [3] Ананьев Б. И. Минимаксная линейная фильтрация многошаговых процессов с неопределёнными распределениями возмущений // Автоматика и телемеханика. 1993. № 10. С. 131–139.
- [4] Бадриев И. П., Карчевский М. М. Методы двойственности в прикладных задачах. Изд-во Казанского ун-та, 1987.
- [5] Бажинов И. К., Почукаев В. Н. Оптимальное планирование навигационных измерений в космическом полете. М.: Машиностроение, 1976.
- [6] Бахвалов Н. С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1971. Т. 11. № 4. С. 1014.
- [7] Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е. Определение и коррекция движения. Гарантирующий подход. М.: Наука, 1980.
- [8] Бахшиян Б. Ц., Соловьёв В. Н. Применение теоремы двойственности к задаче оптимального гарантированного оценивания // Космич. исслед. 1990. Т. 28. № 2. С. 163–169.
- [9] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Мир, 1969.
- [10] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Достаточные признаки выпуклости // Записки научн. семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 3–52.
- [11] Голубев Г. А. Минимаксная линейная фильтрация динамических процессов с дискретным временем // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 72–81.
- [12] Гусев М. И. Оптимальность линейных алгоритмов в задачах гарантированного оценивания // Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 87–95.
- [13] Гусев М. И. О структуре оптимальных минимаксных оценок в задачах гарантированного оценивания // Докл. АН. 1992. Т. 322. № 5. С. 832–835.
- [14] Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974.
- [15] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышёвские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 2. С. 254–257.
- [16] Закс Ш. Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.
- [17] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29. № 1. С. 19–32.
- [18] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Об оценивании линейных функционалов в гауссовском шуме // Теория вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32. № 1. С. 35–44.
- [19] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [20] Кац И. Я., Куржанский А. Б. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределённых ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 79–88.
- [21] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [22] Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. матем. и мех. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
- [23] Кукс А. Минимаксная оценка коэффициентов регрессии // Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. 1972. Т. 21. № 1. С. 73–78.
- [24] Кукс А., Ольман В. Минимаксная линейная оценка коэффициентов регрессии // Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. 1972. Т. 21. № 1. С. 66–72.
- [25] Кукс А., Ольман В. Минимаксная линейная оценка коэффициентов регрессии // Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-матем. 1971. Т. 20. № 1. С. 480–482.
- [26] Куржанский А. Б. Управление и наблюдения в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977.

- [27] Куржанский А. Б. Задача идентификации: теория гарантирующих оценок (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
- [28] Куркин О. М., Коробочкин Ю. Б., Шаталов С. А. Минимаксная обработка информации. М.: Энергоатомиздат, 1990.
- [29] Левчук О. В., Федотов А. М. Построение минимаксных решений линейных некорректных задач со случайными ошибками в данных // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1988. Т. 28. № 6. С. 825–834.
- [30] Легостаева И. Л., Ширяев А. Н. Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса // Теория вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. № 2. С. 339–345.
- [31] Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.
- [32] Лидов М. Л., Бахшиян Б. Ц., Матасов А. И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания (обзор) // Космич. исслед. 1991. Т. 29. № 5. С. 659–684.
- [33] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
- [34] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 85–93.
- [35] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 359.
- [36] Матасов А. И. Об оптимальности линейных алгоритмов гарантированного оценивания, части I, II // Космич. исслед. 1988. Т. 26. № 5. С. 643–653; 1988. Т. 26. № 6. С. 803–812.
- [37] Матасов А. И. Оптимальность линейных алгоритмов в задаче о “наихудшей корреляции” // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1989. № 1. С. 61–64.
- [38] Мелас В. Б. О выборе плана эксперимента и метода оценивания при наличии априорных сведений о параметрах // Математические методы планирования эксперимента. Новосибирск: Наука, 1981. С. 155–173.
- [39] Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [40] Пинелис И. Ф. О минимаксном риске // Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. № 1. С. 92–97.
- [41] Пинелис И. Ф. О минимаксном оценивании регрессии // Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. № 3. С. 494–505.
- [42] Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
- [43] Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. 2-е изд. М.: Наука, 1982.
- [44] Пшеничный Б. Н., Покотило В. Г. Минимаксный подход к оценке параметров линейной регрессии // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 94–102.
- [45] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973.
- [46] Соловьёв В. Н. Двойственность некоторых невыпуклых экстремальных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1987. Т. 27. № 2. С. 459–463.
- [47] Соловьёв В. Н. Двойственность невыпуклых экстремальных задач // Докл. д-ра АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 135–138.
- [48] Соловьёв В. Н. Некоторые алгоритмы квадратичного программирования и оптимального гарантирующего оценивания // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 67–73.
- [49] Соловьёв В. Н. Одна теорема о минимаксе // Тезисы доклада Всесоюзной конференции “Негладкий анализ и его приложения к математической экономике”. Баку: Изд. Элм, 1991.
- [50] Соловьёв В. Н. Двойственные алгоритмы оптимального гарантирующего оценивания // Космич. исслед. 1992. Т. 30. № 1. С. 10–24.
- [51] Соловьёв В. Н. О линейности оптимальных алгоритмов гарантирующего оценивания // Космич. исслед. 1994. Т. 32. № 2. С. 122–124.
- [52] Соловьёв В. Н. Двойственные алгоритмы оптимального гарантирующего оценивания и усеченный метод наименьших квадратов // Космич. исслед. 1995. Т. 33. № 1. С. 3–11.
- [53] Соловьёв В. Н. Минимаксно-байесовское оценивание на классах распределений с ограниченными вторыми моментами // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 171–172.
- [54] Соловьёв В. Н. Минимаксное и минимаксно-байесовское оценивание параметров линейной регрессии // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 211–212.

- [55] Соловьёв В. Н. О связи выпуклости и гладкости // Тезисы докладов III Международной конференции женщин-математиков (29 мая – 2 июня 1995 г.). Воронеж: ВИПКРО, 1995. С. 60.
- [56] Соловьёв В. Н. О связи выпуклости и гладкости. II // Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы “Современные методы в теории краевых задач”, “Понтрягинские чтения–VII” (17–23 апреля 1996). Воронеж: ВГУ. С. 168.
- [57] Федотов А. М., Левчук О. В. Оптимальные линейные оценки линейных функционалов от решений операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 1. С. 63–66.
- [58] Федотов А. М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1990.
- [59] Фрадков А. Л. Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 2. С. 357–383.
- [60] Хьюбер П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.
- [61] Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
- [62] Шмудьян В. Л. Sur la structure de la sphere unitaire dans l'espace de Banach // Матем. сб. 1941. Т. 9. С. 545–561.
- [63] Шор Н. З. Об одном подходе к получению глобальных экстремумов в полиномиальных задачах математического программирования // Кибернетика. 1987. № 5. С. 102–106.
- [64] Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наукова Думка, 1989.
- [65] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
- [66] Asplund E. Frechet-Differentiability of Convex Functions // Acta Math. 1968. V. 121. P. 31–47.
- [67] Asplund E., Rockafellar R. T. Gradients of Convex Functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 139. P. 443–467.
- [68] Asplund E. Chebyshev Sets in Hilbert Space // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 235–240.
- [69] Auchmuty G. Duality for Nonconvex Variational Principles // J. Differential Equations. 1983. V. 50. P. 80–145.
- [70] Basar T., Mintz M. On a Minimax Estimate for the Mean of a Normal Random Vector under a Generalized Quadratic Loss Function // Ann. Statist. 1973. V. 1. № 1.
- [71] Berger J. O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2nd ed. New York: Springer, 1985.
- [72] Bickel P. J. Minimax Estimation of the Mean of a Normal Distribution when the Parameter Space is Restricted // Ann. Statist. 1981. V. 9. P. 1301–1309.
- [73] Brondsted A., Rockafellar R. T. On the Subdifferentiability of Convex Functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 605–611.
- [74] Bunke O. Least Squares Estimators as Robust and Minimax Estimators // Math. Operationsforsch. und Statist. 1975. V. 6. № 5. P. 687–688.
- [75] Casella G., Strawderman W. E. Estimating a Bounded Normal Mean // Ann. Statist. 1981. V. 9. P. 870–878.
- [76] Craven B. D., Gwinner J., Jeyakumar V. Nonconvex Theorems of the Alternative and Minimization // Optimization. 1987. V. 18. № 2. P. 151–163.
- [77] Ekeland I. Legendre Duality in Nonconvex Optimization and Calculus of Variations // SIAM J. Control and Optimization. 1977. V. 15. P. 905–934.
- [78] Martin C. J., Mintz M. Robust Filtering and Prediction for Linear Systems with Uncertain Dynamics: A Game Theoretic Approach // IEEE Trans. on Autom. Control. 1983. V. AC-28. P. 888–896.
- [79] Milanese M., Tempo R. Optimal Algorithms Theory for Robust Estimation and Prediction // IEEE Trans. on Autom. Control. 1985. V. AC-30. № 8. P. 730–738.
- [80] Milanese M., Vicino A. Optimal Estimation Theory of Dynamic Systems with Set Membership Uncertainty // Automatica. 1991. V. 27. № 6. P. 997–1009.

- [81] Mintz M. A Kalman Filter as a Minimax Estimator // J. Optimization Theory Appl. 1972. V. 9. № 2.
- [82] Neumann J. von. Zur Theorie der Gesellschaftspiele // Math. Ann. 1928. V. 100. P. 295–320.
- [83] Packel E. W. Do linear problems have linear optimal algorithms? // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 3. P. 388–403.
- [84] Poor H. V., Verdu S. Minimax Linear Observers and Regulators for Stochastic Systems with Uncertain Second Order Statistics // IEEE Trans. Automat. Control. 1984. V. AC-29. P. 499–511.
- [85] Pukelsheim F., Studden W. J. E-optimal designs for polynomial regression // Ann. Statist. 1993. V. 21. № 1. P. 402–415.
- [86] Sacks J., Ylvisaker D. Linear Estimation for Approximately Linear Models // Ann. Statist. 1978. V. 6. P. 1122–1137.
- [87] Soloviov V. Duality for Nonconvex Optimization and its Applications // Anal. Math. 1993. V. 19. № 4. P. 297–315.
- [88] Soloviov V. Minimax Estimation and the Least Squares Method // Stochastics and Stochastics Reports. 1993. V. 42. P. 209–223.
- [89] Vandelinde V. D. Robust Properties of Solutions to Linearquadratic Estimation and Control Problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. V. AC-22. № 1. P. 138–139.
- [90] Wald A. Statistical Decision Functions. New York: Wiley, 1950.
- [91] Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. New York: Wiley, 1993.
- [92] Giles J. R. Convex Analysis with Application in Differentiation of Convex Functions // Res. Notes Math. № 58. Pitman, 1982.
- [93] Phelps R. R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability // Lecture Notes in Math. 1993 (2nd ed.). V. 1364.
- [94] Балаганский В. С. Дифференцируемость по Фреше функции расстояния и структура множества // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 6. С. 725.
- [95] Власов Л. П. Несколько теорем о чебышёвских множествах // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 2. С. 135–144.
- [96] Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
- [97] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [98] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980.
- [99] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1965.
- [100] Якубович В. А., Фрадков В. Л. S-процедура и соотношение двойственности в невыпуклых задачах квадратичного программирования // Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех. 1973. Т. 1. № 1. С. 81–87.
- [101] Montejano L., Schcepin E. V. A characterization of convex sets in term of acyclic support sets // Bull. London Math. Soc. 1996. V. 28. № 5. P. 501–504.

Поступила в редакцию

12.02.1996