Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Старков, Новый прогресс в теории однородных потоков, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 87–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:41:30

УДК 519.46

(К 60-летию академика РАН Д. В. Аносова)

НОВЫЙ ПРОГРЕСС В ТЕОРИИ ОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ

А. Н. СТАРКОВ

СОДЕРЖАНИЕ

§0. Соглашения, определения и необходимые сведения	93
§1. Поверхности постоянной отрицательной кривизны	107
§2. Метрическая жесткость орициклического потока	110
§3. Геометрические обобщения теоремы Ратнер о метрической жест- кости орициклического потока	113
§4. Факторы и джойнинги орициклических потоков	117
§5. Жесткость, факторы и джойнинги унитарных потоков	119
§6. Динамика орициклического потока	123
§7. Классификация эргодических мер унитарных потоков	129
§8. Равномерная распределенность унитарных траекторий	136
§9. Различные вопросы сходимости мер	144
§10. Структура орбит, минимальных множеств и эргодических мер од- нородных потоков	150
§11. Кратное перемешивание и метрическая жесткость однородных по- токов	157
§12. Эргодические меры и замыкания орбит для действия произвольных подгрупп	164
§13. Унитарные потоки на однородных пространствах над локальны- ми полями	167
§14. Применения в теории чисел	172
§15. Некоторые нерешенные проблемы	184
Список литературы	185

Один из наиболее естественных классов динамических систем возникает из следующей конструкции. Если G – группа Ли и $F, \Gamma \subset G$ – две ее замкнутые подгруппы, то действие правыми сдвигами группы F на левом однородном пространстве $\Gamma \backslash G$ называется *однородным действием* и обозначается $(\Gamma \backslash G, F)$ (в случае связной подгруппы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00030) и Международного научного фонда (грант № M1E000).

F говорят об *однородном потоке*). По определению $\Gamma \backslash G$ имеет *конечный объем*, если $\Gamma \backslash G$ несет на себе конечную G -инвариантную меру ν . Стандартным примером однородного действия является прямолинейный поток на n -мерном торе. Однако исторически интерес к этому классу динамических систем был вызван двумя другими его представителями: геодезическим и орициклическим потоками на единичном касательном расслоении SM поверхности M постоянной отрицательной кривизны. Здесь $SM = \Gamma \backslash G$, где $G = SL(2, \mathbb{R})$ и Γ – ее дискретная подгруппа (содержащая центр $\mathbb{Z}_2 \subset G$). Геодезический и орициклический потоки индуцированы соответственно подгруппами¹

$$A_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \quad U_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Динамика этих двух потоков является весьма нетривиальной и обнаруживает существенное различие между двумя типами однородных действий. Пожалуй, единственным их сходством является то, что в предположении конечности G -инвариантного объема на $\Gamma \backslash G$ они эргодичны и перемешивают (Хопф [Ho], Хедлунд [He39]). Геодезический поток, будучи ановским, обладает экспоненциальным разбеганием траекторий и положительной энтропией (Синай [Si60]) и является представителем *частично-гиперболических* однородных потоков. Напротив, орициклический поток имеет полиномиальную скорость разбегания траекторий и нулевую энтропию (Гуревич [Gu], Дани [Da77]), что характерно для унипотентных однородных потоков.

Точнее, если все собственные значения присоединенных операторов Ad_f , $f \in F$, на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ равны 1 (равны 1 по модулю), подгруппа F называется *унипотентной* (соответственно *квазиунипотентной*). Благодаря Хедлунду [He36] давно известно, что в предположении конечности объема $\Gamma \backslash G$ непериодические орбиты орициклического потока всюду плотны, причем в случае компактности $\Gamma \backslash G$ поток минимален (каждая его орбита плотна). Дани и Смитли [DS] доказали, что эргодические меры этого потока имеют аналогичную структуру: они либо сосредоточены на периодических траекториях, либо совпадают с G -инвариантной мерой объема на $\Gamma \backslash G$ (ранее Фюрстенберг [Fu72] установил, что в компактном случае орициклический поток строго эргодичен, т.е. других эргодических мер на $\Gamma \backslash G$ нет; более современное доказательство, которое проходит и для равномерно параметризованного орициклического потока на поверхности переменной отрицательной кривизны, см. у Ратнер [R92]).

Известное соотношение $A_{-t}U_sA_t = U_{e^{-t}s}$ в точности означает, что орициклические орбиты образуют сжимающееся слоение для геодезического потока. Более общим образом, пусть G – полупростая группа Ли и сжимающееся слоение для частично-гиперболического потока $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ образовано орбитами связной подгруппы $U \subset G$ (такая подгруппа U называется *орисферической*). Усиливая результаты Хедлунда и Фюрстенберга, Боуэн [Bo76], Вич [V], Эллис и Перризо [EP] доказали минимальность и строгую эргодичность орисферического потока при условии его эргодичности и компактности $\Gamma \backslash G$. Впоследствии Дани [Da86a] при условии конечности объема $\Gamma \backslash G$ доказал, что замыкание любой орисферической орбиты на $\Gamma \backslash G$ является однородным подпространством. Если отбросить требование полупростоты группы G ,

¹ Любая одномерная подгруппа в $SL(2, \mathbb{R})$ сопряжена либо одной из указанных подгрупп, либо компактной подгруппе $SO(2, \mathbb{R})$, действие которой неинтересно с точки зрения динамики.

но оставить условие компактности $\Gamma \backslash G$, то все орбиты орисферического потока устроены одинаково: их замыкания изоморфны и совпадают с соответствующим эргодическим однородным подпространством (Старков, [St91]).

С другой стороны, если группа Ли G нильпотентна, то любой однородный поток на $\Gamma \backslash G$ является унитарным, и в случае эргодичности относительно конечной G -инвариантной меры на $\Gamma \backslash G$ поток является минимальным (Ауслендер, [AGH]) и строго эргодичным (Фюрстенберг [Fu61]). Для неэргодического потока замыкание любой орбиты является однородным подпространством [P69] (см. также [St84], [Le]). Нетрудно также доказать, что замыкание унитарной траектории на разрешимом однородном пространстве $\Gamma \backslash G$ является однородным подпространством в $\Gamma \backslash G$ (для конечного объема это доказано в [St84], общий случай рассмотрен в [St87b] и [R90b]).

Эти результаты наводят на мысль о том, что замыкания орбит и эргодические меры унитарного потока на произвольном однородном пространстве $\Gamma \backslash G$ конечного объема должны иметь алгебраическое происхождение. Так, замыкание орбиты $\overline{\Gamma U} \subset \Gamma \backslash G$ должно совпадать с орбитой ΓH некоторой подгруппы $H \subset G$, причем на ΓH должна существовать конечная H -инвариантная мера μ (в таком случае иногда мы будем говорить, что замыкание орбиты $\overline{\Gamma U}$ и мера μ являются *алгебраическими*). Интерес к подобного рода утверждениям резко возрос, когда в середине 70-х годов Рагунатан обнаружил замечательную связь между унитарными потоками и решением диофантовых неравенств для квадратичных форм. А именно, если установить, что все компактные замыкания орбит потока $(SL(3, \mathbb{Z}) \backslash SL(3, \mathbb{R}), u_{\mathbb{R}})$,

где $u_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, являются орбитами других подгрупп в $SL(3, \mathbb{R})$, то была бы

доказана старая гипотеза Оппенгейма–Давенпорта из теории чисел: неопределенная невырожденная форма $B(x_1, \dots, x_n)$ от $n \geq 3$ переменных в целых точках принимает значения, сколь угодно близкие к 0 при условии, что B не пропорциональна форме с рациональными коэффициентами. Основная трудность при этом заключена в том, что $u_{\mathbb{R}}$ не является *орисферической* подгруппой в G (хотя и содержится в таковой).

После того, как обнаружилась связь с теорией чисел, проблема изучения динамики унитарных потоков стала центральной для данной теории в 80–90-х гг. В явном виде гипотезы об алгебраичности замыканий орбит и эргодических мер были сформулированы в работе Дани [Da81] (на самом деле Дани высказал их для однопараметрических подгрупп $U \subset G$ и редуктивных групп G ; общая их формулировка – для произвольной группы Ли G и произвольной подгруппы $U \subset G$, порожденной унитарными элементами, дана Маргулисом в [Ma88], [Ma91b]). Первая из них получила название топологической гипотезы Рагунатана, вторую же мы будем называть метрической гипотезой Дани (иногда она называется метрической гипотезой Рагунатана).

С некоторой степенью условности развитие теории однородных потоков можно разбить на три этапа. Первый из них в основном был посвящен классическому геометрическому подходу Морса, Хопфа и Хедлунда к изучению динамики геодезического и орициклического потоков в 20–40-х гг. (как известно, в дальнейшем эти работы привели к созданию теории гладких динамических систем с гиперболическим поведением в работах Смейла, Аносова, Синая, Боуэна, Песина и др.). Началом второго можно, пожалуй, считать работу Гельфанда и Фомина [GF], в которой они впервые заметили,

что эти потоки вписываются в более общую конструкцию однородных потоков и это позволяет для их изучения применять теорию представлений групп. Этот подход был успешно развит американской школой в начале 60-х гг., когда появилось первое систематическое изложение данной теории в трудах конференции по Анализ в целом, проводившейся в 1960/61 гг. в Йельском университете [AGH]. На этом этапе основной задачей было нахождение критерия эргодичности и вычисление энтропии и спектра однородных потоков последовательно для классов нильпотентных, разрешимых, полупростых и общих групп Ли. Эти вопросы для отдельных классов однородных потоков были рассмотрены Ауслендером и Грином [AGH], [AG], [Au], Муром [Mo66], Степиным [Ste69], [Ste73], Боуэном [Bo71] и другими. Развивая эти результаты, Дани [Da77], а также Брезин и Мур [BM] установили критерий эргодичности и вычислили энтропию и спектр однородных потоков в общем случае. Позднее в работах автора [St83], [St89] была проведена редукция неэргодической ситуации к эргодическому случаю. Более подробное изложение всех упомянутых результатов можно найти в обзоре [SSS].

Как уже было сказано, третий этап теории однородных потоков был в основном посвящен доказательству гипотез Рагунатана и Дани для унипотентных потоков и их приложениям после того, как они были сформулированы в [Da81]. Основные события здесь происходили следующим образом. В конце 80-х годов Маргулис опубликовал доказательство гипотезы Оппенгейма–Давенпорта в [Ma87], [Ma89], разобрав ситуацию с топологической гипотезой Рагунатана для $G = SL(3, \mathbb{R})$ (позднее этот результат был усилен в цикле совместных работ Дани и Маргулиса [DM89,90a,90b]). В серии работ [R90b,90c,91a] Марина Ратнер доказала метрическую гипотезу, а в работе [R91b] – и топологическую (одновременно Шах [Sh91] доказал ее для регулярных унипотентных подгрупп в полупростых группах $\mathbb{R}$ -ранга 1). При этом обнаружилось, что центральной является именно метрическая теорема, из которой уже выводится и топологическая. Новый (и возможно более эффективный) способ такого вывода был предложен Дани и Маргулисом [DM93]. Проблемы теории чисел привели к необходимости доказательства гипотез Рагунатана и Дани для групп Ли над локальными полями. В такой постановке обе гипотезы были доказаны Ратнер [R95a]; независимо от нее и другим способом (используя идеи работ [R90b,90c], [BP], [DM89–93], [Ma87,89,91b]) Маргулис и Томанов [MT94,96] доказали метрическую гипотезу. Одновременно были найдены и новые приложения этих результатов в теории чисел, а также в самой теории однородных потоков.

Данный обзор посвящен описанию результатов, полученных на третьем этапе теории однородных потоков за последние 10–15 лет. Следует еще раз отметить, что именно в это время интерес к данной области повысился ввиду найденных приложений в теории чисел. Достаточно напомнить, что на последних двух Международных Конгрессах Математиков теории однородных потоков были посвящены три доклада, два из которых (Маргулиса в Киото, 1990 г., и Ратнер в Цюрихе, 1994 г.) были пленарными. Многие (но не все) вопросы, затронутые в данной работе, рассматривались также в обзорах [R84,94,95b], [Ma91b,96], [Gh], [B], [Da95].

Несколько слов о структуре нашего обзора. Пожалуй, первым существенным ингредиентом для доказательства гипотез Рагунатана и Дани, полученным еще до их формулировки в [Da81], является весьма нетривиальный результат Маргулиса [Ma71]

о том, что унипотентная траектория в $SL(n, \mathbb{Z}) \setminus SL(n, \mathbb{R})$ не может уходить на бесконечность (напомним, что это утверждение было использовано Маргулисом для доказательства его знаменитой теоремы арифметичности). Позднее этот результат был усилен Дани [Da84,86b], который в итоге доказал возвращаемость с положительной плотностью времен произвольной унипотентной траектории в некоторый компакт. Мы приводим формулировки этих теорем в списке предварительных сведений в §0 и демонстрируем их доказательство на простейшем примере.

С другой стороны, в 80-х гг. Мариной Ратнер [R82] были получены замечательные (и весьма неожиданные даже для специалистов) результаты о жесткости орициклического потока: метрический изоморфизм двух орициклических потоков почти всюду совпадает с аффинным отображением (т.е. имеет алгебраическое происхождение). Основным инструментом при этом было свойство, известное теперь как R -свойство орициклического потока, которое описывает характер разбегания его близких траекторий (в дальнейшем именно это свойство интенсивно применялось Ратнер для доказательства гипотез Рагунатана и Дани). На этих результатах мы остановимся немного подробнее (в частности, потому что они были недостаточно освещены в обзоре [SSS]). Предварительно в §1 мы приводим краткие сведения из гиперболической геометрии, а в §2 рассматриваем динамику геодезического и орициклического потоков и формулируем теорему о метрической жесткости орициклического потока. В §3 обсуждаются геометрические обобщения данной теоремы, полученные Фельдманом и Орнштейном [FO], Фламинио и Спатшиером [F], [FS] при изучении орисферических слоений на многообразиях отрицательной кривизны.

Теоремы об алгебраичности факторов и джойнингов орициклического потока, доказанные Ратнер в [R82a,82b], обсуждаются в §4. В §5 описано, как эти результаты и свойство метрической жесткости обобщаются на класс произвольных унипотентных потоков (здесь основной вклад сделан Витте, который, в частности, доказал в [Wi85] аффинность изоморфизма унипотентных эргодических потоков, а в [Wi94] изучил строение их факторпотоков. Заметим, что для нильпотентов эти результаты были получены еще в 70-х годах в работе Перри [P71]). Также мы показываем, что эти результаты легко выводятся из метрической гипотезы Дани (и поэтому они естественно вписываются в круг рассматриваемых вопросов).

Само доказательство метрической гипотезы слишком сложно, чтобы воспроизводить его в рамках обзора. Чтобы дать представление о нем, мы пользуемся способом, который избрала в [R92] сама Марина Ратнер: в §6 мы даем это доказательство для орициклического потока (не пользуясь тем фактом, что сжимающееся слоение для геодезического потока образовано орбитами орициклического потока), а в §7 – показываем, как это доказательство служит основой для рассмотрения произвольных унипотентных потоков. Параллельно мы намечаем схему доказательства метрической гипотезы из [MT94].

Что касается вывода топологической гипотезы Рагунатана из метрической, то мы избрали путь, предложенный Дани и Маргулисом в [DM93]. В отличие от самой работы [DM93] мы для иллюстрации вначале даем доказательство для орициклического потока, а затем уже подробно рассматриваем общий случай. Для однопараметрических потоков топологическая теорема может быть значительно усилена: унипотентная траектория не только имеет однородное замыкание, но и равномерно распределена

в нем. Впервые это предположение было высказано в [Da82] (для $SL(n, \mathbb{R})$) и [Ma88] (в общем случае), а доказано в [R91b] и [DM93]. Фактически здесь речь идет о сходимости в $*$ -слабой топологии некоторой последовательности мер к алгебраической мере в пространстве вероятностных мер $\mathcal{P}(\Gamma \setminus G)$. Обобщения этой теоремы, принадлежащие Дани и Маргулису [DM93], Ратнер [R94], Эскину, Мозесу и Шаху [MS], [Sh94], [EMS96,97], приводятся в § 9. Так, показано, что семейство удлиняющихся кусков траекторий имеет свойство равномерной распределенности при условии, что среди предельных точек есть хотя бы одна в общем положении (не лежащая в инвариантном подпространстве меньшей размерности). При этом могут варьироваться не только траектории, но и сами унитарные подгруппы [DM93]. Пространство вероятностных эргодических мер для унитарных подгрупп оказывается замкнутым [MS]; аналогичные результаты об алгебраичности предельной меры для семейства сдвигов эргодической алгебраической меры получены в [EMS96,97]. Само свойство равномерной распределенности (и алгебраичности замыкания) имеет силу не только для унитарных траекторий, но и для полиномиальных кривых в $SL(n, \mathbb{R})$ [Sh94].

В § 10 и § 11 показывается, как результаты Ратнера могут быть применены для изучения произвольных однопараметрических потоков. Здесь имеются два подхода: 1) показать, что какие-либо свойства не очень сильно ухудшаются, если рассмотреть более общий класс квазиунитарных потоков, и заведомо нарушаются для противоположного класса частично-гиперболических потоков; 2) постараться общую задачу свести к унитарному случаю. Примером первого подхода являются критерий для гладкости замыканий всех орбит потока и свойство послойной аффинности для изоморфизма двух эргодических квазиунитарных потоков, второго – классификация минимальных множеств и доказательство гипотезы Маркуса о кратном перемешивании. Эти результаты принадлежат автору ([St90,93,95], [St95a]). В вопросе существования минимальных множеств мы используем недавний результат Клейнбока и Маргулиса [KM96] о хаусдорфовой размерности семейства ограниченных орбит.

В § 12 рассматривается вопрос об устройстве эргодических мер и замыканий орбит для действия многомерных связных подгрупп $F \subset G$. Здесь множество вопросов еще остается открытыми. Тем не менее, для некоторых подгрупп $F \subset G$, содержащих унитарные элементы, но не порожденных ими, как эргодические меры, так и замыкания орбит имеют алгебраическое происхождение; в этой связи приводятся результаты Ратнера [R94], Мозеса [Moz95a], Шаха [Sh96], Маргулиса и Томанова [MT96]. В случае, когда F вообще не содержит (квази)унитарных элементов, частичные результаты недавно получены Катком и Спатциером [KS96].

Приложениям в теории чисел посвящены § 13 и § 14. Вначале приводятся краткие сведения из теории групп Ли над p -адическим полем и весьма полезная информация об устройстве однопараметрических подгрупп и структуре пространств конечного объема, полученная Ратнером в [R93, R95a]. В конце § 13 приводится сводка результатов о динамике унитарных потоков на однородных пространствах произведений нескольких групп Ли над локальными полями нулевой характеристики (см. также [MT94,96]).

В § 14, следуя [DM90b] и [Ma90b], полностью доказывается гипотеза Оппенгейма–Давенпорта с помощью изучения частного случая ($G = SL(3, \mathbb{R})$) топологической гипотезы Рагунатана. Затем приводятся различные обобщения, относящиеся к за-

даче о плотности значений иррациональной невырожденной неопределенной квадратичной формы Q (над произведением локальных полей) в примитивных узлах целочисленной решетки и принадлежащие Дани и Маргулису [DM89,90а,93], а также Борелю и Прасад [BP], [B]. Вопрос об асимптотике числа целых решений неравенства $0 < |Q(x)| < \varepsilon$ в шаре $|x| < R$ при $R \rightarrow \infty$ для неопределенных форм Q был недавно решен в работах Дани и Маргулиса [DM93] (оценка снизу), а также Эскина, Маргулиса и Мозеса [ЕММ] (оценка сверху). Изложение здесь довольно сжатое, так как этот предмет хорошо освещен в обзорах [Ma96] и (кроме последней работы) [B]. Более подробно рассматривается работа Эскина, Мозеса и Шаха [EMS96] об асимптотике числа целых точек на $\mathbb{Q}$ -алгебраических многообразиях в $\mathbb{R}^n$. Формулируются также недавнее доказательство Клейнбоком и Маргулисом [KM97] гипотез Бейкера и Спринджук из теории чисел и результаты Скриганова [Skr] об асимптотике числа целых точек внутри многогранника.

Наконец, в § 15 мы вкратце упоминаем о нерешенных проблемах в теории однородных потоков, примыкающих к данной тематике.

Несколько слов о системе обозначений, принятых в данной работе. Здесь мы будем рассматривать *левые* однородные пространства с *правым* действием сдвигами на них. Такой точки зрения во всех своих работах придерживаются Ратнер, Витте и др., хотя более общепринят противоположный подход. Наш выбор в пользу “левой” системы обозначений объясняется не только тем, что обзор работ Ратнер занимает здесь весьма значительный объем, но и тем, что алгебраический подход при изучении геодезического и орициклического потоков приводит именно к левым однородным пространствам.

В заключение автор выражает признательность Д. В. Аносову, С. Дани, Г. А. Маргулису, М. Ратнер, А. М. Степину и Н. Шаху за полезные консультации.

§0. Соглашения, определения и необходимые сведения

А. Эргодическая теория и топологическая динамика. Мерой μ на множестве X мы будем называть неотрицательную счетно-аддитивную функцию $\mu: \Omega(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$ на некоторой σ -алгебре $\Omega(X)$ подмножеств из X . При этом подмножества из $\Omega(X)$ называются *измеримыми множествами*. Если $\mu(X) < \infty$, то мера μ называется *конечной*, в противном случае – *бесконечной*. Конечную меру μ , нормированную условием $\mu(X) = 1$, будем называть *вероятностной*. Пару (X, μ) (опуская для краткости $\Omega(X)$) назовем *пространством с мерой*. Две конечные меры μ и μ' на X называются *эквивалентными* ($\mu \sim \mu'$), если μ и μ' имеют одну и ту же σ -алгебру измеримых подмножеств и $\mu(A) = 0 \iff \mu'(A) = 0$ для всякого измеримого $A \subset X$. Меры μ и μ' *взаимно сингулярны*, если найдется такое $A \subset X$, что $\mu(A) = 0$ и $\mu'(X - A) = 0$.

Если имеется отображение $f: X \rightarrow X'$ и пространство X снабжено мерой μ , то на X' можно задать меру $\mu' = f_*\mu$ по правилу $\mu'(A) = \mu(f^{-1}(A))$ для каждого $A \subset X'$ с измеримым прообразом $f^{-1}(A)$.

Пусть (X, μ) и (X', μ') – два пространства с мерами. Отображение $f: X \rightarrow X'$ называется *измеримым*, если прообраз $f^{-1}(A)$ каждого измеримого множества $A \subset X'$ измерим. Измеримое отображение $f: X \rightarrow X'$ называется *сохраняющим меру*, если $f_*\mu = \mu'$, т.е. $\mu(f^{-1}(A)) = \mu'(A)$ для каждого измеримого $A \subset X'$.

Автоморфизмом измеримого пространства (X, μ) назовем сохраняющее меру обратимое mod 0 отображение $f: X \rightarrow X$. Через $\text{Aut}(X, \mu)$ обозначим группу всех автоморфизмов пространства (X, μ) .

Пусть F – топологическая группа. Всюду далее будем предполагать, что F является локально-компактной и сепарабельной.² Непрерывным действием F на пространстве (X, μ) (мы будем рассматривать только такие действия) называется гомоморфизм $\varphi: F \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ такой, что для любых измеримых $A, B \subset X$ функция $\mu(\varphi_g(A) \cap B)$ непрерывна по $g \in F$. В случае $F = \mathbb{R}$ непрерывное действие называют потоком, а в случае $F = \mathbb{Z}$ – каскадом. Измеримое множество $A \subset X$ называют F -инвариантным, если $\varphi_g(A) = A$ для всех $g \in F$. Действие F на (X, μ) является эргодическим, если для каждого F -инвариантного множества $A \subset X$ либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(X - A) = 0$ (одновременно μ называется F -эргодической мерой).

Для $F = \mathbb{R}$ непрерывный поток на (X, μ) будем обозначать $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$. Предположим, что μ – эргодическая мера для потока $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$. Тогда имеет место эргодическая теорема Биркгофа–Хинчина: для каждой $f \in L^1(X, \mu)$ и для μ -почти каждой точки $x \in X$ имеем

$$(*) \quad \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t x) dt \rightarrow f^* = \frac{\int_X f d\mu}{\mu(X)}, \quad T \rightarrow \infty.$$

В частности, если $\mu(X) = \infty$, то $f^* = 0$.

Предположим теперь, что мера μ является вероятностной. Тогда эргодичность потока $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$ эквивалентна тому, что кроме констант нет других $\varphi_{\mathbb{R}}$ -инвариантных функций из $L^1(X, \mu)$. Из теоремы Биркгофа–Хинчина вытекает, что различные $\varphi_{\mathbb{R}}$ -эргодические вероятностные меры взаимно сингулярны.

Поток на пространстве (X, μ) с вероятностной мерой называется перемешивающим, если для любых измеримых $A, B \subset X$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\varphi_t A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Более общее понятие: поток называется k -перемешивающим, если для любых $k + 1$ измеримых множеств $A_0, \dots, A_k \subset X$ и любых $k + 1$ последовательностей $\{t_i(0)\}, \dots, \{t_i(k)\}$ таких, что $|t_i(l) - t_i(m)| \rightarrow \infty$, $i \rightarrow \infty$, $l \neq m$, выполняется равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{l=0}^k \varphi_{t_i(l)} A_l\right) = \prod_{l=0}^k \mu(A_l).$$

Ясно, что перемешивающий поток эргодичен. Примером эргодического перемешивающего потока является прямолинейный поток на торе $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, действующий по правилу $\varphi_t(\mathbb{Z}^2 + a) = (\mathbb{Z}^2 + a + tv)$ сдвигами вдоль вектора $v \in \mathbb{R}^2$ с рационально независимыми координатами. В общем случае не известно (проблема Рохлина), следует ли из обычного перемешивания перемешивание всех степеней?

В эргодической теории имеется также важное понятие метрической энтропии $0 \leq e(\varphi) \leq \infty$, измеряющей “степень хаотичности” траекторий автоморфизма

²На самом деле все наши группы будут группами Ли.

$\varphi \in \text{Aut}(X, \mu)$. Точное определение энтропии можно найти в [KSF]. Нам будет важен лишь критерий нетривиальности энтропии С.3 для однородных потоков, поэтому мы не воспроизводим полного определения. Энтропии сдвигов потока связаны между собой формулой $e(\varphi_t) = |t|e(\varphi_1)$. Для каждого потока согласно Пинскеру [Pi] существует единственный (с точностью до изоморфизма) максимальный факторпоток нулевой энтропии. Если такой факторпоток тривиален (т.е. все нетривиальные факторы исходного потока имеют положительную энтропию), то исходный поток называется *K-поток* или *поток* с *K-свойством*.³ Известно, что *K-поток* обладает перемешиванием всех степеней.

Предположим, что $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$ и $(X', \varphi'_{\mathbb{R}})$ – два потока на пространствах с мерами. Измеримое отображение $\alpha: X \rightarrow X'$ называется *сопряженностью* потоков (или *эквивариантным* относительно потоков), если

$$\alpha(\varphi_t x) = \varphi'_t \alpha(x) \text{ для } \mu\text{-почти всех } x \in X, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Если сопряженность α сохраняет меру, она называется *метрической сопряженностью*. При этом поток $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$ называется *накрывающим*, а поток $(X', \varphi'_{\mathbb{R}})$ – *фактором*. Если к тому же α является обратимым, то потоки называются *метрически изоморфными*. Эргодичность, *k*-перемешивание, *K*-свойство, энтропия являются метрическими инвариантами, т.е. сохраняются при метрическом изоморфизме.

Потоки $(X, \mu, \varphi_{\mathbb{R}})$ и $(X', \mu', \varphi'_{\mathbb{R}})$ называются *эквивалентными по Какутани*, если найдется отображение $\alpha: X \rightarrow X'$ такое, что $\alpha_* \mu \sim \mu'$ и α переводит (почти все) $\varphi_{\mathbb{R}}$ -орбиты в $\varphi'_{\mathbb{R}}$ -орбиты с сохранением направления (т.е. положительные полуорбиты в положительные, а отрицательные – в отрицательные). Эквивалентность по Какутани сохраняет свойство эргодичности, но не сохраняет свойство перемешивания. Энтропия, вообще говоря, также не сохраняется, однако свойства обращения в нуль и конечности энтропии при эквивалентности по Какутани остаются неизменными.

Пусть $(X, \mu, \varphi_{\mathbb{R}})$ и $(X', \mu', \varphi'_{\mathbb{R}})$ – два потока, сохраняющих меру. Через $p: X \times X' \rightarrow X$ и $p': X \times X' \rightarrow X'$ обозначим проекции. *Джойнингом* этих потоков называется такая инвариантная относительно диагонального потока $\varphi_t \times \varphi'_t$ мера m на $X \times X'$, что p и p' сохраняют меры (т.е. $m(A \times X') = \mu(A)$ для каждого измеримого $A \subset X$ и, аналогично, $m(X \times A') = \mu'(A')$ для каждого измеримого $A' \subset X'$). Если кроме $\mu \times \mu'$ нет других джойнингов для $\varphi_{\mathbb{R}}$ и $\varphi'_{\mathbb{R}}$, то меры μ и μ' называются *дизъюнктными*. В случае $(X, \mu, \varphi_{\mathbb{R}}) = (X', \mu', \varphi'_{\mathbb{R}})$ джойнинг m на $X \times X$ называется *автоджойнингом* (от “self-joining”) потока. Кроме $\mu \times \mu$ на $X \times X$ есть другие примеры автоджойнингов: диагональная мера $\hat{\mu}(A \times B) = \mu(A \cap B)$ и ее сдвиги $\hat{\mu}_t(A \times B) = \mu(\varphi_t A \cap B)$. Эти автоджойнинги называются тривиальными. Аналогично вводятся автоджойнинги произвольной степени: мера m на X^n является *автоджойнингом n -й степени*, если она инвариантна относительно диагонального потока φ_t^n и ее проекции на все копии X совпадают с μ . Подробное изложение теории джойнингов можно найти в обзоре Туveno [Th].

³На самом деле обычно используется эквивалентное данному первоначальное определение Колмогорова [KSF].

Пусть X – топологическое пространство, которое всюду далее будем предполагать *локально-компактным и сепарабельным*.⁴ Действием топологической группы F на X называется непрерывный гомоморфизм $\alpha: F \rightarrow \text{Номео}(X)$ в группу всех гомеоморфизмов пространства X , снабженную топологией равномерной сходимости на компактах. Действие называется *топологически транзитивным*, если найдется точка $x \in X$ с плотной F -орбитой⁵, и *минимальным*, если каждая точка имеет плотную F -орбиту. F -инвариантное замкнутое подмножество $A \subset X$ называется *минимальным*, если каждая F -орбита внутри A является плотной в A . По лемме Цорна каждый поток на компактном пространстве обладает минимальным множеством.

Рассмотрим поток $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$ на топологическом пространстве X . Каждая точка $x \in X$ имеет две полуорбиты: положительную $\varphi_{\mathbb{R}^+}x$ и отрицательную $\varphi_{\mathbb{R}^-}x$. Положительная полуорбита точки $x \in X$ называется *рекуррентной*⁶, если она возвращается в сколь угодно малую окрестность точки x , т.е. найдется последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ такая, что $\varphi_{t_k}x \rightarrow x$ (аналогично определяется рекуррентность в отрицательном направлении).

Нерекуррентная полуорбита является локально-замкнутой. Положительная полуорбита называется *дивергентной* или *уходящей на бесконечность*, если для любого компакта $K \subset X$ найдется число $T > 0$ такое, что $\varphi_t x \notin K$ для всех $t \geq T$.

Точка $x \in X$ называется *блуждающей*, если найдутся окрестность $O(x) \subset X$ и число $T > 0$ такие, что $\varphi_t(O(x)) \cap O(x) = \emptyset$ для всех $t \geq T$. Ясно, что обе полуорбиты блуждающей точки нерекуррентны. Множество $\Omega \subset X$ всех неблуждающих точек является замкнутым и инвариантным.

Поток (X, φ_t) называется *топологически перемешивающим*, если для любых двух открытых множеств $U, V \subset X$ найдется $T > 0$ такое, что $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ для всех $t \geq T$. Поток на метрическом пространстве (X, d) называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $d(x, y) < \delta$ вытекает $d(\varphi_t x, \varphi_t y) < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Замыкание любой орбиты равномерно непрерывного потока является минимальным множеством. Ясно, что равномерно непрерывный поток не может быть топологически перемешивающим.

Предположим, что μ – борелевская мера на топологическом пространстве X (это означает, что σ -алгебра $\Omega(X)$ измеримых множеств получена пополнением σ -алгебры борелевских множеств в X и для любого множества $A \subset X$ конечной меры и любого $\varepsilon > 0$ найдутся компакт $K \subset A$ и открытое множество $U \supset A$ такие, что $\mu(U - K) < \varepsilon$). В дальнейшем борелевские меры предполагаются *локально-конечными*, т.е. конечными на компактных подмножествах в X .

Если борелевская мера μ конечна и инвариантна относительно однопараметрического потока, то по теореме Пуанкаре о возвращении μ -почти все траектории рекуррентны в обоих направлениях.

⁴В действительности мы будем рассматривать замкнутые подмножества в однородных пространствах групп Ли.

⁵Для $F = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$ обычно исключают вырожденный случай, когда плотная траектория локально замкнута и некомпактна (это может произойти для $\dim(X) = \dim(F)$).

⁶Мы пользуемся терминологией Готтшалка–Хедлунда. По Биркгофу свойство рекуррентности гораздо более ограничительно и в компактном случае совпадает со свойством минимальности замыкания.

Носителем $\text{supp}(\mu)$ борелевской меры μ (в топологическом смысле) называется наименьшее замкнутое множество полной меры. Предположим, что $\text{supp}(\mu) = X$, т.е. мера каждого открытого множества положительна (такая мера называется *строго положительной*). Тогда из эргодичности потока $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$ вытекает его топологическая транзитивность (более того, почти все точки из X имеют плотные орбиты в X). Если мера μ конечна, то из метрического перемешивания следует топологическое. Мера μ на римановом многообразии называется *гладкой*, если она эквивалентна мере объема (ясно, что гладкая мера строго положительна).

Поток (X, φ_t) называется *строго эргодическим*, если вероятностная инвариантная борелевская мера единственна.⁷ Примером такого потока является прямолинейный эргодический поток на торе.

Для топологического пространства X через $\mathcal{P}(X)$ обозначим аффинное пространство вероятностных мер на X с $*$ -слабой топологией, т.е. $\mu_n \rightarrow \mu$, если $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$ для каждой непрерывной функции f на X с компактным носителем (пространство таких функций дальше будем обозначать через $C_c(X)$). Известно, что для компактного X пространство $\mathcal{P}(X)$ также компактно. Отсюда легко выводится, что любой каскад или поток на компактном пространстве всегда обладает инвариантной вероятностной мерой. В частности, строго эргодический каскад (поток) является минимальным, если единственная инвариантная вероятностная мера строго положительна.

Потоки $(X, \varphi_{\mathbb{R}})$ и $(X', \varphi'_{\mathbb{R}})$ называются *топологически изоморфными*, если найдется гомеоморфизм $\alpha: X \rightarrow X'$, устанавливающий их сопряженность:

$$\alpha(\varphi_t x) = \varphi'_t \alpha(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Если гомеоморфизм α переводит $\varphi_{\mathbb{R}}$ -орбиты в $\varphi'_{\mathbb{R}}$ -орбиты с сохранением направления, то потоки называются *топологически эквивалентными*.

В. Группы Ли и алгебры Ли. Пусть G – связная односвязная вещественная группа Ли. Всюду далее $1 \in G$ обозначает единичный элемент, а $Z(G)$ – центр в G . $\overline{M} \subset G$ будет обозначать замыкание подмножества $M \subset G$, а $H_0 \subset G$ – связную компоненту единицы замкнутого подмножества $H \subset G$, содержащего $1 \in G$.

Максимальная связная нормальная нильпотентная (соответственно, разрешимая) подгруппа называется *нильрадикалом* (соответственно, *радикалом*) в G . Имеет место разложение Леви в полупрямое произведение $G = L \cdot R$ радикала R и максимальной полупростой подгруппы L . Связная односвязная полупростая группа L в свою очередь раскладывается в прямое произведение простых множителей. Для полупростой группы L через $K \subset L$ обозначим произведение всех компактных множителей, а через $S \subset L$ – всех некомпактных. Разложение $L = K \times S$ будем называть разложением на компактную и некомпактную части.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G . Каждый элемент $x \in \mathfrak{g}$ алгебры Ли индуцирует однопараметрическую подгруппу $\exp(\mathbb{R}x) \subset G$ с единичным касательным вектором x .

⁷ Данное определение соответствует термину “unique ergodicity”. Если потребовать, чтобы поток вдобавок являлся минимальным, получится “strict ergodicity”.

Под *присоединенным представлением* $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ в данной работе мы будем понимать дифференциал сопряжения $h \rightarrow g^{-1}hg$, т.е. $\text{Ad}_g(x) = \left. \frac{dg^{-1} \exp(tx)g}{dt} \right|_{t=0}$. Заметим, что $\text{Ad}_g \text{Ad}_{g'} = \text{Ad}_{g'g}$.⁸

Для любой замкнутой подгруппы $\Gamma \subset G$ левоинвариантная мера Хаара на G индуцирует гладкую меру объема ν на левом однородном пространстве $\Gamma \backslash G$. Если мера ν является конечной и G -инвариантной относительно правого действия G , то $\Gamma \backslash G$ называется *пространством конечного объема*. Если $\Gamma \subset \Lambda \subset G$, то пространство $\Gamma \backslash G$ имеет конечный объем $\iff$ пространства $\Lambda \backslash G$ и $\Gamma \backslash \Lambda$ имеют конечный объем. Если Γ дискретна и $\nu(\Gamma \backslash G) < \infty$, то мера ν автоматически является G -инвариантной и Γ называется *решеткой* в G .

Подгруппа $\Gamma \subset G$ называется *равномерной*, если $\Gamma \backslash G$ – компакт. Равномерная дискретная подгруппа всегда является решеткой. Известно, что полупростая группа Ли G содержит как равномерные, так и неравномерные решетки. Любая решетка в разрешимой группе является равномерной, но не каждая даже нильпотентная группа Ли содержит хотя бы одну решетку. Решетки $\Gamma, \Gamma' \subset G$ называются *соизмеримыми*, если пересечение $\Gamma \cap \Gamma'$ имеет конечный индекс в Γ и Γ' . Решетка $\Gamma \subset G$ называется *несократимой*, если она не содержит нетривиальных нормальных в G подгрупп (это эквивалентно тому, что пересечение $\Gamma \cap Z(G)$ тривиально).

Приведем несколько определений из теории алгебраических групп в той общности, которая нам понадобится; подробнее см. [Hu] или [VO]. Подмножество $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ называется (вещественно-) *алгебраическим* или *замкнутым по Зарисскому*, если оно выделяется полиномиальным уравнением от матричных элементов с вещественными коэффициентами. Такое определение задает на $SL(n, \mathbb{R})$ и на ее алгебраических подгруппах так называемую *топологию Зарисского*. Обычную топологию на $SL(n, \mathbb{R})$ будем называть *евклидовой*.⁹ Алгебраическая группа имеет конечное число компонент связности относительно евклидовой топологии.

Наименьшая алгебраическая подгруппа $A(H) \subset SL(n, \mathbb{R})$, содержащая $H \subset SL(n, \mathbb{R})$, называется *алгебраической оболочкой* или *замыканием по Зарисскому* группы H (при этом говорят, что H *плотна по Зарисскому* в $A(H)$). Напомним, что матрица $g \in SL(n, \mathbb{R})$ называется *унипотентной*, если найдется натуральное n такое, что $(g - E)^n = 0$, где E – единичная матрица (это равносильно тому, что все собственные значения g равны 1). $g \in SL(n, \mathbb{R})$ называется *полупростой* матрицей, если над полем $\mathbb{C}$ она приводится к диагональному виду, и $\mathbb{R}$ -*диагонализуемой*, если она приводится к диагональному виду над $\mathbb{R}$. Каждый элемент g в алгебраической группе $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ является произведением $g = g_s \times g_u$ коммутирующих полупростого и унипотентного элементов $g_s, g_u \in H$. Каждая абелева алгебраическая подгруппа $A \subset H$ из полупростых элементов раскладывается в произведение $A = T \times V$ тора T и односвязной $\mathbb{R}$ -диагонализуемой подгруппы V .

Подгруппа $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ называется *унипотентной*, если она целиком состоит из унипотентных элементов. Известно, что связные унипотентные подгруппы в $SL(n, \mathbb{R})$, так же как и компактные, являются алгебраическими. Полупростая

⁸Такое определение Ad вызвано тем, что мы рассматриваем левые однородные пространства.

⁹Иногда ее называют хаусдорфовой, подчеркивая отличие от нехаусдорфовой топологии Зарисского.

подгруппа в $SL(n, \mathbb{R})$ имеет конечный индекс в своей алгебраической оболочке, что по существу тоже позволяет рассматривать ее как алгебраическую группу. Произвольная полупростая группа L проектируется с дискретным ядром $Z(L)$ на алгебраическую подгруппу $\text{Ad } L$ в группе $SL(\mathfrak{l}) = SL(n, \mathbb{R})$ унимодулярных линейных преобразований своей алгебры Ли $\mathfrak{l}$, $\dim(\mathfrak{l}) = n$. $\mathbb{R}$ -рангом полупростой группы Ли L называют размерность максимальной $\mathbb{R}$ -диагонализуемой подгруппы в $\text{Ad } L$. Для примера: $\text{rank}_{\mathbb{R}} SL(n, \mathbb{R}) = n - 1$, $\text{rank}_{\mathbb{R}} SO(1, n) = 1$, $\mathbb{R}$ -ранг компактной группы равен 0. Заметим, что компактная полупростая группа не содержит однопараметрических унипотентных подгрупп и, напротив, простая некомпактная группа Ли порождается такими подгруппами.

Редуктивной подгруппой $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ называется подгруппа с вполне приводимым действием на $\mathbb{R}^n$. Известно, что алгебраическая редуктивная подгруппа есть коммутативное произведение полупростой группы и абелевой группы, состоящей из полупростых элементов.

Если подгруппа $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ выделяется полиномиальным уравнением с рациональными коэффициентами, она называется $\mathbb{Q}$ -определенной алгебраической группой. Если $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ определена над $\mathbb{Q}$, то группа ее рациональных точек $H_{\mathbb{Q}} = H \cap SL(n, \mathbb{Q})$ плотна в H . Алгебраическая оболочка любой подгруппы $H \subset SL(n, \mathbb{Q})$ определена над $\mathbb{Q}$.

Пусть теперь $\rho: G \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ – любое конечномерное представление связной группы Ли G . Говорят, что подгруппа $H \subset G$ *плотна по Зарисскому в представлении ρ* , если алгебраические оболочки $\rho(H)$ и $\rho(G)$ совпадают. Представление называют *унипотентным*, если подгруппа $\rho(G) \subset SL(n, \mathbb{R})$ унипотентна. Хорошо известны следующие результаты (все они, если не оговорено противное, содержатся в книге [Rag] и обзоре [VGS]).

ТЕОРЕМА В.1 (Мальцев). *Любая решетка в нильпотентной группе Ли N плотна по Зарисскому во всех конечномерных унипотентных представлениях.*

ТЕОРЕМА В.2 (Борель). *Пусть $L = K \times S$ – разложение полупростой группы Ли на компактную и некомпактную части и решетка $\Gamma \subset L$ такова, что $L = \overline{\Gamma S}$. Тогда Γ плотна по Зарисскому во всех конечномерных представлениях L .*

Эти два результата были распространены на общие группы Ли следующим образом.

ТЕОРЕМА В.3 (Дани, [Da80]). *Пусть $\rho: G \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ – конечномерное представление связной группы Ли G и Γ – решетка в G . Тогда алгебраическая оболочка $\rho(\Gamma)$ содержит все унипотентные однопараметрические подгруппы в $\rho(G)$.*

Один из приемов построения решеток в полупростых группах состоит в следующем.

ТЕОРЕМА В.4 (Борель–Хариш–Чандра). *Если $L \subset SL(n, \mathbb{R})$ является $\mathbb{Q}$ -определенной редуктивной алгебраической подгруппой без нетривиальных $\mathbb{Q}$ -характеров $\chi: L \rightarrow \mathbb{R}^*$ (это заведомо так, если L полупроста), то пересечение $L_{\mathbb{Z}} = L \cap SL(n, \mathbb{Z})$ является решеткой в L .*

Решетки $L_{\mathbb{Z}} \subset L = SK$ и $L_{\mathbb{Z}}K \cap S \subset S$ являются примерами так называемых арифметических решеток. Точнее: решетка Γ в полупростой группе Ли L называется арифметической, если найдутся $\mathbb{Q}$ -определенная группа $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ и эпиморфизм $\rho: H \rightarrow \text{Ad } L$ с компактным ядром такие, что группа $\rho(H_{\mathbb{Z}})$ соизмерима с $\text{Ad } \Gamma$.

Решетка Γ в полупростой группе S без компактных множителей называется неприводимой, если $\overline{\Gamma S'} = G$ для любой связной нетривиальной нормальной подгруппы $S' \subset S$. Известно, что для любой решетки Γ в полупростой группе S без компактных множителей найдутся подгруппа конечного индекса $\Gamma' \subset \Gamma$ и разложение $S = \prod_{i=1}^n S_i$ в произведение нормальных подгрупп такие, что $\Gamma' = \prod_{i=1}^n (\Gamma' \cap S_i)$ и $\Gamma' \cap S_i$ является неприводимой решеткой в S_i для каждого $i = 1, \dots, n$. Центральным результатом в теории арифметических решеток является

ТЕОРЕМА В.5 (Маргулис, см. [Ma90a]). *Если Γ – неприводимая решетка в полупростой группе S без компактных множителей и $\text{rank}_{\mathbb{R}} S \geq 2$, то Γ арифметична.*

Заметим, что первые примеры неарифметических решеток в $SO(1, n)$, $n = 3, 4, 5$, были построены Макаровым и Винбергом.

Нам понадобятся также несколько утверждений об устройстве решеток. Заметим, что если Γ – решетка в G и H – связная нормальная подгруппа в G , то замкнутость произведения ΓH равносильна тому, что пересечение $\Gamma \cap H$ является решеткой в H . Далее в теоремах В.6–В.9 группы Ли предполагаются связными и односвязными.

ТЕОРЕМА В.6 (Мостов). *Если Γ – решетка в разрешимой группе Ли R и $N \subset R$ – нильрадикал в R , то пересечение $\Gamma \cap N$ является решеткой в N .*

Обобщением этого утверждения является

ТЕОРЕМА В.7 (Старков, [St93]). *Если Γ – решетка в группе Ли G с разложением Леви $G = L \cdot R$ и $N \subset R$ – нильрадикал в G , то пересечение $\Gamma \cap LN$ является решеткой в LN .*

Доказательство опирается на одно утверждение из работы Витте [Wi87], из которого следует наш результат в случае $G = \overline{\Gamma S R}$, где $S \subset L$ – некомпактная часть L . Вообще, случай $G = \overline{\Gamma S R}$ является наиболее привлекательным с точки зрения устройства решетки Γ . Дело в том, что имеет место

ТЕОРЕМА В.8 (Витте, [Wi87]; Старков, [St87a]). *Если $G = \overline{\Gamma S R}$, то пересечение $\Gamma \cap R$ является решеткой в радикале R (следовательно, и пересечение $\Gamma \cap N$ является решеткой в нильрадикале N).*

Заметим, что в общем случае пересечение решетки с радикалом или нильрадикалом может не являться там решеткой (простейший пример: $G = SO(3) \times \mathbb{R}$ и Γ – решетка в цилиндре $SO(2) \times \mathbb{R}$, тривиально пересекающая $\mathbb{R}$). В самом общем случае имеет место важная

ТЕОРЕМА В.9 (Ауслендер). *Если Γ – решетка в группе Ли $G = L \cdot R$, то найдется тор $T \subset K \subset L$ такой, что пересечение $\Gamma \cap TR$ является решеткой в TR .*

С. Однопараметрические однородные потоки. Зафиксируем элемент $g \in G$ и рассмотрим линейный оператор Ad_g на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Относительно этого оператора комплексифицированная алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ имеет разложение на конечное число инвариантных корневых подпространств $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}$, где

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \exists n : (\text{Ad}_g - \lambda E)^n x = 0\}.$$

Так как $\text{Ad}_g[x, y] = [\text{Ad}_g x, \text{Ad}_g y]$, то $[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\theta}] \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda+\theta}$. Для вещественного λ положим $\mathfrak{g}^{\lambda} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} \cap \mathfrak{g}$, а для пары комплексно-сопряженных корней λ и $\bar{\lambda}$ положим $\mathfrak{g}^{\lambda} = \mathfrak{g}^{\bar{\lambda}} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} + \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\bar{\lambda}}) \cap \mathfrak{g}$. Мы получили разложение $\mathfrak{g} = \sum_{\lambda} \mathfrak{g}^{\lambda}$ в сумму инвариантных относительно Ad_g подпространств. Определим

$$\mathfrak{g}^{+} = \sum_{|\lambda| > 1} \mathfrak{g}^{\lambda}, \quad \mathfrak{g}^0 = \sum_{|\lambda| = 1} \mathfrak{g}^{\lambda}, \quad \mathfrak{g}^{-} = \sum_{|\lambda| < 1} \mathfrak{g}^{\lambda}.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{g}^{+}$ и $\mathfrak{g}^{-}$ являются нильпотентными подалгебрами, которые нормализуются подалгеброй $\mathfrak{g}^0$.

Пусть G^{+} , Q , G^{-} – аналитические подгруппы в G , соответствующие подалгебрам $\mathfrak{g}^{+}$, $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{g}^{-}$. Подгруппы G^{+} и G^{-} мы будем называть соответственно *расширяющейся* и *сжимающейся орисферическими* подгруппами (по отношению к элементу g). Подгруппу Q назовем *нейтральной*. Легко видеть, что

$$G^{+} = \{h \in G : g^n h g^{-n} \rightarrow 1, n \rightarrow +\infty\}, \quad G^{-} = \{h \in G : g^{-n} h g^n \rightarrow 1, n \rightarrow +\infty\},$$

причем обе подгруппы нильпотентны и нормализуются подгруппой Q . Подгруппа $U \subset G$, порожденная G^{+} и G^{-} , называется *нормальной подгруппой Ауслендера* для элемента $g \in G$.

Элемент g назовем *частично-гиперболическим*, если подгруппа $U = U(g)$ нетривиальна. В противном случае (если $Q = G$) элемент g назовем *квазиунипотентным*. Если к тому же все собственные значения оператора Ad_g равны 1, элемент g назовем *унипотентным*. Если оператор Ad_g диагонализуем над $\mathbb{C}$, элемент g назовем *редуктивным* или *полупростым*, а если он диагонализуем над $\mathbb{R}$, то g назовем $\mathbb{R}$ -диагонализуемым.¹⁰ Заметим, что одновременная редуктивность и унипотентность означают, что g – элемент центра $Z(G)$ (это вытекает из связности G). Одновременная редуктивность и квазиунипотентность означают, что Ad_g лежит в компактной подгруппе из $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Нетрудно доказать, что нормальная подгруппа Ауслендера U есть наименьшая среди всех нормальных подгрупп $H \subset G$ таких, что элемент $gH \in G/H$ является квазиунипотентным в группе G/H . *Нормальной подгруппой Дани* I для элемента $g \in G = LR$ называется наименьшая среди всех нормальных подгрупп $H \subset G$ таких, что $gH \in G/H$ квазиунипотентен в G/H и $gHR \in G/HR$ редуктивен в полупростой группе G/HR . Наконец, *нормальной подгруппой Мура* F для элемента $g \in G$ называется

¹⁰Вернее было бы говорить об Ad -унипотентности и Ad -редуктивности, чтобы не путать эти понятия с аналогичными терминами для алгебраических групп. Если будет возникать двусмысленность, мы так и будем поступать.

наименьшая среди всех нормальных подгрупп $H \subset G$ таких, что $gH \in G/H$ одновременно квазиунипотентен и редуکتивен в G/H .

Очевидно, что $U \subset I \subset F$. Если группа G нильпотентна, то $U = I = 1$. Если G разрешима, то $U = I$. Если G полупроста, то $I = F$.

Пусть теперь $g_{\mathbb{R}}$ – однопараметрическая подгруппа в G . Очевидно, что подгруппы G^+, G^-, Q, U, I, F одни и те же для всех элементов $g_t, t \neq 0$, что позволяет определять их для $g_{\mathbb{R}}$. Редуکتивность, квазиунипотентность и частичная гиперболичность также не зависят от выбора $g_t \in g_{\mathbb{R}}$. Подгруппа $g_{\mathbb{R}}$ называется *унипотентной*, если таковы все ее элементы.

Всюду далее Γ обозначает решетку в G . *Однородным потоком* $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$, индуцированным подгруппой $g_{\mathbb{R}} \subset G$, называется правое действие $g_{\mathbb{R}}$ на левом однородном пространстве $\Gamma \backslash G$, снабженном G -инвариантной гладкой мерой объема ν . Пусть d – левоинвариантная метрика на G . Тогда для любого $h \in G^-$

$$d(g_t, hg_t) = d(1, g_{-t}hg_t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

и поэтому орбиты G^- на $\Gamma \backslash G$ образуют сжимающееся слоение для потока $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ в метрике на $\Gamma \backslash G$, индуцированной метрикой d (причем скорость сжатия экспоненциальна). Аналогично, орбиты G^+ на $\Gamma \backslash G$ образуют расширяющееся слоение для нашего потока. Если хотя бы одно из этих слоений на $\Gamma \backslash G$ нетривиально, то и другое нетривиально (в силу сохранения меры объема на $\Gamma \backslash G$) и наш поток является равномерно частично-гиперболическим.¹¹ Для квазиунипотентного потока скорость разбегания близких траекторий не выше полиномиальной.

Нормальные подгруппы $U \subset I \subset F$ играют центральную роль для изучения эргодических свойств потока $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ относительно конечной G -инвариантной меры ν .

ТЕОРЕМА С.1 (феномен Маутнера; Мур, [Мо80]). 1) Пусть $\rho: G \rightarrow U(\mathcal{H})$ – унитарное представление в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $h \in \mathcal{H}$ – такой элемент, что $\rho(g_{\mathbb{R}})h \equiv h$. Тогда $\rho(F)h \equiv h$.

2) Поток $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ является эргодическим $\iff$ поток $(\overline{\Gamma F} \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ является эргодическим $\iff G = \overline{\Gamma F}g_{\mathbb{R}}$.

Красивый способ доказательства этой важной теоремы элементарными методами предложен в [Ма91b]; подробности см. в [МТ96]. Вторая часть теоремы выводится из первой, если рассмотреть непрерывное унитарное представление G в $L^2(\Gamma \backslash G, \nu)$, даваемое формулой $\rho(g)f(x) = f(xg)$, $f \in L^2(\Gamma \backslash G, \nu)$, $x \in \Gamma \backslash G$, $g \in G$. Как следствие можно заметить, что топологически транзитивный однородный поток на пространстве конечного объема является эргодическим. В самом деле, если $G = \overline{\Gamma}cg_{\mathbb{R}}$, то $G = \overline{\Gamma}cg_{\mathbb{R}}c^{-1}$, и поэтому поток $(\Gamma \backslash G, cg_{\mathbb{R}}c^{-1})$ эргодичен. Но этот поток метрически и топологически сопряжен с исходным потоком посредством отображения $\alpha(\Gamma h) = \Gamma hc^{-1}$. Заметим также, что $(\overline{\Gamma F} \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ является равномерно непрерывным факторпотокотом исходного потока (и среди однородных факторов с таким свойством является максимальным).

¹¹Пожалуй, впервые теория частично-гиперболических потоков для изучения однородных действий была применена Степиным [Ste69].

ТЕОРЕМА С.2 (Дани, [Da77]). *Поток $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ является перемешивающим $\iff G = \overline{\Gamma\Gamma}$.*

ТЕОРЕМА С.3 (Дани, [Da76,77]). *Поток $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ имеет положительную энтропию $\iff$ он является частично-гиперболическим (т.е. $U \neq 1$); и является K -поток $\iff G = \overline{\Gamma U}$ (т.е. $(\overline{\Gamma U} \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ является максимальным факторпоток нулевой энтропии).*

Заметим, что положительность энтропии для частично-гиперболического однородного потока нетрудно установить непосредственно. Ее тривиальность для квазиунипотентного потока в компактном случае следует из оценки Кушниренко [Ку]. Точная формула для энтропии [Da77] (которой мы не будем пользоваться) такая:

$$e(g_1) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа оператора Ad_{g_1} на $\mathfrak{g}$. В компактном случае она была получена Боуэном [Bo71] и следует из общей формулы Миллионшикова–Песина [Mi76], [Pe] для энтропии гладкой динамической системы.

В частности, унитарные потоки на факторпространстве простой группы Ли по решетке являются перемешивающими, а частично-гиперболические к тому же и K -потоками.

Далеко не каждое пространство конечного объема несет на себе эргодический однородный поток. Оказывается, существование такого потока накладывает сильные ограничения на структуру пространства $\Gamma \backslash G$:

ТЕОРЕМА С.4 (Витте, [Wi87]; Старков, [St87a]). *Если на $\Gamma \backslash G$ существует эргодический однородный поток, то $G = \overline{\Gamma S \mathbb{R}}$, и потому пересечение $\Gamma \cap R$ является (равномерной) решеткой в R .*

Существование перемешивающего потока сказывается на строении пространства $\Gamma \backslash G$ еще сильнее:

ТЕОРЕМА С.5 (Витте, [Wi87]). *Если на $\Gamma \backslash G$ действует однородный перемешивающий поток, то $G = LN$, причем решетка Γ является плотной по Зарискому в любом конечномерном представлении, унитарном на N .*

Заметим, что этот результат (a posteriori) нетрудно вывести из теорем В.7, С.4, В.1 и В.2.

Обозначим через $G_{\infty} \subset G$ наименьшую нормальную подгруппу, содержащую подгруппу Леви $L \subset G$. Нам понадобится также следующий критерий наличия перемешивающих потоков на $\Gamma \backslash G$.

ТЕОРЕМА С.6 (Дани, [Da77]; Старков, [St95c]). *Если $G \neq \overline{\Gamma G_{\infty}}$, то на $\Gamma \backslash G$ нет перемешивающих потоков. Если $G = \overline{\Gamma G_{\infty}}$, то любой эргодический поток на $\Gamma \backslash G$ является перемешивающим.*

Первая часть этого результата легко следует из того факта, что на факторпространстве $\overline{\Gamma G_{\infty}} \backslash G$ транзитивно действует радикал R . Но разрешимое однородное пространство всегда однородным образом расслаивается над тором (см., к примеру, В.5) и поэтому не несет на себе перемешивающих однородных потоков.

Предположим теперь, что поток $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ *неэргодичен*. Тогда в силу эргодического разложения, найденного автором в [St83], пространство $\Gamma \setminus G$ разбивается на гладкие подмногообразия $E_h(g_{\mathbb{R}}) = \overline{\Gamma h I g_{\mathbb{R}}}$, где $h \in G$, причем на каждом $E_h(g_{\mathbb{R}})$ существует гладкая $g_{\mathbb{R}}$ -инвариантная эргодическая мера. Эргодические подмногообразия не обязаны быть однородными подпространствами в $\Gamma \setminus G$, т.е. в G может не быть подгруппы с транзитивным действием на $E_h(g_{\mathbb{R}})$ (впрочем, поток $(E_h(g_{\mathbb{R}}), g_{\mathbb{R}})$ конечнолистно покрывается некоторым эргодическим однородным потоком [St89]).

Д. Унипотентные потоки. Если наш однородный поток индуцирован унипотентной подгруппой $u_{\mathbb{R}}$, эргодическое разложение устроено весьма просто: $\Gamma \setminus G$ разбивается на однородные эргодические подпространства. Чтобы доказать однородность $E_1(u_{\mathbb{R}}) = \overline{\Gamma I u_{\mathbb{R}}}$, достаточно рассмотреть случай, когда нормальная подгруппа Дани I тривиальна. Так как $u_{\mathbb{R}} \subset S \cdot N$, где N – нильрадикал в G , то из $I = 1$ следует $u_{\mathbb{R}} \subset N \subset G$. Пусть $R' = T \cdot R$ – подгруппа из теоремы В.9 Ауслендера, которая пересекается с Γ по решетке. Осталось применить следующий результат к унипотентному потоку $(\Gamma \cap R' \setminus R', u_{\mathbb{R}})$.

ТЕОРЕМА D.1 (Старков, [St84]). *Если $(\Gamma \setminus G, u_{\mathbb{R}})$ – унипотентный поток на компактном разрешимом однородном пространстве, то замыкание $\overline{\Gamma u_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G$ является компактным минимальным однородным подпространством в $\Gamma \setminus G$.*

Заметим, что этот результат выводится из теоремы Ауслендера [AGH] о минимальности эргодического потока на нильпотентном однородном пространстве.

Однородность остальных эргодических подмногообразий $E_g(u_{\mathbb{R}})$ вытекает из очевидной формулы $E_g(u_{\mathbb{R}}) = E_1(g u_{\mathbb{R}} g^{-1})g$. Так как все эргодические компоненты в разрешимом случае являются минимальными, то (в общем случае) множества $E_g(u_{\mathbb{R}})$ для разных $g \in G$ либо не пересекаются, либо совпадают. Поскольку почти все орбиты эргодического потока являются всюду плотными, нетрудно доказать, что почти всегда $\overline{\Gamma g u_{\mathbb{R}}} = E_g(u_{\mathbb{R}})$. Итак, имеет место

ТЕОРЕМА D.2 (Старков, [St83]). *По отношению к унипотентному потоку $(\Gamma \setminus G, u_{\mathbb{R}})$ пространство разбивается на однородные подпространства $\Gamma g P_g$ с конечной P_g -инвариантной $u_{\mathbb{R}}$ -эргодической мерой. Для почти всех $g \in G$ пространство $\Gamma g P_g$ совпадает с замыканием орбиты $\Gamma g u_{\mathbb{R}}$.*

Итак, эргодические компоненты унипотентных потоков являются однородными подпространствами конечного объема. Это позволяет при изучении унипотентных потоков сосредоточиться на эргодическом случае. Другой способ редукции к эргодическому случаю заключается в следующем.

ТЕОРЕМА D.3 (Шах, [Sh91]). *Пусть H_g – наименьшая подгруппа в G такая, что $u_{\mathbb{R}} \subset H_g$ и орбита $\Gamma g H_g$ замкнута. Тогда $\Gamma g H_g$ имеет конечную H_g -инвариантную $u_{\mathbb{R}}$ -эргодическую меру.*

Заметим, что подпространства $\Gamma g H_g$ в теореме D.3 могут быть вложены одно в другое и поэтому, вообще говоря, в топологическом смысле не образуют разбиения пространства $\Gamma \setminus G$. Подгруппа H_g всегда является подгруппой в P_g (хотя для почти всех $g \in G$ они совпадают).

Дадим теперь критерий эргодичности для подпотока.

ТЕОРЕМА D.4 (Шах, [Sh91]). Пусть $u_{\mathbb{R}} \subset H \subset G$, пространство $\Gamma H \subset \Gamma \backslash G$ замкнуто и имеет конечную H -инвариантную меру, а $F \subset H$ – наименьшая нормальная подгруппа в H , содержащая унитарную подгруппу $u_{\mathbb{R}}$. Тогда поток $(\Gamma H, u_{\mathbb{R}})$ эргодичен $\iff \overline{\Gamma F} = \Gamma H$. В случае эргодичности решетка $\Gamma \cap H$ плотна в H относительно Ad_G -представления.

Для доказательства этого результата заметим, что F является подгруппой Маутнера для $u_{\mathbb{R}} \subset H$ и к тому же порождена однопараметрическими унитарными подгруппами. Теперь утверждение о плотности следует из теоремы В.3.

К этому результату близко примыкает

ТЕОРЕМА D.5 (Витте, [Wi85]). Если поток $(\Gamma \backslash G, u_{\mathbb{R}})$ унитарен и эргодичен, то $G = LN$, причем решетка Γ является плотной по Зарискому в любом конечномерном представлении, унитарном на N .

Рассмотрим правое действие $SL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$. Основным связующим звеном между теорией чисел и теорией однородных потоков служит следующий критерий Малера.

ТЕОРЕМА D.6 (см. [Rag]). Последовательность $SL(n, \mathbb{Z})g_i$ уходит на бесконечность в $SL(n, \mathbb{Z}) \backslash SL(n, \mathbb{R}) \iff$ найдется последовательность ненулевых векторов $e_i \in \mathbb{Z}^n$ такая, что $e_i g_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$.

Сосредоточимся теперь на траекториях унитарных потоков. Как следует из теоремы D.2, замыкание почти каждой траектории является однородным пространством конечного объема. Что можно сказать об остальных траекториях? Частичный ответ дает весьма нетривиальный результат, который получил название леммы Маргулиса.

ТЕОРЕМА D.7 (Маргулис, [Ma71]). Унитарный поток на пространстве конечного объема не имеет дивергентных полуорбит.

На самом деле Маргулис доказал это утверждение для унитарных потоков на $SL(n, \mathbb{Z}) \backslash SL(n, \mathbb{R})$. Для полупростых групп Ли $\mathbb{R}$ -ранга 1 оно было доказано Дани [Da84]. Случай произвольной полупростой группы Ли G сводится к рассмотренным двум благодаря теореме арифметичности Маргулиса (см. [Da86b]). Общий случай рассматривается так: ввиду того, что эргодические компоненты унитарного потока всегда однородны, достаточно рассмотреть эргодический поток $(\Gamma \backslash G, u_{\mathbb{R}})$. Но в силу теоремы C.4 этот поток компактно покрывает поток $(q(\Gamma) \backslash L, q(u_{\mathbb{R}}))$ на полупростом однородном пространстве (здесь $q: G = L \cdot R \rightarrow L$ – естественная проекция).

Существенным усилением леммы Маргулиса является следующий результат, согласно которому унитарная траектория не только бесконечно часто возвращается в некоторый компакт, но и проводит в нем большую часть времени.

ТЕОРЕМА D.8 (Дани, [Da86b]). Для любого унитарного потока $(\Gamma \backslash G, u_{\mathbb{R}})$, точки $x \in \Gamma \backslash G$ и $\varepsilon > 0$ найдется компакт $C \subset \Gamma \backslash G$ такой, что

$$l\{t \in [0, T] : xu_t \in C\} \geq (1 - \varepsilon)T \text{ для всех } T \geq 0.$$

Здесь l обозначает лебегову меру на $\mathbb{R}$. Мы продемонстрируем доказательство теорем D.7, D.8 на простейшем примере: $G = SL(2, \mathbb{R})$, $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$. Пусть

$$D_s = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < s\}, \quad K_s = \{g \in G : \mathbb{Z}^2 g \cap D_s = \emptyset\}.$$

По критерию Малера K_s является компактом в $\Gamma \setminus G$. Вектор $e \in \mathbb{Z}^2$ назовем *примитивным*, если $\alpha e \in \mathbb{Z}^2 \iff \alpha \in \mathbb{Z}$. Пусть $\{e_i\}$ – максимальный набор попарно неколлинеарных примитивных векторов (т.е. $\mathbb{Z}e_i \cap \mathbb{Z}e_j = 0, i \neq j$, и $\bigcup_i \mathbb{Z}e_i = \mathbb{Z}^2$). Возьмем произвольную унитарную подгруппу $\{u_t\} \subset G$ и зафиксируем $g \in G, \varepsilon > 0$. Заметим, что решетка $\mathbb{Z}^2 g$ для $g \in G$ имеет площадь фундаментального параллелограмма равную 1. Пусть

$$A_i(T) = \{t \in [0, T] : e_i g u_t \in D_\varepsilon\}, \quad B_i(T) = \{t \in [0, T] : e_i g u_t \in D_1\}$$

и $a_i(T) = l(A_i(T)), b_i(T) = l(B_i(T))$. Так как точка $e_i g u_t$ движется по прямой с постоянной скоростью, $a_i(T) \leq 2\varepsilon b_i(T)$ для достаточно больших T . Отсюда

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_i a_i(T)}{\sum_i b_i(T)} \leq 2\varepsilon.$$

Основное замечание: $B_i(T) \cap B_j(T) = \emptyset, i \neq j$ (иначе e_i и e_j порождали бы решетку с площадью фундаментального параллелограмма менее 1). Поэтому $\sum_i b_i(T) \leq T$. Теперь, поскольку $\sum_i A_i(T) = \{t \in [0, T] : g u_t \notin K_\varepsilon\}$, мы выводим $l(t \in [0, T] : g u_t \in K_\varepsilon) \geq (1 - 4\varepsilon)T$ для достаточно больших T .

Для $n \geq 3$ основная трудность не в том, что точка $e_i g u_t$ движется по полиномиальному закону, а в том, что множества $B_i(T)$ не обязаны быть дизъюнктными (и поэтому приходится применять довольно сложное индуктивное рассуждение).

Пусть μ – локально-конечная эргодическая мера для унитарного потока. Тогда компакт C для каждой точки $x \in \Gamma \setminus G$ можно выбрать таким, что $\mu(C) > 0$. Взяв теперь всюду положительную функцию $f \in L^1(\Gamma \setminus G, \mu)$ и применив эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина, в результате усреднения мы почти всюду должны получить положительную константу f^* . Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА D.9 (Дани, [Da84]). *Локально-конечная эргодическая мера для унитарного потока на пространстве конечного объема является конечной.*

Этот результат можно обобщить на более широкий класс подгрупп. Для связанных унитарных подгрупп $H \subset G$ конечность локально-конечных мер доказана Дани [Da84]. Имеется и более общий результат:

ТЕОРЕМА D.10 (Маргулис, [Ma86]). *Если $H = S_H N_H$, где N_H – унитарна в G и нормальна в H и S_H – полупростая группа без компактных множителей, то любая локально-конечная эргодическая мера на $\Gamma \setminus G$ является конечной.*

Заметим, что из этого результата можно вывести теорему В.4 Бореля–Хариш–Чандры для полупростых групп. В самом деле, пусть $H \subset SL(n, \mathbb{R})$ – полупростая $\mathbb{Q}$ -определенная группа без компактных множителей. Тогда произведение $SL(n, \mathbb{Z})H$ замкнуто и поэтому мера Хаара на H индуцирует H -эргодическую локально-конечную меру на $SL(n, \mathbb{Z}) \cap H \setminus H$. Она обязана быть конечной и, следовательно, H пересекает $SL(n, \mathbb{Z})$ по решетке.

Наконец, заметим, что любая подгруппа $H \subset G$, порожденная однопараметрическими унитарными в G подгруппами, удовлетворяет условиям теоремы D.10 (см., например, [Sh91]). Следовательно, любая локально-конечная H -эргодическая мера на $\Gamma \setminus G$ является конечной.

§ 1. Поверхности постоянной отрицательной кривизны

1. Напомним вкратце основные факты из гиперболической геометрии. Плоскость Лобачевского $\mathbb{H}^2$ постоянной отрицательной кривизны $-\lambda^2$ в модели Пуанкаре является комплексной полуплоскостью $y = \text{Im}(z) > 0$ с метрикой $dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\lambda^2 y^2}$. Прямая $y = 0$, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется абсолютом. Группа $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ всех изометрий $\mathbb{H}^2$ состоит из комбинаций отражения $s(z) = -\bar{z}$ и дробно-линейных преобразований

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Группа $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ всех дробно-линейных преобразований состоит из всех изометрий $\mathbb{H}^2$, сохраняющих ориентацию, и является связной компонентой группы $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$. Поэтому если

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad \text{и} \quad f_g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

то соответствие $g \rightarrow f_g$ задает эпиморфизм $f: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ с ядром $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \in SL(2, \mathbb{R})$ (или, что то же самое, изоморфизм $\hat{f}: PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$).

Далее $G = SL(2, \mathbb{R})$, B – двумерная разрешимая подгруппа в G всех верхнетреугольных матриц, $K = SO(2, \mathbb{R})$ – максимальная компактная подгруппа в G .

Любую точку $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ можно представить в виде

$$z = f_{g_z}(z_0), \quad \text{где} \quad z_0 = i, \quad g_z = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \in B.$$

В частности, действия B и, тем более, G на $\mathbb{H}^2$ транзитивны. Стабилизатор точки $z_0 = i$ состоит в точности из подгруппы $K = SO(2, \mathbb{R})$. Это означает, что отображение $\varphi(gK) = f_g(i)$ устанавливает диффеоморфизмы

$$\varphi: G/K \rightarrow \mathbb{H}^2 \quad \text{и} \quad \hat{\varphi}: PSL(2, \mathbb{R})/PSO(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2.$$

Метрика dl с точностью до множителя совпадает с метрикой, полученной из G -левоинвариантной и K -правоинвариантной метрики Киллинга d на G .

Обозначим через $S\mathbb{H}^2$ расслоение единичных касательных векторов над $\mathbb{H}^2$. Элементами $S\mathbb{H}^2$ служат всевозможные пары (z, v) , где $z \in \mathbb{H}^2$ и $v \in S_z\mathbb{H}^2$ – единичный касательный вектор к $\mathbb{H}^2$ в точке z . Дифференциал df_g любого действия f_g задает диффеоморфизм $S\mathbb{H}^2 \rightarrow S\mathbb{H}^2$. Поэтому мы получаем индуцированное действие df группы G на $S\mathbb{H}^2$.

Дифференциал df_k для любого элемента $k = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in K$ задает поворот единичной касательной окружности $S^1 = S_i\mathbb{H}^2$ на угол 2φ . Поэтому ядром индуцированного действия df на $S\mathbb{H}^2$ является снова $\mathbb{Z}_2 \subset G$.

Зафиксируем единичный касательный вектор $e = (0, 1)$ в точке $z_0 = i$. Тогда любая пара (z, v) получается из пары (i, e) путем подходящей подкрутки $df_k, k \in K$, единичной окружности в $S_{z_0}\mathbb{H}^2$ и последующего переноса df_{g_z} точки i в точку z . Следовательно, отображение $F(g) = df_g(i, e)$ задает накрытие $F: G \rightarrow S\mathbb{H}^2$ со слоем $\mathbb{Z}_2$ и одновременно диффеоморфизм $\hat{F}: PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow S\mathbb{H}^2$. Попутно мы установили, что $G = BK = KB$. Заметим, что если $g \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$, то отображению $df_g: S\mathbb{H}^2 \rightarrow S\mathbb{H}^2$ соответствует левый сдвиг

$$L_g: PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}), \quad L_g(h) = gh, \quad h \in PSL(2, \mathbb{R})$$

(иначе говоря, $df_g \circ \hat{F} = \hat{F} \circ L_g$). Отражению $s: z \rightarrow -\bar{z}$ соответствует внешний автоморфизм Σ группы $PSL(2, \mathbb{R})$, $\Sigma(h) = \sigma h \sigma^{-1}$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом,

$$\Sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

2. Известно, что из любой точки $z \in \mathbb{H}^2$ в направлении любого вектора $v \in S_z\mathbb{H}^2$ исходит ровно одна геодезическая линия. Задав операцию параллельного переноса касательных векторов при движении вдоль нее, мы получим однопараметрический поток g_t на $S\mathbb{H}^2$, называемый геодезическим.

Легко проверить, что кривая $g_t(i, e) = ie^{\lambda t}$ задает геодезическую линию в $\mathbb{H}^2$, проходящую через $z_0 = i$ в направлении вертикального вектора $e \in S_{z_0}\mathbb{H}^2$ с единичной скоростью. Поскольку любая изометрия переводит геодезическую в геодезическую и G действует на $S\mathbb{H}^2$ транзитивно, то все геодезические исчерпываются кривыми вида $f_g(ie^{\lambda t})$. Геометрически они представляют собой полуокружности (или полупрямые), ортогонально подходящие к абсолюту $y = 0$. Пусть

$$A_t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t/2} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t/2} \end{pmatrix}, \quad H_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $ie^{\lambda t} = f_{A_t}(i)$, и поэтому любая геодезическая линия в $\mathbb{H}^2$ имеет вид $f_{gA_t}(i)$. Таким образом, $g_t(z, v) = df_{gA_t}(i, e)$, где $df_g(i, e) = (z, v)$, и поэтому g_t соответствует правому действию A_t на G .

Заметим, что подгруппы $A, U, H \subset G$ связаны соотношениями

$$A_{-t}U_sA_t = U_{e^{-\lambda t}s}, \quad A_{-t}H_sA_t = H_{e^{\lambda t}s},$$

и поэтому U и H — соответственно сжимающаяся и расширяющаяся орисферические подгруппы для A . Поскольку для левоинвариантной метрики d в G имеем

$$\begin{aligned} d(gA_t, gU_sA_t) &= d(gA_t, gA_tA_{-t}U_sA_t) = d(1, A_{-t}U_sA_t) \\ &= d(1, U_{e^{-\lambda t}s}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

то правые орбиты U в G образуют сжимающееся слоение для правого действия A на G . Следовательно, кривые $df_{gU_s}(i, e)$ в $S\mathbb{H}^2$ образуют сжимающееся слоение $\mathcal{U}$ для геодезического потока на $S\mathbb{H}^2$. Они называются сжимающимися оришками

и геометрически представляют собой окружности, касающиеся абсолюта (или горизонтальные прямые, если $v = (0, 1)$). Точнее, сжимающийся орицикл, заданный парой $(z, v) \in S\mathbb{H}^2$, представляет собой такую окружность (возможно бесконечного радиуса), проходящую через $z \in \mathbb{H}^2$ и касающуюся абсолюта, что вектор v является ее внутренней нормалью.

Аналогично, расширяющееся орициклическое слоение $\mathcal{H}$ в $S\mathbb{H}^2$ образовано кривыми $df_{g_{H_s}}(i, e)$. Расширяющийся орицикл, заданный парой $(z, v) \in S\mathbb{H}^2$, является окружностью, проходящей через $z \in \mathbb{H}^2$ и касающейся абсолюта, причем вектор v является ее внешней нормалью.

Итак, геодезический поток g_t на трехмерном многообразии $S\mathbb{H}^2$ обладает расширяющимся и сжимающимся слоениями и потому является ановским. Оба слоения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{H}$ в данном случае имеют естественную параметризацию временем $s \in \mathbb{R}$ и представляют, таким образом, однопараметрические потоки на $S\mathbb{H}^2$. Заметим, что такая параметризация является равномерной: геодезический поток за время $t > 0$ сжимает слои $\mathcal{U}$ в $e^{\lambda t}$ раз и во столько же раз растягивает слои $\mathcal{H}$. Параметризация каждого орицикла в $S\mathbb{H}^2$ длиной его проекции в $\mathbb{H}^2$ отличается от параметризации по времени на постоянный множитель λ .

3. Напомним, что *фуксовой группой* называется любая дискретная подгруппа $\Gamma \subset \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$. Произвольная гладкая ориентируемая поверхность M постоянной кривизны $k(M) = -\lambda^2$ получается как факторпространство $\mathbb{H}^2$ с метрикой кривизны $-\lambda^2$ вдоль орбит действия некоторой фуксовой группы, не имеющей элементов конечного порядка (т.е. элементов, сопряженных элементам из $PSO(2, \mathbb{R})$).¹² Следовательно,

$$M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2 = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})/PSO(2, \mathbb{R}) \quad \text{и} \quad SM = \Gamma \backslash S\mathbb{H}^2 = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}).$$

С таким же успехом можно считать, что $M = \tilde{\Gamma} \backslash G/K$ и $SM = \tilde{\Gamma} \backslash G$, где $\tilde{\Gamma} \subset G$ — прообраз Γ при накрытии $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ (причем в $\tilde{\Gamma}$ нет элементов конечного порядка кроме ± 1).

Потоки g_t , u_t и h_t на $S\mathbb{H}^2$ накрывают соответствующие потоки на SM (которые мы будем обозначать так же). Итак, геодезический поток g_t на SM есть не что иное, как однородный поток $(\Gamma \backslash G, A_t)$. Орициклические потоки u_t и h_t на SM соответствуют однородным потокам $(\Gamma \backslash G, U_t)$ и $(\Gamma \backslash G, H_t)$.

Риманова метрика на M индуцирует гладкую меру объема vol . С другой стороны, $SM = \Gamma \backslash G$ несет на себе гладкую G -инвариантную меру ν , индуцированную бинвариантной мерой Хаара на G и называемую мерой Лиувилля. При этом $\text{vol}(M) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\nu(SM) < \infty$, т.е. Γ является решеткой в G . В этом случае меру Лиувилля ν мы будем нормировать условием $\nu(SM) = 1$.

Предположим, что $\theta: M_1 \rightarrow M_2$ есть изометрия двух ориентируемых поверхностей постоянной отрицательной кривизны $k(M_1) = k(M_2)$. Тогда $M_i = \Gamma_i \backslash \mathbb{H}^2$, где $\Gamma_i \subset \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$, $i = 1, 2$, и θ поднимается до изометрии $\tilde{\theta}: \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$. Но $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = \mathbb{H}^2$ и поэтому $\tilde{\theta} \in \text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ — элемент, переводящий Γ_1 -орбиту любой точки $z \in \mathbb{H}^2$ в Γ_2 -орбиту точки $\tilde{\theta}(z)$, $z \in \mathbb{H}^2$. Следовательно, $\Gamma_2 = \tilde{\theta}\Gamma_1\tilde{\theta}^{-1}$. Если $\tilde{\theta} \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$, т.е.

¹²Если Γ содержит элементы конечного порядка, то M является поверхностью с особенностями или по терминологии Терстона орбиформом. Пример: $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$.

поверхности имеют одинаковую ориентацию, то, отождествив $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ и $PSL(2, \mathbb{R})$, можно считать, что $\tilde{\theta} = \alpha \in PSL(2, \mathbb{R})$. Тогда изометрия поверхностей и ее дифференциал задаются отображениями

$$\theta: \Gamma_1 z \rightarrow \alpha \Gamma_1 z = \Gamma_2 \alpha z, \quad z \in \mathbb{H}^2, \quad d\theta: \Gamma_1 g \rightarrow \alpha \Gamma_1 g = \Gamma_2 \alpha g, \quad g \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

Если же их ориентации противоположны, то $\tilde{\theta} = \alpha s$, где $\alpha \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ и s – отражение. В этом случае изометрия поверхностей и ее дифференциал есть

$$\theta: \Gamma_1 z \rightarrow \alpha \Sigma(\Gamma_1) s(z) = \Gamma_2 \alpha s(z), \quad d\theta: \Gamma_1 g \rightarrow \alpha \Sigma(\Gamma_1) \Sigma(g) = \Gamma_2 \alpha \Sigma(g),$$

где $\Sigma(g) = \sigma g \sigma^{-1}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Таким образом, поверхности M_1 и M_2 изометричны тогда и только тогда, когда $k(M_1) = k(M_2)$ и подгруппы $\Gamma_1 = \pi_1(M_1)$ и $\Gamma_2 = \pi_1(M_2)$ внутренне сопряжены в $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$.

Известно, что изоморфизм $\pi_1(M_1)$ и $\pi_1(M_2)$ означает гомеоморфность M_1 и M_2 , но не их изометричность (даже если $k(M_1) = k(M_2)$). Это объясняется тем фактом, что две дискретные подгруппы (и даже решетки) Γ_1 и Γ_2 в $G = SL(2, \mathbb{R})$ могут быть изоморфны, но не сопряжены в G . Множество всех не сопряженных в G вложений Γ в G наделяется естественной топологией и называется пространством Тейхмюллера $T(\Gamma)$ дискретной группы Γ (подробнее см. обзор [VS]).

§ 2. Метрическая жесткость орициклического потока

1. Далее $M = \Gamma \backslash G/K$ – поверхность постоянной отрицательной кривизны, где $G = SL(2, \mathbb{R})$, $K = SO(2)$, и $SM = \Gamma \backslash G$ – ее единичное касательное расслоение. Предположим, что $\text{vol}(M) < \infty$, т.е. Γ – решетка в G и G -инвариантная мера ν на SM нормирована условием $\nu(SM) = 1$. Сформулируем основные результаты о поведении геодезического и орициклического потоков на SM (см. также [R84, 95b]).

Хорошо известно, что геодезический поток g_t эргодичен (Хопф [Ho]) и перемешивает (Хедлунд [He39]). Гельфанд и Фомин [GF] доказали, что он имеет счетнократный лебеговский спектр. Кроме того, геодезический поток является K -поток (Синай [Si60]). Отметим, что все эти результаты являются частными случаями результатов об ановских потоках [An]. Наиболее сильным метрическим свойством геодезического потока является его бернуллиевость (Орнштейн и Вейсс [OW]). На SM имеется континуум взаимно сингулярных g_t -эргодических вероятностных мер (Синай [Si72], Боуэн [Bo75]). Среди них стоит отметить меры длины, сосредоточенные на периодических орбитах; сингулярные к риманову объему, но в то же время строго положительные меры; а также меры с негладким носителем. Почти каждая орбита геодезического потока ввиду эргодичности плотна в SM . Кроме плотных и периодических орбит встречаются и орбиты, замыкание которых не является подмногообразием. Это относится, например, к локально замкнутым, но не замкнутым орбитам, а также к орбитам, замыкание которых локально представляет собой произведение канторова множества на интервал (так устроено, например, морсовское минимальное множество [Mor]). Заметим, что пример локально замкнутых, но не замкнутых орбит дают так называемые

гомоклинические точки, которые существуют у любых аносовских потоков. В окрестности же орбиты гомоклинической точки существует локально-несвязное компактное инвариантное множество, содержащее континуум различных минимальных множеств (и сосредоточенных на них эргодических мер) – см. [AS]. Если поверхность M некомпактна, то имеются и орбиты, уходящие на бесконечность в обоих направлениях.

Орициклический поток u_t (все сказанное в равной мере относится и к h_t) эргодичен (Хедлунд [He39]) и также имеет счетнократный лебеговский спектр (Парасюк [Pa]). Согласно Маркусу [Mar78] он перемешивает с любой кратностью. В отличие от геодезического потока орициклический поток имеет нулевую энтропию (Гуревич [Gu], в некомпактном случае см. Дани [Da77]). Если поверхность M компактна, то орициклический поток строго эргодичен (Фюрстенберг [Fu72]) и минимален (Хедлунд [He36]). В некомпактном случае за исключением гладкой меры ν на SM любая u_t -эргодическая вероятностная мера является мерой длины, сосредоточенной на периодических орициклах (Дани и Смили [DS]), а любая орбита либо плотна в SM , либо периодична (Хедлунд [He36]).

Объясним кратко, как расположены периодические орициклы в некомпактном многообразии $SM = \Gamma \backslash G$ (это хорошо видно на примере $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$). Ясно, что если орбита $xU_{\mathbb{R}} \subset \Gamma \backslash G$ периодична, то такова же и орбита точки xA_s для любого $s \in \mathbb{R}$. Поэтому каждый периодический орицикл $xU_{\mathbb{R}}$ лежит в связном цилиндре $xA_{\mathbb{R}}U_{\mathbb{R}}$, состоящем целиком из периодических орициклов. Ясно, что два таких цилиндра либо не пересекаются, либо совпадают. Образующая $xA_{\mathbb{R}}$ такого цилиндра уходит на бесконечность в положительном направлении. В самом деле, если $xA_{t_n} \rightarrow y$ при $t_n \rightarrow +\infty$, то поскольку период орицикла точки xA_{t_n} становится короче и короче при $t_n \rightarrow +\infty$, точка $y \in \Gamma \backslash G$ была бы неподвижной точкой орициклического потока (что невозможно ввиду дискретности Γ). Поэтому полуцилиндр $xA_{\mathbb{R}^+}U_{\mathbb{R}}$ является гладко вложенным замкнутым подмногообразием в $\Gamma \backslash G$, который при уходе на бесконечность становится все уже и уже. Топологически поверхность M получается из компактной поверхности, к которой приклеены несколько таких полуцилиндров (после вырезания из нее такого же количества дисков).

Что касается полуцилиндра $xA_{\mathbb{R}^+}U_{\mathbb{R}}$, то он является плотным в $\Gamma \backslash G$. Этот факт также имеет весьма простое объяснение и имеет место для тех фуксовых групп $\Gamma \subset G$, для которых геодезический поток на $\Gamma \backslash G$ топологически перемешивает (т.е. не только для решеток). В самом деле, пусть $x \in \Gamma \backslash G$. Если поток $(\Gamma \backslash G, A_{\mathbb{R}})$ топологически перемешивает, то для любой последовательности $\{t_n \rightarrow -\infty\}$ множество $\bigcup_n xO(1)A_{t_n}$ плотно в $\Gamma \backslash G$ для любой окрестности единицы $O(1) \subset G$. Поэтому для любой точки $y \in \Gamma \backslash G$ найдется последовательность $\{g_n \in O(1)\}$ такая, что $xg_nA_{t_n} \rightarrow y$. Но для достаточно малой окрестности $O(1) \subset G$ имеем $g_n = u_n a_n h_n$, где $u_n \in U_{\mathbb{R}}$, $a_n \in A_{\mathbb{R}}$, $h_n \in H_{\mathbb{R}}$, и поэтому $xg_nA_{t_n} = xu_n a'_n h'_n$, где $a'_n = a_n A_{t_n} \in A_{\mathbb{R}}$, $h'_n = A_{-t_n} h_n A_{t_n} \rightarrow 1$. Следовательно, $xu_n a'_n \rightarrow y$ и поэтому $y \in \overline{xA_{\mathbb{R}^+}U_{\mathbb{R}}}$.

Заметим, что число таких непересекающихся цилиндров в $\Gamma \backslash G$ равно числу классов Γ -сопряженности унитарных подгрупп в Γ . Хорошо известно, что это число конечно для любой решетки $\Gamma \subset G$ (так, для $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ имеется всего один класс сопряженности).

Поскольку энтропия сдвига g_1 равна $\lambda = \sqrt{-k(M)}$ и геодезический поток является бернуллиевским, то по теореме Орнштейна [O] геодезические потоки на поверхностях

M_1 и M_2 одинаковой постоянной кривизны метрически изоморфны. В этом смысле геодезический поток не является метрически жестким: метрический изоморфизм $g_t^{(1)}$ и $g_t^{(2)}$ не влечет за собой ни изометрию M_1 и M_2 , ни даже их диффеоморфность. Заметим также, что геодезические потоки на компактных диффеоморфных поверхностях M_1 и M_2 топологически эквивалентны (Аносов [An]). В самом деле, поверхность M_2 можно рассматривать как поверхность M_1 с измененной метрикой постоянной отрицательной кривизны. Если изменение метрики мало, то аносовский поток $g_t^{(2)}$ является малым C^1 -возмущением потока $g_t^{(1)}$ и согласно теореме Аносова о структурной устойчивости эти потоки топологически эквивалентны. Теперь осталось заметить, что пространство метрик постоянной кривизны на компактной поверхности M_1 совпадает с пространством Тейхмюллера $T(\Gamma_1)$ группы $\pi_1(M_1) = \Gamma_1$ и поэтому связно. Однако M_1 и M_2 могут быть не изометричны даже при их одинаковой кривизне (в случае, если Γ_1 и Γ_2 изоморфны, но не сопряжены в G). Следовательно, геодезический поток не является и топологически жестким.

Что касается орициклического потока u_t , то любые два потока $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$ эквивалентны по Какутани, т.е. найдется измеримое отображение $\varphi: SM_1 \rightarrow SM_2$ такое, что φ переводит $u_t^{(1)}$ -орбиты в $u_t^{(2)}$ -орбиты с сохранением их ориентации (и является даже C^∞ -гладким вдоль $u_t^{(1)}$ -орбит). Это следует из результата Ратнер [R78] о том, что орициклический поток эквивалентен по Какутани линейному иррациональному потоку на двумерном торе (заметим, что любые два иррациональных потока на двумерном торе эквивалентны по Какутани согласно Катку [K75]).

2. Рассмотрим теперь вопрос о том, когда два орициклических потока могут быть метрически изоморфны. Ясно, во-первых, что любая изометрия $\theta: M_1 \rightarrow M_2$ двух одинаково ориентированных поверхностей индуцирует изоморфизм $d\theta$ потоков $g_t^{(1)}$, $u_t^{(1)}$, $h_t^{(1)}$ и $g_t^{(2)}$, $u_t^{(2)}$, $h_t^{(2)}$ соответственно. В самом деле, отображение $d\theta(\Gamma_1 g) = \Gamma_2 \alpha g$, где $\theta = f_\alpha \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$, $\alpha \in G$ и $\alpha \Gamma_1 \alpha^{-1} = \Gamma_2$, обладает свойством $d\theta(\Gamma_1 g h) = d\theta(\Gamma_1 g) h$ для любых $g, h \in G$. Во-вторых, можно взять композицию дифференциала изометрии $d\theta$ и сдвига на постоянный орицикл $u_s^{(2)}$. Удивительно, что по доказанной в начале 80-х годов Мариной Ратнер теореме о метрической жесткости орициклического потока любой метрический изоморфизм $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$ происходит из такой композиции!

ТЕОРЕМА 2.1 ([R82a]). Пусть $G = SL(2, \mathbb{R})$ и Γ_1, Γ_2 – две решетки в G . Предположим, что $\varphi: (\Gamma_1 \backslash G, U_t, \nu_1) \rightarrow (\Gamma_2 \backslash G, U_t, \nu_2)$ – метрическая сопряженность орициклических потоков. Тогда найдутся элемент $\alpha \in G$ и число $s \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha \Gamma_1 \alpha^{-1} \subset \Gamma_2$ и $\varphi(\Gamma_1 g) = \Gamma_2 \alpha g U_s$ почти всюду.

СЛЕДСТВИЕ 2.2 ([R82a]). Пусть $M_1 = \Gamma_1 \backslash G / K$ и $M_2 = \Gamma_2 \backslash G / K$ – две ориентированные поверхности конечной площади с равными отрицательными кривизнами. Предположим, что $\varphi: (SM_1, \nu_1) \rightarrow (SM_2, \nu_2)$ – метрический изоморфизм орициклических потоков. Тогда $\varphi = u_s^{(2)} \circ d\theta$, где $u_s^{(2)}$ – постоянный сдвиг вдоль орицикла и $d\theta$ – дифференциал некоторой изометрии $\theta: M_1 \rightarrow M_2$, сохраняющей ориентацию.

СЛЕДСТВИЕ 2.3 ([R83]). Предположим, что $M = \Gamma \backslash G / K$ – ориентированная поверхность постоянной отрицательной кривизны конечной площади и

$\varphi: (SM, \nu) \rightarrow (SM, \nu)$ — отображение, устанавливающее изоморфизм u_t и u_{-t} для некоторого $t > 0$. Тогда $\beta\Gamma\beta^{-1} = \Gamma$ для некоторого $\beta \in \text{Iso}(\mathbb{H}^2)$, $\det(\beta) = -1$.

Для доказательства заметим, что отображение $\Sigma(\Gamma g) = \Sigma(\Gamma)\Sigma(g)$ устанавливает изоморфизм u_t и u_{-t} , и поэтому $\Sigma \circ \varphi$ задает изоморфизм u_t с самим собой. Следовательно, $(\sigma\alpha)\Gamma(\sigma\alpha)^{-1} = \Gamma$ при некотором $\alpha \in G$.

Итак, орициклический поток изоморфен своему обратному лишь при наличии изометрии поверхности M , меняющей ориентацию. Напротив, геодезический поток всегда изоморфен своему обратному (достаточно взять диффеоморфизм SM , неподвижный на M и являющийся инверсией на каждом касательном пространстве).

ЗАМЕЧАНИЕ. Одновременно с теоремой Ратнер о метрической жесткости Маркусом [Mar83] была доказана топологическая жесткость орициклического потока. Скажем, что метрика (возможно, переменная) отрицательной кривизны на поверхности M нормализована, если длина кратчайшей периодической геодезической равна 1. Тогда орициклические потоки на двух компактных поверхностях отрицательной кривизны с нормализованными метриками топологически эквивалентны $\iff$ соответствующие геодезические потоки топологически изоморфны [Mar83]. На самом деле топологический изоморфизм геодезических потоков влечет за собой изометричность поверхностей (см. §3).

§3. Геометрические обобщения теоремы Ратнер о метрической жесткости орициклического потока

Теорему о метрической жесткости можно обобщать в различных направлениях. Так, можно отказаться от постоянности кривизны поверхностей, повысить размерность (т.е. рассматривать многообразия отрицательной кривизны вместо поверхностей) и, наконец, отказаться от конечности объема этих многообразий.

1. Фельдман и Орнштейн [FO] доказали аналог теоремы жесткости для компактных поверхностей переменной отрицательной кривизны. Напомним, что если M — гладкая компактная риманова поверхность отрицательной кривизны, то геодезический поток g_t на SM является ановским и обладает гладкой инвариантной мерой. Сжимающееся и расширяющееся слоения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{H}$ на SM для g_t могут быть непрерывно параметризованы различными способами (гладкой параметризацией, вообще говоря, не существует). Нам будут важны два способа параметризации. Первый (классический) состоит в том, что кусок траектории орицикла от любой точки $x \in SM$ за время t проектируется на поверхность M в кривую длины t . Эта параметризация называется параметризацией длиной дуги. Другой способ параметризации был предложен Маргулисом (см. [Ma70] и [Mar75]). Он доказал существование равномерных параметризаций u_t и h_t , для которых независимо от точки $x \in SM$ выполняются соотношения

$$g_t \circ u_s(x) = u_{\lambda^{-t}s}(x), \quad g_t \circ h_s(x) = h_{\lambda^t s}(x),$$

где $\lambda > 0$ — некоторая константа (на самом деле $\lambda = e^{h(g_1)}$, где $h(g_1)$ — топологическая энтропия геодезического сдвига g_1). Заметим, что для случая постоянной кривизны с точностью до постоянной перенормировки времени оба этих способа совпадают с параметризацией однопараметрических подгрупп $U_t, H_t \subset G$.

Маркус [Mar75] доказал, что оба этих способа параметризации задают строго эргодические перемешивающие потоки. Единственные эргодические инвариантные меры в обоих способах за исключением случая постоянной кривизны сингулярны друг к другу и к гладкой мере объема.

Далее будем считать, что u_t и h_t обозначают *равномерные* параметризации слоений $\mathcal{U}$ и $\mathcal{H}$. В этом случае единственной эргодической мерой для u_t и h_t является мера μ максимальной энтропии потока g_t . Заметим, что эта мера строго положительна, однако для метрики непостоянной кривизны не является гладкой. Риманову метрику на M нормируем так, что $h(g_1) = 1$, т.е. коэффициент растяжения λ равен e .

При таких предположениях Фельдман и Орнштейн доказали, что метрический изоморфизм двух орициклических потоков на компактных поверхностях является композицией C^1 -гладкого изоморфизма геодезических потоков и сдвига вдоль орицикла. Идея доказательства состоит в применении свойства Ратнер (см. §6) для орициклических потоков $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$, чтобы доказать сопряженность $g_t^{(1)}$ и $g_t^{(2)}$ некоторым отображением ψ . Тот факт, что ψ сопрягает $h_t^{(1)}$ и $h_{ct}^{(2)}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ (и, таким образом, является гомеоморфизмом), требует отдельного доказательства (отличного от случая постоянной кривизны). Далее Фельдман и Орнштейн доказывают, что гомеоморфизм M_1 и M_2 , сопрягающий $g_t^{(1)}$ и $g_t^{(2)}$, имеет класс гладкости C^1 .

Если одна из поверхностей имеет постоянную кривизну, то по Катку [K82] C^1 -гладкий изоморфизм $\psi: SM_1 \rightarrow SM_2$ геодезических потоков есть дифференциал некоторой изометрии $\theta: M_1 \rightarrow M_2$. В общем случае это было независимо доказано Оталом [Ot] и Кроуком [Cr]. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3.1 ([FO], [Ot], [Cr]). Пусть M_i , $i = 1, 2$, – компактные поверхности нормированной отрицательной кривизны с мерами μ_i максимальной энтропии геодезических потоков $g_t^{(i)}$ на SM_i , и $u_t^{(i)}$ – равномерно параметризованные орициклические потоки на SM_i . Предположим, что $\varphi: (SM_1, \mu_1) \rightarrow (SM_2, \mu_2)$ – метрический изоморфизм $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$. Тогда $\varphi = u_s^{(2)} \circ d\theta$, где $u_s^{(2)}$ – постоянный сдвиг вдоль орицикла и $\theta: M_1 \rightarrow M_2$ – изометрия поверхностей.

Что касается первого способа параметризации слоения (длиной дуги), то для него подобные свойства жесткости не доказаны, хотя, как мы сейчас увидим, именно этот способ позволяет формулировать разумные гипотезы в многомерном случае.

2. Напомним, что n -мерное многообразие M постоянной кривизны -1 является пространством двойных классов смежности $M = \Gamma \backslash G/K$, где Γ – дискретная подгруппа в связной компоненте G группы $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ изометрий n -мерного пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ и K – максимальная компактная подгруппа в G (для гладкости M требуется, чтобы пересечение $g\Gamma g^{-1} \cap K$ не зависело от $g \in G$). Само пространство $\mathbb{H}^n$ удобно представлять как один из двух связных кусков псевдосферы Σ в $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящей из точек $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, для которых $\langle x, x \rangle = 1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает билинейную форму $\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n$. Будем для определенности считать, что $\mathbb{H}^n = \Sigma^+$, где Σ^+ – кусок Σ , для которого $x_0 > 0$.

Группа матриц из $GL(n+1, \mathbb{R})$, сохраняющих форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$, обозначается $O(1, n)$. Ее подгруппа индекса 2, сохраняющая Σ^+ , и является группой $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ изометрий пространства $\mathbb{H}^n$ с римановой метрикой, полученной ограничением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на Σ^+ . Пусть G – связная компонента группы $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ (заметим, что все элементы из G сохраняют

ориентацию $\mathbb{H}^n$) и

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & SO(n) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & SO(n-1) & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Тогда орбита точки $\hat{x} = (1, 0, \dots, 0)$ при действии G на $\mathbb{R}^{n+1}$ совпадает с $\mathbb{H}^n = \Sigma^+$, причем $\mathbb{H}^n = G/K$, где K – стабилизатор точки $\hat{x}$, причем $K \simeq SO(n)$ является максимальной компактной подгруппой в G . Таким образом, $M = \Gamma \backslash G/K$. Поскольку действие K на единичном касательном пространстве $S_{\hat{x}}\mathbb{H}^n$ индуцирует транзитивную группу поворотов $SO(n)$ сферы S^{n-1} со стабилизатором $SO(n-1)$, то $S\mathbb{H}^n = G/K_1$ и $SM = \Gamma \backslash G/K_1$.

Геодезический поток g_t на SM индуцируется правым действием подгруппы

$$A = \{A_t\} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 & \dots & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

на $SM = \Gamma \backslash G/K_1$. Поскольку K_1 и A_t коммутируют, то действие A_t на SM определено корректно. G -инвариантная мера на $\Gamma \backslash G$ индуцирует g_t -инвариантную гладкую меру Лиувилля ν на SM . В свою очередь, M имеет гладкую риманову меру объема vol . При этом $\text{vol}(M) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\nu(SM) < \infty$, т.е. когда Γ – решетка в G .

Сжимающаяся орисферическая подгруппа $U \subset G$ для A является $(n-1)$ -мерной абелевой группой матриц

$$U = \{U_a\} = \begin{pmatrix} 1 + |a|/2 & |a|/2 & a_2 & \dots & a_n \\ -|a|/2 & 1 - |a|/2 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & a_2 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ a_n & a_n & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $a = (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|a| = a_2^2 + \dots + a_n^2$. При этом $A_{-t}U_aA_t = U_{e^{-t}|a|}$ и поэтому все направления в U сжимаются равномерно. Поскольку K_1 как централизатор A обязан нормализовать U и $K_1 \cap gUg^{-1} = 1$ для всех $g \in G$, листы $\Gamma gUK_1 \subset \Gamma \backslash G/K_1$ задают гладкое $(n-1)$ -мерное сжимающееся слоение $\mathcal{U}$ для g_t . Но так как действие K_1 на U неприводимо (не имеет инвариантных подпространств), то $\mathcal{U}$ не имеет параметризации или хотя бы подслоений алгебраического происхождения.

Все сказанное относится и к $(n-1)$ -мерному расширяющемуся слоению $\mathcal{H}$, образованному листами $\Gamma gHK_1 \subset \Gamma \backslash G/K_1$ транспонированной подгруппы $H = U^T$.

Известно, что если объем многообразия M конечен, т.е. $\nu(SM) < \infty$, то геодезический поток g_t на SM эргодичен и является K -поток, а орисферические слоения

$\mathcal{U}, \mathcal{H}$ топологически транзитивны (это следует, например, из того, что g_t является ановским перемешивающим потоком; можно также воспользоваться критерием эргодичности С.1 Мура для накрывающих однородных потоков $(\Gamma \setminus G, A_t)$ и $(\Gamma \setminus G, U)$).

В геометрической формулировке теоремы жесткости для случая $n = 2$ речь идет об измеримой сопряженности орициклических потоков. Такое отображение можно иначе определить как измеримое отображение, сохраняющее параметризацию сжимающегося одномерного слоения $\mathcal{U}$ длиной дуги. В многомерном случае аналогом является такое отображение, переводящее слои $\mathcal{U}_1$ в слои $\mathcal{U}_2$, что ограничение на каждый слой $\mathcal{U}_1$ является изометрией (риманова метрика на M индуцирует риманову метрику на всех $(n-1)$ -мерных проекциях орисфер, что позволяет индуцировать риманову метрику на всех слоях $\mathcal{U}$). Этот способ формулировки и доказательство теоремы жесткости в многомерном случае были найдены Фламинио:

ТЕОРЕМА 3.2 ([F]). Пусть M_1 и M_2 – два n -мерных ($n > 2$) компактных многообразия постоянной кривизны -1 и $\varphi: SM_1 \rightarrow SM_2$ – сохраняющее меру Лиувилля обратимое отображение, переводящее каждый слой $\mathcal{U}_1$ изометрично на слои $\mathcal{U}_2$. Тогда φ есть дифференциал некоторой изометрии $\theta: M_1 \rightarrow M_2$.

Заметим, что при $n > 2$ метрическая сопряженность не включает в себя постоянной трансляции вдоль $\mathcal{U}_2$.

3. Расслоение FM ортонормированных реперов положительной ориентации над M является главным $SO(n)$ -расслоением и есть не что иное, как расслоение $FM = \Gamma \setminus G \rightarrow \Gamma \setminus G/K = M$. Таким образом, поток ортонормированных реперов над M является однородным потоком $(\Gamma \setminus G, A_t)$, который накрывает геодезический поток. Орбиты подгруппы U на $\Gamma \setminus G$ задают сжимающийся орисферический поток. Теорема Витте о метрической жесткости эргодических унипотентных потоков (о которой речь пойдет в § 5) гарантирует, что из метрического изоморфизма орисферических потоков на FM_1 и FM_2 следует, в частности, изометричность многообразий M_1 и M_2 . Естественно поэтому было обобщить результаты Фламинио и Витте на класс $SO(n)$ -расслоений EM над M , промежуточных между SM и FM (такое расслоение образовано накрытием $\Gamma \setminus G/E \rightarrow \Gamma \setminus G/K$, где $E \subset K_1$ – некоторая связная компактная подгруппа). Мера ν на EM получается из G -инвариантной меры на $\Gamma \setminus G$. Подгруппа A_t задает частично-гиперболический поток на EM , а листы ΓgUE образуют для него сжимающееся слоение. Метрику на каждой орисфере в EM снова можно получить из ограничения римановой метрики на образ орисферы при проекции $EM \rightarrow M$.

ТЕОРЕМА 3.3 ([Wi89]). Пусть M_1, M_2 – два многообразия постоянной кривизны -1 конечного объема и $EM_i, i = 1, 2$, – расслоения над M_i , промежуточные между SM_i и FM_i . Тогда если $\varphi: EM_1 \rightarrow EM_2$ – сохраняющее меру обратимое отображение, переводящее каждый орисферический слой $\mathcal{U}_1$ изометрично на орисферический слой $\mathcal{U}_2$, то многообразия M_1 и M_2 изометричны.

Жесткость орисферических слоений на многообразиях переменной отрицательной кривизны до сих пор не установлена. Как уже отмечалось, для этого вначале нужно доказать жесткость орициклического потока на поверхности переменной кривизны, параметризованного длиной дуги.

4. Фламинио и Спаттиер [FS] показали, как теорему о метрической жесткости орисферических слоений можно обобщать для многообразий постоянной отрицательной кривизны бесконечного объема. Строение таких многообразий до сих пор мало изучено ввиду сложности устройства дискретных групп $\Gamma \subset G = O(1, n)_0 = \text{Iso}(\mathbb{H}^n)_0$ движения пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ (обычно предполагают, что Γ не содержит элементов конечного порядка). Есть продвижения, однако, в изучении обширного класса так называемых *геометрически-конечных* дискретных подгрупп $\Gamma \subset G$ (это – группы, которые допускают фундаментальную область в $\mathbb{H}^n$ в виде гиперболически выпуклого многогранника с конечным числом граней). Такая группа Γ является конечно-порожденной, однако при $n > 2$ не каждая конечно-порожденная дискретная группа движений $\mathbb{H}^n$ является геометрически-конечной (впрочем, если $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ имеет конечный объем, то Γ геометрически-конечна). Замечательно, что для геометрически-конечных групп Γ многообразие $SM = \Gamma \backslash S\mathbb{H}^n$ несет на себе g_t -инвариантную эргодическую конечную меру, сосредоточенную на множестве Λ неблуждающих точек геодезического потока. Такая мера единственна с точностью до нормировки и называется мерой Паттерсона–Сулливана (в случае конечного объема она совпадает с мерой Лиувилля на SM). Если множество Λ компактно, то Γ называется группой *компактного типа*. Любая такая группа Γ геометрически-конечна и не содержит квазиунипотентных элементов бесконечного порядка (следовательно, каждый орисферический слой на $SM = \Gamma \backslash G/K_1$ односвязен и диффеоморфен $\mathbb{R}^{n-1}$). В [FS] показано, в частности, что если $\dim M_1 = \dim M_2$, группа Γ_1 имеет компактный тип и плотна по Зарискому в G , то сохраняющее меру Паттерсона–Сулливана отображение $\varphi: SM_1 \rightarrow SM_2$, изометрично переводящее пересечения с Λ_1 сжимающихся орисферических слоев на SM_1 в сжимающиеся орисферические слои на SM_2 , влечет существование риманова накрытия $\theta: M_1 \rightarrow M_2$.

На взгляд автора, было бы интересно обобщить теорему о метрической жесткости орисферических слоений относительно гладкой бесконечной меры Лиувилля на SM . Например, естественно предположить, что эргодический относительно бесконечной меры Лиувилля орициклический поток на поверхности M постоянной отрицательной кривизны обладает метрической жесткостью, как и в случае $\text{vol}(M) < \infty$. Отметим, однако, что эргодичность орициклического потока установлена только в случае конечного объема $SM = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, хотя известны фуксовы группы Γ , для которых объем SM бесконечен, а орициклический поток консервативен и топологически транзитивен (см. обзор [St95b]).

§ 4. Факторы и джойнинги орициклических потоков

Следуя [R84,95b], рассмотрим орициклический поток $u_t = (\Gamma \backslash G, U_t)$ на пространстве с конечной G -инвариантной мерой ν . Если дискретная подгруппа $\Gamma' \subset G$ содержит Γ , то орициклический поток $u'_t = (\Gamma' \backslash G, U_t)$ является фактором потока u_t . Как доказала Ратнер, каждый факторпоток для u_t получается из указанной алгебраической конструкции:

ТЕОРЕМА 4.1 ([R82b]). *Пусть S_t есть факторпоток для орициклического потока $u_t = (\Gamma \backslash G, U_t)$, где Γ – решетка в G . Тогда найдется решетка $\Gamma' \subset G$ такая, что $\Gamma \subset \Gamma'$ и поток S_t изоморфен потоку $u'_t = (\Gamma' \backslash G, U_t)$.*

Так как число решеток $\Gamma' \subset G$, содержащих решетку $\Gamma \subset G$, конечно, то и число неизоморфных факторов для орициклического потока u_t конечно. В частности, если решетка Γ максимальна, то u_t вообще не имеет нетривиальных факторов. В этом проявляется еще одно отличие от геодезического потока. В самом деле, поток S_t является фактором бернуллиевского потока T_t тогда и только тогда, когда S_t также является бернуллиевским, а энтропия $e(S_t)$ не превышает энтропии $e(T_t)$. Следовательно, число неизоморфных факторов геодезического потока несчетно.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [R82b] высказана гипотеза о том, что теорема о факторах может быть обобщена на равномерно параметризованный орициклический поток на компактной поверхности переменной отрицательной кривизны.

Теорема о факторах, как и теорема о жесткости, легко выводится из классификации эргодических джойнингов орициклических потоков. Напомним, что джойнингом двух орициклических потоков $u_t^{(1)} = (\Gamma_1 \setminus G, U_t, \nu_1)$ и $u_t^{(2)} = (\Gamma_2 \setminus G, U_t, \nu_2)$ является вероятностная $U_t \times U_t$ -инвариантная мера на $(\Gamma_1 \setminus G) \times (\Gamma_2 \setminus G)$, которая проектируется в G -инвариантные меры ν_1 и ν_2 . Приведем вначале алгебраическую конструкцию эргодических джойнингов для $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$.

Предположим, что элемент $c \in G$ таков, что $\Gamma = \Gamma_1 \cap c^{-1}\Gamma_2 c$ является решеткой в G . Положим $\Omega_c = \{(\Gamma_1 g, \Gamma_2 c g), g \in G\}$. Тогда множество Ω_c инвариантно относительно диагональной подгруппы $\Delta_G = \{(g, g), g \in G\}$, причем Δ_G действует на Ω_c транзитивно со стационарной подгруппой Δ_Γ . Δ_G -инвариантная вероятностная мера ν_0 на $\Omega_c = \Delta_\Gamma \backslash \Omega_c$ является $U_t \times U_t$ -эргодическим джойнингом потоков $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$. Более общая конструкция возникает как сдвиг множества Ω_c и меры ν_0 на любой элемент из $G \times G$, коммутирующий с подгруппой $\Delta_U = \{U_t \times U_t, t \in \mathbb{R}\}$. Ясно, что каждый такой сдвиг можно записать как $\Omega_{c',s} = \{(\Gamma_1 g, \Gamma_2 c' g U_s), g \in G\}$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$ и $c' \in c\mathbb{Z}_2$. Следующий результат Ратнер показывает, что все нетривиальные эргодические джойнинги $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$ возникают подобным образом.

ТЕОРЕМА 4.2 ([R83]). Пусть мера m на $(\Gamma_1 \setminus G) \times (\Gamma_2 \setminus G)$ является эргодическим джойнингом для $u_t^{(1)} = (\Gamma_1 \setminus G, U_t, \nu_1)$ и $u_t^{(2)} = (\Gamma_2 \setminus G, U_t, \nu_2)$. Тогда либо $m = \nu_1 \times \nu_2$, либо найдутся элемент $c \in G$ и число $s \in \mathbb{R}$ такие, что $\Gamma = \Gamma_1 \cap c^{-1}\Gamma_2 c$ является решеткой в G , $\nu(\Omega_{c,s}) = 1$ и поток $((\Gamma_1 \setminus G) \times (\Gamma_2 \setminus G), U_t \times U_t, m)$ изоморфен орициклическому потоку $(\Gamma \setminus G, U_t, \nu_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3 ([R83]). Число неизоморфных эргодических джойнингов двух орициклических потоков не более чем счетно. Если решетка Γ_1 равномерна или арифметична, а решетка Γ_2 таковой не является, то потоки $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$ дизъюнкты.

Заметим, что число неизоморфных эргодических джойнингов любых двух бернуллиевских (в частности, геодезических) потоков несчетно.

Отметим еще одно интересное следствие теоремы 4.2. Если решетка Γ_1 равномерна и арифметична, а решетка Γ_2 равномерна и неарифметична, то однопараметрический унитарный поток $((\Gamma_1 \setminus G) \times (\Gamma_2 \setminus G), U_t \times U_t)$ строго эргодичен. Это следует из классификации джойнингов и строгой эргодичности орициклического потока на $\Gamma_1 \setminus G$ и $\Gamma_2 \setminus G$. В этом примере интересно то, что однопараметрическая подгруппа $\Delta_U = \{U_t \times U_t, t \in \mathbb{R}\}$ неорисферична (орисферической является двумерная подгруппа $U_{\mathbb{R}} \times U_{\mathbb{R}}$). До полученной М. Ратнер теоремы 4.2 единственными примерами строго

эргодических потоков на компактных однородных пространствах полупростой группы Ли были орициклические потоки (см. [Bo76], [V] или [EP]).

Глазнер и Вейс [GW] построили пример двух максимальных равномерных арифметических решеток Γ_1 и Γ_2 таких, что Γ_1 и Γ_2 не сопряжены и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ имеет конечный индекс в Γ_1 и Γ_2 . Таким образом, минимальные орициклические потоки $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(2)}$ не являются дизъюнктными. Это дает отрицательный ответ на вопрос Фюрстенберга, являются ли минимальные потоки без общих факторов обязательно дизъюнктными?

Рассмотрим теперь вопрос о числе неизоморфных эргодических автодждойнингов орициклического потока $u_t = (\Gamma \setminus G, U_t, \nu)$. Для решетки $\Gamma \subset G$ обозначим через $\bar{\Gamma}$ подгруппу всех элементов $c \in G$ таких, что пересечение $\Gamma \cap c^{-1}\Gamma c$ является решеткой в G . Согласно Маргулису (см. [Ma90a]) подгруппа $\bar{\Gamma}$ плотна в G в том и только том случае, когда решетка Γ арифметична. В противном случае подгруппа $\bar{\Gamma}$ дискретна и, таким образом, содержит Γ в качестве подгруппы конечного индекса.

СЛЕДСТВИЕ 4.4 ([R83]). *Если решетка $\Gamma \subset G$ арифметична, то орициклический поток $u_t = (\Gamma \setminus G, U_t, \nu)$ имеет счетное число неизоморфных эргодических автодждойнингов. Если решетка $\Gamma \subset G$ неарифметична, то u_t имеет конечное число неизоморфных эргодических автодждойнингов, а если Γ вдобавок максимальна, то u_t не имеет нетривиальных эргодических автодждойнингов.*

Покажем теперь, следуя [R83], как теорема о жесткости орициклических потоков выводится из классификации эргодических дждойнингов. Пусть $\varphi: (\Gamma_1 \setminus G, U_t, \nu_1) \rightarrow (\Gamma_2 \setminus G, U_t, \nu_2)$ – метрическая сопряженность орициклических потоков. Рассмотрим график

$$\Omega = \{(x, \varphi(x)), x \in \Gamma_1 \setminus G\} \subset (\Gamma_1 \setminus G) \times (\Gamma_2 \setminus G)$$

вместе с вероятностной мерой m , заданной по правилу

$$m(A \times B) = \int_A m_{\varphi(x)}(B) d\nu_1(x),$$

где мера m_y , $y \in \Gamma_2 \setminus G$, сосредоточена в точке y . Тогда множество Ω и мера m являются $U_t \times U_t$ -инвариантными, причем m является дждойнингом двух наших потоков. Так как проекция $p_1: \Omega \rightarrow \Gamma_1 \setminus G$ взаимно однозначна, то мера m эргодична и из классификации эргодических дждойнингов вытекает существование элемента $c \in G$ и числа $s \in \mathbb{R}$ таких, что пересечение $\Gamma = \Gamma_1 \cap c^{-1}\Gamma_2 c$ является подгруппой конечного индекса в Γ_1 и $c^{-1}\Gamma_2 c$, причем $\varphi(\Gamma_1 g) = \Gamma_2 c g U_s$. Наконец, из взаимной однозначности p_1 вытекает, что $\Gamma = \Gamma_1$, и поэтому $\Gamma_1 \subset c^{-1}\Gamma_2 c$.

§ 5. Жесткость, факторы и дждойнинги унипотентных потоков

1. В этом параграфе мы покажем, как теоремы Ратнер о жесткости, факторах и дждойнингах орициклических потоков обобщаются на класс эргодических унипотентных потоков на однородных пространствах конечного объема. Дадим вначале необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $\Gamma \setminus G, \Lambda \setminus H$ – два однородных пространства с мерами ν_1 и ν_2 . Тогда сохраняющее меру отображение $\varphi: (\Gamma \setminus G, \nu_1) \rightarrow (\Lambda \setminus H, \nu_2)$ называется *аффинным* для $g \in G$, если найдется элемент $\tilde{g} \in H$ такой, что $\varphi(\Gamma g' g) = \varphi(\Gamma g') \tilde{g}$ для ν_1 -почти всех $g' \in G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Сохраняющее меру отображение $\varphi: (\Gamma \setminus G, \nu_1) \rightarrow (\Lambda \setminus H, \nu_2)$ называется *G-аффинным*, если оно аффинно для каждого $g \in G$.

Явный вид *G*-аффинного отображения проясняет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3 (см. [Wi85]). Пусть Γ и Λ – решетки в группах Ли G и H соответственно и $\varphi: \Gamma \setminus G \rightarrow \Lambda \setminus H$ – сохраняющее меру отображение. Тогда при условии несократимости решетки $\Lambda \subset H$ следующие условия эквивалентны:

- 1) φ является *G*-аффинным,
- 2) график $\text{Graph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)), x \in \Gamma \setminus G\}$ является $\text{mod } 0$ однородным подпространством в $\Gamma \setminus G \times \Lambda \setminus H$,
- 3) найдутся элемент $c \in H$ и эпиморфизм $\sigma: G \rightarrow H$ такие, что $\sigma(\Gamma) \subset \Lambda$ и $\varphi(\Gamma g) = \Lambda \sigma(g)c$ почти всюду на $\Gamma \setminus G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1 \Rightarrow 2$. По Зиммеру [Z] отображение φ можно так скорректировать на множестве меры 0 в $\Gamma \setminus G$, что равенство $\varphi(\Gamma g'g) = \varphi(\Gamma g')\tilde{g}$ будет выполняться для всех $g, g' \in G$. Поскольку $\varphi(\Gamma g') = \varphi(\Gamma g'1) = \varphi(\Gamma g')\tilde{1}$ и отображение φ является сюръективным, то элемент $\tilde{1}$ лежит в пересечении Λ с центром $Z(H)$. Но так как решетка Λ несократима, то $\tilde{1} = 1$. Аналогично доказывается, что $\tilde{g}g' = \tilde{g}\tilde{g}'$. Поэтому множество $F = \{(g, \tilde{g}), g \in G\}$ образует подгруппу в $G \times H$, которая транзитивно действует на $\text{Graph}(\varphi)$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $p: G \times H \rightarrow G$ и $p^*: \Gamma \setminus G \times \Lambda \setminus H \rightarrow \Gamma \setminus G$ – естественные проекции и предположим, что $\text{Graph}(\varphi) = (\Gamma \times \Lambda)Fc$ для некоторого $c = (c_1, c_2) \in G \times H$ и подгруппы $F \subset G \times H$. По определению графика ограничение $p^*: \text{Graph}(\varphi) \rightarrow \Gamma \setminus G$ является биекцией, и поэтому ограничение $p: F \rightarrow G$ является эпиморфизмом с ядром $F \cap H \subset \Lambda$. Но так как решетка Λ несократима, то $p: F \rightarrow G$ является изоморфизмом. Обозначим через $\lambda: G \rightarrow F$ обратный к нему изоморфизм и пусть σ есть композиция λ и проекции $q: G \times H \rightarrow H$. Пусть $(\Gamma g, \varphi(\Gamma g)) = (\Gamma \times \Lambda)f(c_1, c_2)$ для некоторых $g \in G, f \in F$. Тогда $f = (gc_1^{-1}, \sigma(gc_1^{-1}))$ и поэтому $\varphi(\Gamma g) = \Lambda \sigma(g)\sigma(c_1)^{-1}c_2$ для всех $g \in G$.

$3 \Rightarrow 1$. Положим $\tilde{g} = c^{-1}\sigma(g)c$. Тогда $\varphi(\Gamma g'g) = \Lambda \sigma(g'g)c = \Lambda \sigma(g')cc^{-1}\sigma(g)c = \varphi(\Gamma g')\tilde{g}$, что и требовалось.

Итак, *G*-аффинное отображение является композицией однородного накрытия и постоянной трансляции. Под таким отображением можно понимать и отображение вида $\varphi(\Gamma g) = \Lambda \alpha(g)$, где $\alpha: G \rightarrow H$ – такой эпиморфизм, что $\alpha(\Gamma) \subset c^{-1}\Lambda c$. В самом деле, достаточно положить $\alpha(g) = c^{-1}\sigma(g)c$ для всех $g \in G$.

Теперь мы можем дать алгебраическую формулировку теоремы 2.1 о жесткости орициклических потоков.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $G = SL(2, \mathbb{R})$ и Γ_1, Γ_2 – две решетки в G . Предположим, что сохраняющее меру отображение $\varphi: \Gamma_1 \setminus G \rightarrow \Gamma_2 \setminus G$ является U_t -аффинным для некоторого $t > 0$. Тогда оно является и *G*-аффинным.

Этот результат, как показал Витте, сохраняет силу в классе эргодических унипотентных действий.

ТЕОРЕМА О ЖЕСТКОСТИ 5.5 ([Wi85]). Пусть Γ, Λ – решетки в связных группах Ли G, H соответственно и $\varphi: (\Gamma \backslash G, u_{\mathbb{Z}}^{(1)}) \rightarrow (\Lambda \backslash H, u_{\mathbb{Z}}^{(2)})$ – метрическая сопряженность двух эргодических унитарных каскадов. Тогда φ является G -аффинным. В частности, если отображение φ (почти всюду) конечнолистно, то группы G и H локально изоморфны. Если же отображение φ обратимо (т.е. является метрическим изоморфизмом) и обе решетки Γ и Λ несократимы, то $\varphi(\Gamma g) = \Lambda \alpha(g)$ для некоторого элемента $s \in G$ и изоморфизма $\alpha: G \rightarrow H$ такого, что $\alpha(\Gamma) = s^{-1}\Lambda s$.

Прямое доказательство этой теоремы весьма нетривиально. Оно потребовало от Витте формулировки и доказательства R -свойства (см. § 6) для унитарных трансляций на произвольных однородных пространствах. Однако теперь (после доказательства основной метрической теоремы Ратнер) она элементарно выводится из классификации эргодических джойнингов унитарных трансляций (или из самой метрической теоремы). Вывод полностью аналогичен доказательству теоремы о жесткости орициклических потоков из § 4.

2. Обратимся теперь к рассмотрению факторов эргодических унитарных потоков. Алгебраичность факторов (как и теорема о жесткости) для эргодических ниль-потоков была доказана еще Перри [P71, 73]. Этот результат и теорема Ратнер о факторах орициклического потока были обобщены Витте.

Пусть Γ – решетка в группе Ли $G, U \subset G$ – унитарная подгруппа и поток $(\Gamma \backslash G, U)$ эргодичен. Предположим, что $\Lambda \subset G$ есть замкнутая подгруппа в G , содержащая Γ . Тогда поток $(\Lambda \backslash G, U)$ является фактором исходного потока $(\Gamma \backslash G, U)$. Если $K \subset G$ является компактной подгруппой в G , коммутирующей с U , то действие U на двойном классе смежности $\Lambda \backslash G/K$ также определяет факторпоток для $(\Gamma \backslash G, U)$. Наконец, в качестве K можно взять любую замкнутую подгруппу в группе $\text{Aff}(\Lambda \backslash G)$ всех G -аффинных отображений пространства $\Lambda \backslash G$, которая коммутирует с U и для которой пространство орбит $\Lambda \backslash G/K$ является счетно отделимым (что эквивалентно локальной замкнутости почти всех K -орбит на $\Lambda \backslash G$). Следующая теорема показывает, что так возникают все измеримые факторпоток для эргодических унитарных потоков.

ТЕОРЕМА О ФАКТОРАХ 5.6 ([Wi94]). Пусть унитарный поток $(\Gamma \backslash G, U)$ на пространстве конечного объема эргодичен. Тогда любой его измеримый факторпоток изоморфен потоку вида $(\Lambda \backslash G/K, U)$, где замкнутая подгруппа $\Lambda \subset G$ содержит Γ , а подгруппа $K \subset \text{Aff}(\Lambda \backslash G)$ коммутирует с U и определяет измеримое пространство $\Lambda \backslash G/K$.

Приведем вкратце доказательство этой теоремы. Пусть $\psi: (\Gamma \backslash G, \mu) \rightarrow (X, \nu)$ есть измеримая U -сопряженность. Рассмотрим

$$\Lambda = \{\lambda \in G \mid \psi(\Gamma \lambda g) = \psi(\Gamma g), g \in G\}.$$

Нетрудно доказать, что Λ – замкнутая подгруппа в G и поэтому пространство $\Lambda \backslash G$ имеет G -инвариантную вероятностную меру $\bar{\mu}$, а отображение ψ определяет измеримую U -сопряженность $\bar{\psi}: (\Lambda \backslash G, \bar{\mu}) \rightarrow (X, \nu)$, а именно, $\bar{\psi}(\Lambda g) = \psi(\Gamma g), g \in G$. Пусть K обозначает подгруппу всех элементов $\varphi \in \text{Aff}(\Lambda \backslash G)$, которые коммутируют с U

и сохраняют слои отображения $\bar{\psi}$, т.е. $\bar{\psi}(\varphi(s)) = \bar{\psi}(s)$ для почти всех $s \in \Lambda \setminus G$. Докажем, что пространство X изоморфно $\Lambda \setminus G/K$.

Для этого рассмотрим множество

$$M = \{(\Lambda s, \Lambda t) \in (\Lambda \setminus G) \times (\Lambda \setminus G) \mid \bar{\psi}(\Lambda s) = \bar{\psi}(\Lambda t)\}.$$

Достаточно доказать, что K действует транзитивно на слоях $\bar{\psi}$, т.е. для любой пары $(\Lambda s, \Lambda t) \in M$ найдется $\varphi \in K$ такое, что $\varphi(\Lambda s) = \Lambda t$. Разложим меру $\bar{\mu}$ на вероятностные меры $\bar{\mu}_x$, сосредоточенные на слоях $\psi^{-1}(x)$, $x \in X$. Это означает, что для любого борелевского множества $A \subset \Lambda \setminus G$ мы имеем $\bar{\mu}(A) = \int_X \bar{\mu}_x(A) d\nu(x)$. Теперь введем вероятностную меру ρ на $(\Lambda \setminus G) \times (\Lambda \setminus G)$ по правилу

$$\rho(A \times B) = \int_X \bar{\mu}_x(A) \bar{\mu}_x(B) d\nu(x).$$

Непосредственно проверяется, что мера ρ сосредоточена на множестве M , причем M и ρ инвариантны относительно диагональной подгруппы $\Delta_U = \{(u, u), u \in U\}$, а мера ρ является автодвойнингом меры $\bar{\mu}$. Из классификации джойнингов или метрической теоремы Ратнер вытекает, что эргодическая компонента меры ρ , содержащая точку $(\Lambda s, \Lambda t) \in M$, сосредоточена на замкнутой орбите $(\Lambda s, \Lambda t)H$ и является H -инвариантной для некоторой подгруппы $H \subset G \times G$ (причем H проектируется эпиморфно на каждую из двух копий G и содержит Δ_U).

Докажем, что однородное пространство $(\Lambda s, \Lambda t)H$ является графиком некоторого аффинного отображения $\varphi: \Lambda \setminus G \rightarrow \Lambda \setminus G$. Положим $\varphi(\Lambda s g) = \Lambda t g'$ для каждой пары $(g, g') \in H$. Корректность задания φ вытекает из соотношения $H \cap (s^{-1}\Lambda s \times G) \subset s^{-1}\Lambda s \times t^{-1}\Lambda t$. Проверим его, например, для $s = t = 1 \in G$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $(\lambda, h) \in H$. Так как $(\Lambda, \Lambda)H \subset M$, то для всех $(g, g') \in H$ мы имеем $\bar{\psi}(\Lambda h g') = \bar{\psi}(\Lambda \lambda g) = \bar{\psi}(\Gamma g) = \bar{\psi}(\Gamma g')$ и поэтому $h \in \Lambda$. Аффинность отображения φ и его коммутативность с U следуют из определения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для орициклического потока (когда $G = SL(2, \mathbb{R})$) единственной подгруппой $K \subset \text{Aff}(\Gamma \setminus G)$, имеющей “хорошее” пространство орбит $\Lambda \setminus G/K$ и коммутирующей с действием потока, является подгруппа сдвигов вдоль центра $\mathbb{Z}_2 \subset SL(2, \mathbb{R})$. В этом случае для $\Lambda' = \mathbb{Z}_2\Lambda$ мы замечаем, что $\Lambda \setminus G/K = \Lambda' \setminus G$, тем самым избавляясь от рассмотрения двойного класса смежности и получая теорему 4.1.

3. Теперь мы сформулируем и дадим упрощенный вывод классификации эргодических джойнингов произвольных унитарных потоков, используя основную метрическую теорему Ратнер.

ТЕОРЕМА О ДЖОЙНИНГАХ 5.7 ([R90a]). Пусть G_i , $i = 1, 2$, — связные группы Ли с решетками Γ_i и унитарными подгруппами $u_t^{(i)}$ соответственно. Предположим, что мера μ на $(\Gamma_1 \setminus G_1) \times (\Gamma_2 \setminus G_2)$ является эргодическим джойнингом для потоков $(\Gamma_1 \setminus G_1, u_t^{(1)}, \nu_1)$ и $(\Gamma_2 \setminus G_2, u_t^{(2)}, \nu_2)$. Тогда найдутся замкнутая подгруппа $\Lambda \subset G_1 \times G_2$ и элемент $s \in G_2$ такие, что

- (1) подгруппы $\Lambda_i = \Lambda \cap G_i$ нормальны в G_i ,

- (2) *имеется непрерывный эпиморфизм $\alpha: G_1 \rightarrow G_2/\Lambda_2$ с ядром Λ_1 ,*
- (3) *пересечение $\alpha(\Gamma_1) \cap c^{-1}\Gamma_2 c \Lambda_2$ является решеткой в G_2/Λ_2 ,*
- (4) *мера μ является Λ -инвариантной мерой, сосредоточенной на замкнутой орбите $(\Gamma_1, \Gamma_2 c)\Lambda$.*

Если через $\bar{\alpha}(g) \subset G_2$, $g \in G_1$, обозначить полный прообраз элемента $\alpha(g) \in G_2/\Lambda_2$ в G_2 , то $\text{supp } \mu = (\Gamma_1, \Gamma_2 c)\Lambda = \{(\Gamma_1 g, \Gamma_2 c \bar{\alpha}(g)), g \in G_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_i: G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$ и $p_i^*: (\Gamma_1 \setminus G_1) \times (\Gamma_2 \setminus G_2) \rightarrow \Gamma_i \setminus G_i$ — естественные проекции. Из основной метрической теоремы Ратнер следует, что найдутся точка $x \in (\Gamma_1 \setminus G_1) \times (\Gamma_2 \setminus G_2)$ и замкнутая подгруппа $\Lambda \subset G_1 \times G_2$ такие, что мера μ инвариантна относительно Λ и сосредоточена на замкнутой орбите $x\Lambda$. Так как μ является джойнингом, то $p_i^*(\mu) = \nu_i$ и поэтому $p_i(\Lambda) = G_i$, $i = 1, 2$. Так как подгруппа $\Lambda_i = \Lambda \cap G_i$ нормальна в Λ и $p_i(\Lambda) = G_i$, то Λ_i нормальна в G_i , $i = 1, 2$.

Обозначим через $\bar{p}_1: \Lambda \rightarrow G_1$ эпиморфизм групп, полученный сужением p_1 на Λ . Для каждой пары $(g, \bar{g}) \in \Lambda$ положим $\alpha(g) = \bar{g}\Lambda_2 \in p_2 \bar{p}_1^{-1}(g)\Lambda_2 \in G_2/\Lambda_2$. Тогда $\alpha: G_1 \rightarrow G_2/\Lambda_2$ — корректно определенный эпиморфизм групп с ядром Λ_1 . Заметим также, что $\bar{\alpha}(g) = p_2 \bar{p}_1^{-1}(g)$. Легко видеть, что $(H_1, H_2)\Lambda \cap G_2 = H_2 \bar{\alpha}(H_1)$ для любых подгрупп $H_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2$.

Так как $p_1^*(x\Lambda) = \Gamma_1 \setminus G_1$, то без ограничения общности можно считать, что $x = (\Gamma_1, \Gamma_2 c)$ для некоторого $c \in G_2$, и поэтому

$$(\Gamma_1, \Gamma_2 c)\Lambda = \{(\Gamma_1 g, \Gamma_2 c \bar{\alpha}(g)), g \in G_1\}.$$

Поскольку орбита $(\Gamma_1, \Gamma_2 c)\Lambda$ замкнута, произведение $(\Gamma_1 \times c^{-1}\Gamma_2 c)\Lambda \subset G_1 \times G_2$ также замкнуто. Следовательно, замкнуты пересечение

$$(\Gamma_1 \times c^{-1}\Gamma_2 c)\Lambda \cap G_2 = c^{-1}\Gamma_2 c \bar{\alpha}(\Gamma_1) \subset G_2$$

и произведение $c^{-1}\Gamma_2 c \alpha(\Gamma_1)\Lambda_2 \subset G_2/\Lambda_2$. Теперь из счетности Γ_1 и Γ_2 вытекает, что подгруппы $\alpha(\Gamma_1)$ и $c^{-1}\Gamma_2 c \Lambda_2$ дискретны в G_2/Λ_2 и потому являются там решетками. Наконец, слой расслоения однородных пространств конечного объема $p_1^*: (\Gamma_1, \Gamma_2 c)\Lambda \rightarrow \Gamma_1 \setminus G_1$ изоморфен однородному пространству $\bar{\alpha}(\Gamma_1)/\bar{\alpha}(\Gamma_1) \cap c^{-1}\Gamma_2 c \Lambda_2$, которое, тем самым, также должно иметь конечный объем. Следовательно, пространство $\alpha(\Gamma_1)/\alpha(\Gamma_1) \cap c^{-1}\Gamma_2 c \Lambda_2$ конечно, и теорема доказана.

Как следствие классификации джойнингов мы можем заключить, что каждый нетривиальный эргодический джойнинг двух унипотентных потоков на однородных пространствах простых групп Ли задает локальный изоморфизм групп. Отметим также, что данная общая классификация согласуется с классификацией 4.2 нетривиальных эргодических джойнингов орициклических потоков. Нужно лишь положить $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, $\alpha(g) = U_s^{-1}gU_s$, $c' = cU_s$. Тогда $\Omega = \{(\Gamma_1 g, \Gamma_2 c g U_s), g \in G\} = \{(\Gamma_1 g, \Gamma_2 c' \alpha(g)), g \in G\}$.

§ 6. Динамика орициклического потока

Здесь мы докажем метрическую гипотезу для потока орициклов $(\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R}), U)$, не пользуясь орисферичностью подгруппы U . Это послужит демонстрацией доказательства Ратнер в общем случае. Изложение следует [R92], см. также [Gh].

Далее мы будем рассматривать группу Ли $G = SL(2, \mathbb{R})$, снабженную левоинвариантной метрикой d_G . Введем следующие обозначения для подгрупп: $U = \{u(s), s \in \mathbb{R}\}$, $A = \{a(\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$, $H = \{h(b), b \in \mathbb{R}\}$, где

$$u(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a(\tau) = \begin{pmatrix} e^\tau & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix}, \quad h(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что диагональная подгруппа A нормализует унипотентные подгруппы U и H . Таким образом, $Q = AU$ и $W = AH$ являются двумерными разрешимыми подгруппами в G . Относительно левоинвариантной метрики d_G слой xU точки $x \in G$ является сжимающимся для правого действия диагональной подгруппы A на G . Аналогично, разбиение G на орбиты xH , $x \in G$, образует расширяющееся слоение. Таким образом, правое действие A на G задает аносовский поток.

Нас, однако, интересует правое действие унипотентной подгруппы U на G . Для наглядности будем считать, что направление подгруппы U вертикально. Тогда трансверсальный лист xW в точке $x \in G$ естественно назвать горизонтальным. Условимся о следующих обозначениях:

$$A_\delta = \{a(\tau), |\tau| \leq \delta\}, \quad H_\delta = \{h(b), |b| \leq \delta\}, \quad U_\delta = \{u(s), |s| \leq \delta\},$$

и пусть $W_\delta = A_\delta H_\delta$, $Q_\delta = A_\delta U_\delta$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in G$ и рассмотрим горизонтальную площадку xW . Через время s точка x переместится в точку $xu(s) \in G$. Интуитивно ясно, что если время s не очень велико, а размер δ площадки xW_δ достаточно мал, то траектория yU произвольной точки $y \in xW_\delta$ проткнет горизонтальный лист $xu(s)W$ в некоторый момент времени $\alpha(y, s)$. Пусть

$$y = xa(\tau)h(b) \quad \text{и} \quad yu(\alpha(y, s)) = xu(s)a(\tau(y, s))h(b(y, s)).$$

Таким образом, $\alpha(y, s)$ – время, которое требуется точке $y \in xW$, чтобы попасть в горизонтальный лист $xu(s)W$ точки $xu(s)$, а $\tau(y, s)$ и $b(y, s)$ – A - и H -координаты точки $yu(\alpha(y, s))$ в горизонтальном листе $xu(s)W$ (причем $\tau(y, 0) = \tau$, $b(y, 0) = b$).

Непосредственная проверка показывает, что

$$\alpha(y, s) = \frac{s}{e^{2\tau} - sb}, \quad \tau(y, s) = \ln(e^\tau - sbe^{-\tau}), \quad b(y, s) = b(1 - sbe^{-2\tau}).$$

Итак, функции $\alpha(y, s)$, $\tau(y, s)$, $b(y, s)$ определены при $sb < e^{2\tau}$. Заметим, что если $b = 0$, т.е. $y \in xA$, то $\tau(y, s) = \tau$, $b(y, s) = 0$, $\alpha(y, s) = s/e^{2\tau}$ и все три функции определены всюду. Если же $b \neq 0$, то существует такое конечное критическое значение $s_{\text{cr}} = s_{\text{cr}}(y)$, что траектория yU не пересекает горизонтальный лист $xu(s_{\text{cr}})W$ точки $xu(s_{\text{cr}})$, а лишь асимптотически приближается к нему в обоих направлениях (но с разных сторон).

В основе этого факта лежит то обстоятельство, что группа G как многообразие не гомеоморфна 3-мерному векторному пространству и не представляется в виде произведения UAH . Поэтому возможно, что элемент $y^{-1}xu(s_{\text{cr}})$ не лежит в произведении UW и пересечение $xu(s_{\text{cr}})W \cap yU$, таким образом, пусто.

Разбегание точек $xu(s)$ и $yu(s)$ в метрике d_G можно оценить покоординатно. Если в начальный момент времени $s = 0$ точка y отстояла от точки x на расстояние τ в A -направлении и на расстояние b в H -направлении, то через время s они разошлись на расстояние $\tau(y, s)$ в A -направлении, на расстояние $b(y, s)$ в H -направлении и еще на расстояние $s - \alpha(y, s)$ в U -направлении. Динамика действия U на G такова, что разбегание близких точек происходит в U -направлении гораздо быстрее, чем в трансверсальных A - и H -направлениях. Например, если $y = xa(\tau)$, то $\tau(y, s) \equiv \tau$, $b(y, s) \equiv 0$, т.е. в A - и H -направлениях никакого разбегания не происходит. Но $\alpha(y, s) = s/e^{2\tau}$ и поэтому разбегание точек за время s в U -направлении пропорционально s .

Если $y = xa(\tau)h(b)$, где $b \neq 0$, то полезно оценить поведение функций $\alpha(y, s)$, $\tau(y, s)$ и $b(y, s)$ при $s \rightarrow s_{\text{cr}}$. Положим $r(s) = 1 - s/s_{\text{cr}}$. Тогда $\alpha(y, s) = 1/br - 1/b$, $\tau(y, s) = \tau + \ln(r)$, $b(y, s) = br$. Таким образом, $b(y, s) \rightarrow 0$, $\tau(y, s)$ имеет особенность порядка $\ln(r)$, а $\alpha(y, s)$ — порядка $1/r$ при $s \rightarrow s_{\text{cr}}$.

Зафиксируем теперь параметр $0 < \theta < 1$ и рассмотрим $y \in xW_\delta$, где $\delta < \theta/10$. Пусть $s_\theta = s_\theta(\tau, b) > 0$ — момент времени, при котором разбегание $\tau(y, s)$ точек x и $y = xa(\tau)h(b)$, $b \neq 0$, достигло по абсолютной величине θ , т.е. $|\tau(y, s_\theta)| = \theta$ (рано или поздно это произойдет для любой точки y с параметром $b \neq 0$). В явном виде

$$s_\theta = \frac{e^\tau(e^\tau - e^{-\theta \operatorname{sgn}(b)})}{b}, \quad \alpha(y, s_\theta) = \frac{s_\theta}{e^{-\theta \operatorname{sgn}(b) + \tau}},$$

$$\tau(y, s_\theta) = -\theta \operatorname{sgn}(b), \quad b(y, s_\theta) = be^{-\theta \operatorname{sgn}(b) - \tau},$$

где всюду $\operatorname{sgn}(b)$ — сигнатура параметра $b \neq 0$. Если теперь устремить размер δ начальной площадки xW_δ к нулю, то получим $s_\theta \rightarrow +\infty$, $\alpha(y, s_\theta)/s_\theta \rightarrow e^{\theta \operatorname{sgn}(b)}$, $b(y, s_\theta) \rightarrow 0$. Таким образом, чем ближе точки y и x , тем большее время требуется им, чтобы разойтись в A -направлении на расстояние θ , причем разбегание этих точек в U -направлении в этот момент времени стремится к ∞ , а в H -направлении к 0 (при $y \rightarrow x$). Нам потребуется точная формулировка этого наблюдения — так называемое свойство Ратнер, которое играет существенную роль в доказательстве метрической гипотезы Дани (см. также [R95b]).

ЛЕММА 6.1 (*R-свойство орициклического потока*). *Найдутся такие константы $0 < \eta < 1$, $C > 1$, что если $0 < \theta < 1$, $0 < \delta < \theta/10$, $y \in xW_\delta$ и $|\tau(y, s_\theta)| = \theta$, причем $|\tau(y, s)| < \theta$, $0 < s < s_\theta$, то $\theta/2 \leq |\tau(y, s)| \leq \theta$, $|b(y, s)| \leq C\theta/s_\theta$ для всех $s \in [(1 - \eta)s_\theta, s_\theta]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $xW_\delta^+ = \{y = xa(\tau)h(b), |\tau| < \delta, 0 < b < \delta\}$. Функция s_θ монотонно возрастает по θ для всех $y \in xW_\delta^+$. Докажем, что найдется $0 < \eta < 1$ такое, что $s_{\theta/2} \geq (1 - \eta)s_\theta$ для всех $0 < \theta < 1$, $y \in xW_\delta^+$. Для этого достаточно показать, что $\eta = \inf\{1 - s_{\theta/2}/s_\theta\} > 0$, где $\inf$ берется по всем $0 < \theta < 1$, $y \in xW_{\theta/10}^+$. Но

$$1 - \frac{s_{\theta/2}}{s_\theta} = \frac{e^{-\theta/2} - e^{-\theta}}{e^\tau - e^{-\theta}} \geq \frac{e^{-\theta/2} - e^{-\theta}}{e^{\theta/10} - e^{-\theta}} = \frac{e^{\theta/2} - 1}{e^{1.1\theta} - 1}$$

для всех $|\tau| \leq \theta/10$. Поскольку $(e^{\theta/2} - 1)/(e^{1.1\theta} - 1) \rightarrow 10/22$ при $\theta \rightarrow 0$, то $\eta > 0$.

Докажем теперь, что $C = \sup\{|b(y, s)|s_\theta/\theta\} < \infty$, где $\sup$ берется по всем $0 < \theta < 1$, $y \in xW_{\theta/10}^+$, $(1 - \eta)s_\theta < s < s_\theta$. Но

$$\frac{b(y, s)s_\theta}{\theta} = \frac{(1 - bse^{-2\tau})(e^{2\tau} - e^{\tau-\theta})}{\theta} \leq \frac{e^{2\tau} - e^{\tau-\theta}}{\theta} \leq \frac{e^{\theta/5} - e^{-1.1\theta}}{\theta}$$

для всех $|\tau| \leq \theta/10$. Поскольку $(e^{\theta/5} - e^{-1.1\theta})/\theta \rightarrow 13/10 < \infty$ при $\theta \rightarrow 0$, то $C < \infty$ и все доказано. Нижняя половина $xW_{\theta/10}^-$ рассматривается аналогично.

Эта лемма снова отражает то свойство орициклического потока, что разбегание двух близких точек x и y происходит быстрее в направлении самого потока, чем в трансверсальных направлениях. В самом деле, если зафиксировать $0 < \theta < 1$ и устремить $\delta \rightarrow 0$, то получим $s_\theta \rightarrow \infty$, $s_\theta - \alpha(y, s_\theta) \rightarrow \infty$, $|\tau(y, s_\theta)| = \theta$, $b(y, s_\theta) \rightarrow 0$, т.е. при фиксированном разбегании в A -направлении разбегание в U -направлении стремится к бесконечности, а в H -направлении к 0.

Нам понадобится также следующий результат о том, что для точки $y \in xW$, достаточно близкой к x , функция $\varphi_y(s) = \alpha(y, s)$ на отрезке $[0, s_\theta]$ почти не искажает лебеговскую меру λ :

ЛЕММА 6.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\theta = \theta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $y \in xW_\theta$ и любого борелевского множества $B \subset [0, s_\theta]$ будет $|\lambda(B)/\lambda(\varphi_y(B)) - 1| < \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\theta > 0$ такое, что для всех $y \in xW_\theta$ и всех $s \in [0, s_\theta]$ будет $|\varphi'_y(s) - 1| < \varepsilon$. Но $\varphi_y(s) = s/(e^{2\tau} - sb)$, $\varphi'_y(s) = e^{2\tau}/(e^{2\tau} - sb)^2$. Поскольку функция $\varphi'_y(s)$ монотонна и $\varphi'_y(0) = e^{-2\tau}$, $\varphi'_y(s_\theta) = e^{2\tau+2\theta \operatorname{sgn}(b)}$, то осталось выбрать θ из условия $e^{4\theta} - 1 < \varepsilon$.

Сформулируем и докажем теорему классификации конечных эргодических мер орициклического потока $(\Gamma \setminus G, u_t)$ на произвольном пространстве $X = \Gamma \setminus G$. Заметим, что для решетки $\Gamma \subset G$ этот результат был получен Дани и Смилли [DS].

ТЕОРЕМА 6.3. *Пусть Γ – дискретная подгруппа в $G = SL(2, \mathbb{R})$ и μ – эргодическая U -инвариантная вероятностная мера на $X = \Gamma \setminus G$. Тогда либо*

- 1) Γ – решетка в G и мера μ является G -инвариантной, либо
- 2) μ сосредоточена на периодической орбите U .

Приступим к доказательству. Далее d_X обозначает метрику на X , индуцированную левоинвариантной метрикой d_G на G , и $O_\varepsilon(x) = \{z \in X : d_X(z, x) < \varepsilon\}$ обозначает ε -окрестность точки $x \in X$. Пусть

$$\Lambda = \Lambda(\mu) = \{g \in G : \mu(E) = \mu(Eg) \text{ для каждого борелевского } E \subset X\}.$$

Тогда Λ есть стабилизатор меры μ , причем Λ является замкнутой подгруппой в G , содержащей U . Возможны два варианта:

- 1) $A \not\subset \Lambda$,
- 2) $A \subset \Lambda$.

Рассмотрим первый случай. Так как $A \not\subset \Lambda$, то $Q = AU \not\subset \Lambda$.

ЛЕММА 6.4. Если $A \not\subset \Lambda$, то найдется подмножество $Y \subset X$ такое, что $\mu(Y) = 1$ и $Y \cap Yq = \emptyset$ для любого $q \in Q - \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем вначале подходящее множество для фиксированного элемента $q \in Q - \Lambda$. Положим по определению $\mu_q(E) = \mu(Eq)$ для любого $q \in Q - \Lambda$. Тогда мера μ_q является U -инвариантной эргодической вероятностной мерой, не совпадающей с μ . Поэтому меры μ_q и μ взаимно сингулярны, т.е. найдется множество $E \subset X$ такое, что $\mu(E) = 1, \mu_q(E) = \mu(Eq) = 0$. Тогда если $Y_q = E - Eq$, то $\mu(Y_q) = 1$ и $Y_q \cap Y_q q = \emptyset$.

Рассмотрим компакт $K \subset Y_q$ такой, что $\mu(K) \geq 0.99$. Так как $K \cap Kq = \emptyset$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $d_X(K, Kq) \geq \varepsilon$. Ввиду эргодичности меры μ множество $Y_{q,\varepsilon} \subset X$, состоящее из всех точек $x \in X$, для которых

$$S_{\chi_K}(x, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_K(xu(s)) ds \rightarrow \mu(K),$$

имеет полную μ -меру (здесь и далее функция χ_K означает индикатор подмножества $K \subset X$). Докажем, что $Y_{q,\varepsilon} \cap Y_{q,\varepsilon} q = \emptyset$ для любого $g \in qQ_\varepsilon$. Предположим, напротив, что найдутся элемент $g \in qQ_\varepsilon$ и точки $x, y \in Y_{q,\varepsilon}$ такие, что $x = yg$. Пусть $g = a(\tau)u(r)$. Тогда $yu(s)g = xu(e^{-2\tau}s)$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Так как $x, y \in Y_{q,\varepsilon}$, то для достаточно большого $t > 1$ мы будем иметь $S_{\chi_K}(y, t) \geq 0.9$ и $S_{\chi_K}(x, e^{-2\tau}t) \geq 0.9$. Следовательно, непременно найдется значение $s \in [0, t]$, для которого $z = yu(s) \in K$ и $zg = xu(e^{-2\tau}s) \in K$. Но $zg = zqp$, где $p \in Q_\varepsilon$, и поэтому $d_X(zg, zq) < \varepsilon$, причем $zg \in K$ и $zq \in Kq$. Противоречие.

Наконец, представим множество $Q - \Lambda$ в виде счетного объединения $Q - \Lambda = \bigcup_i Q_{\varepsilon_i}(q_i)$ и положим $Y = \bigcap_i Y_{q_i, \varepsilon_i}$. Тогда $\mu(Y) = 1$ и $Y \cap Y(Q - \Lambda) = \emptyset$.

Теперь мы готовы закончить рассмотрение первого варианта.

ЛЕММА 6.5. Если $A \not\subset \Lambda$, то найдется точка $x \in X$, для которой $\mu(xU) = 1$ и поэтому мера μ сосредоточена на периодической орбите.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta > 0$ таково, что $a(\tau) \notin \Lambda$ для любого $0 < |\tau| < \theta$ и $\theta \leq \theta(0.1)$ (см. лемму 6.2). Константы $C > 1, \eta < 1$ возьмем из R -свойства, а множество $Y \subset X$ — из леммы 6.4. Тогда найдутся компакт $K \subset Y$ и число $\delta > 0$ такие, что $\mu(K) > 1 - \eta/1000$ и $d_X(K, Ka(\tau)) \geq \delta$ при всех $\theta/2 \leq |\tau| \leq \theta$. Ввиду эргодичности меры μ существуют множество $F \subset X$ положительной μ -меры и значение $t_0 \geq 1$ такие, что $S_{\chi_K}(x, t) \geq 1 - \eta/100$ для всех $x \in F, t \geq t_0$. Наконец, выберем настолько малое $0 < \xi < \theta$, что для любых $x \in G, y \in W(x, \xi)$ будет $s_\theta \geq 10t_0$ и $C\theta/s_\theta < \delta/10$.

Докажем, что множество F локально содержится в двумерном вертикальном Q -листе: $F \cap O_\varepsilon(x) \subset xQ_\xi$ для каждого $x \in F$. Не ограничивая общности предположим обратное: найдутся $x, y \in F, y = xa(\tau)h(b), |\tau| < \xi, 0 < |b| < \xi$. Мы имеем $s_\theta > t_0$ и $\alpha(y, s_\theta) > t_0$. Поэтому $S_{\chi_K}(x, s_\theta) \geq 1 - \eta/100$ и, аналогично, $S_{\chi_K}(y, \alpha(y, s_\theta)) \geq 1 - \eta/100$. Ввиду леммы 6.2 и выбора θ функция $\alpha(y, s)$ почти не искажает лебеговскую меру на $\mathbb{R}$ и поэтому найдется хотя бы одно значение $s \in [(1 - \eta)s_\theta, s_\theta]$ такое, что $xu(s) \in K$ и $yu(\alpha(y, s)) \in K$. Но $yu(\alpha(y, s)) = xu(s)a(\tau(y, s))h(b(y, s))$, причем по R -свойству $\theta/2 \leq |\tau(y, s)| \leq \theta$ и $|b(y, s)| \leq C\theta/s_\theta \leq \delta/10$. Так как $xu(s) \in K$, то $xu(s)a(\tau(y, s)) \in Ka(\tau(y, s))$. Следовательно,

$d_X(K, Ka(\tau(y, s))) \leq \delta/10$, где $\theta/2 \leq |\tau(y, s)| \leq \theta$. Полученное противоречие с выбором δ показывает, что $F \cap O_\varepsilon(x) \subset xQ_\xi$.

С другой стороны, так как $Q_\xi \cap (Q - \Lambda) \subset U$ и $Y \cap Y(Q - \Lambda) = \emptyset$, то $Y \cap xQ_\xi \subset xU$ для каждого $x \in Y$. Поскольку $\mu(F) > 0$ и $\mu(Y) = 1$, то найдется такая точка $x \in F \cap Y$, что $\mu(F \cap O_\varepsilon(x)) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. В частности, $0 < \mu(F \cap O_\varepsilon(x)) < \mu(xQ_\xi) = \mu(xQ_\xi \cap Y) < \mu(xU)$. Следовательно, ввиду эргодичности $\mu(xU) = 1$.

Теперь мы приступим к рассмотрению второго варианта. Следующий результат восходит к Хедлунду, который доказывал перемешивание геодезического потока (относительно меры Лиувилля), исходя из эргодичности орициклического.

ЛЕММА 6.6. *Если $A \subset \Lambda$, то A -действие на (X, μ) является перемешивающим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ([R92]). Достаточно показать, что $\int_X \varphi(x)f(xa(-\tau))d\mu \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, для любых двух ограниченных равномерно непрерывных функций φ, f на X с $\int_X f d\mu = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $0 < \delta < 1$, что $|\varphi(x) - \varphi(z)| < \varepsilon$ для любых $x, z \in X$, $d_X(x, z) < \delta$. Ввиду U -эргодичности на (X, μ) найдутся $t_0 > 1$ и $Y \subset X$ такие, что $\mu(Y) > 1 - \varepsilon$ и $|S_f(y, t)| < \varepsilon$ для всех $y \in Y$, $t \geq t_0$. Возьмем настолько большое $\tau_0 > 0$, что $e^{-2\tau_0}t_0 = \delta$, и пусть $\tau \geq \tau_0$. Тогда для $Y_\tau = Ya(\tau)$ ввиду $A \subset \Lambda$ мы получим $\mu(Y_\tau) = \mu(Y) > 1 - \varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \int_X \varphi(x)f(xa(-\tau))d\mu \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(\int_X \varphi(xu(s))f(xu(s)a(-\tau))d\mu \right) ds \\ &= \int_X \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \varphi(xu(s))f(xu(s)a(-\tau))ds \right) d\mu \\ &= \int_X \frac{\varphi(x)}{\delta} \left(\int_0^\delta f(xa(-\tau)u(e^{2\tau}s))ds \right) d\mu + \varepsilon_1 \\ &= \int_X \frac{\varphi(x)}{s_\tau} \left(\int_0^{s_\tau} f(xa(-\tau)u(s))ds \right) d\mu + \varepsilon_1 \\ &= \int_X \varphi(x)S_f(xa(-\tau), s_\tau) d\mu + \varepsilon_1 \\ &= \int_{Y_\tau} \varphi(y)S_f(ya(-\tau), s_\tau) d\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $s_\tau = \delta e^{2\tau} \geq t_0$. Здесь оценка на ε_1 вытекает из равномерной непрерывности φ , на ε_2 — из ограниченности φ и f , а на ε_3 — из выбора Y .

Последним шагом в доказательстве теоремы является

ЛЕММА 6.7. *Пусть $A \subset \Lambda$. Тогда если ν есть G -инвариантная борелевская мера на $X = \Gamma \backslash G$, то $\nu(X) < \infty$ и $\mu = \nu/\nu(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию f на X с компактным носителем. Ввиду A -эргодичности меры μ (см. лемму 6.6) множество $C_f \subset X$ всех точек $y \in X$, для которых

$$S_{f,n}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(ya^{-i}) \rightarrow f_\mu = \int_X f d\mu, \quad n \rightarrow \infty,$$

имеет полную μ -меру. Так как H -орбиты являются сжимающимися оришками для отрицательного направления геодезических, то $d_X(za^{-n}, ya^{-n}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, для любого элемента $z \in yH$. Поскольку функция f равномерно непрерывна, то из $S_{f,n}(y) \rightarrow f_\mu$ следует $S_{f,n}(z) \rightarrow f_\mu$, $z \in yH$. Следовательно, $C_f H = C_f$. С другой стороны, мера μ является AU -инвариантной и $\mu(C_f) = 1$. Следовательно, C_f имеет полную ν -меру. А именно: в окрестности $O(x) = xQ_{\delta/2}H_\delta \cap xH_{\delta/2}Q_\delta$ разложим меру μ в семейство условных мер μ_y на листах $yQ_{\delta/2}$, $y \in xH_{\delta/2}$. Из Q -инвариантности μ следует, что (почти) каждая μ_y является гладкой, т.е. эквивалентной лебеговской площади на $yQ_{\delta/2}$. Все пересечения $C_f \cap yQ_{\delta/2}$ получаются из $C_f \cap xQ_{\delta/2}$ с помощью аналитических отображений, которые переводят множества лебеговской площади 0 в такие же. Поэтому объем $C_f \cap O(x)$ равен объему $O(x)$ (подробности см. в [R92]).

Предположим теперь, что функция f вдобавок неотрицательна и $f_\mu > 0$. Тогда по лемме Фату

$$f_\mu \nu(X) = f_\mu \nu(C_f) = \int_{C_f} f_\mu d\nu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_f} S_{f,n} d\nu = \int_{C_f} f d\nu = \int_X f d\nu < \infty.$$

Мы доказали, что $\nu(X) < \infty$, и поскольку последовательность $S_{f,n}$ равномерно ограничена, мы можем применить теорему Лебега о предельном переходе:

$$f_\nu = \int_X f d\nu = \int_{C_f} f d\nu = \int_{C_f} S_{f,n} d\nu \rightarrow \int_{C_f} f_\mu d\nu = f_\mu \nu(X),$$

и поэтому $f_\mu = f_\nu / \nu(X)$ для любой неотрицательной непрерывной функции f с компактным носителем. Следовательно, $\mu = \nu / \nu(X)$, что и требовалось.

§ 7. Классификация эргодических мер унипотентных потоков

1. Метрическая гипотеза Дани состояла в том, что все вероятностные эргодические меры для действия унипотентных подгрупп $U \subset G$ на однородных пространствах $\Gamma \backslash G$ имеют алгебраическое происхождение. Гипотеза Маргулиса распространяла это утверждение на все подгруппы $U \subset G$, порожденные унипотентными элементами (см. обзоры [R94,95b], [B]). Полное решение гипотезы Дани и “почти полное” гипотезы Маргулиса было получено Мариной Ратнер.

ТЕОРЕМА 7.1 ([R91a]). Пусть G – группа Ли с дискретной подгруппой $\Gamma \subset G$ и подгруппа $U \subset G$ имеет вид $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i U_0$, где все u_i унипотентны в G , U/U_0

конечно порождена и связная компонента U_0 порождена однопараметрическими унитарными подгруппами. Тогда любая U -эргодическая вероятностная мера на $\Gamma \backslash G$ является алгебраической.

Основную часть доказательства этой теоремы занимает рассмотрение однопараметрической подгруппы $U \subset G$. Мы дадим лишь набросок этого сложного доказательства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть $a \in G$, $x \in G$ и подгруппа $\Gamma \subset G$ дискретна. Скажем, что полуорбита $\{\Gamma x a^n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ существенно дивергентна, если найдутся элементы $\gamma_n \in \Gamma - \{1\}$ такие, что $(x a^n)^{-1} \gamma_n (x a^n) \rightarrow 1, n \rightarrow +\infty$.

Легко видеть, что если полуорбита $\Gamma x a^n$ существенно дивергентна, то она является дивергентной (уходит на бесконечность в $\Gamma \backslash G$). В самом деле, предположим, что $\Gamma x a^{n_k} \rightarrow \Gamma z, n_k \rightarrow +\infty$. Тогда найдется последовательность $\theta_k \in \Gamma$ такая, что $\theta_k x a^{n_k} \rightarrow z$. Но

$$(x a^{n_k})^{-1} \gamma_{n_k} (x a^{n_k}) = (\theta_k x a^{n_k})^{-1} \theta_k \gamma_{n_k} \theta_k^{-1} (\theta_k x a^{n_k}) \rightarrow 1$$

и поэтому $\theta_k \gamma_{n_k} \theta_k^{-1} \rightarrow 1$. Поскольку Γ дискретна и $\gamma_{n_k} \neq 1$, мы получили противоречие.

Для элемента $a \in G$ рассмотрим множество $D(a) \subset \Gamma \backslash G$ всех существенно дивергентных полуорбит. Если μ — конечная a -инвариантная мера на $\Gamma \backslash G$, то по теореме Пуанкаре о возвращении $\mu(D(a)) = 0$.

Напомним, что элемент $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ является полупростым, если оператор $ad_{\mathfrak{a}}$ диагонализуем над $\mathbb{C}$. Если же этот оператор приводится к диагональному виду над $\mathbb{R}$, то элемент $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ называется $\mathbb{R}$ -диагонализуемым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Нильпотентный элемент $\mathfrak{u} \in \mathfrak{g}$ называется *орициклическим*, если найдутся $\mathbb{R}$ -диагонализуемый элемент $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ и нильпотентный элемент $\mathfrak{u}^* \in \mathfrak{g}$ такие, что $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}^*] = \mathfrak{a}$, $[\mathfrak{u}, \mathfrak{a}] = -2\mathfrak{u}$, $[\mathfrak{u}^*, \mathfrak{a}] = 2\mathfrak{u}^*$. Элемент $\mathfrak{a}$ в этом случае называется *диагональным* для $\mathfrak{u}$. Аналогично, элемент $a = \exp(\mathfrak{a}) \in G$ называется *диагональным* для орициклического элемента $u = \exp(\mathfrak{u}) \in G$.

По определению элементы $\mathfrak{a}, \mathfrak{u}, \mathfrak{u}^*$ порождают подалгебру $sl_2(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}) \simeq sl(2, \mathbb{R})$. В свою очередь подгруппы $\exp(\mathbb{R}\mathfrak{a})$, $\exp(\mathbb{R}\mathfrak{u})$ и $\exp(\mathbb{R}\mathfrak{u}^*)$ порождают подгруппу $SL_2(u, a)$ в G , локально изоморфную $SL(2, \mathbb{R})$. Отметим, что по лемме Морозова–Джекобсона [Ja] любой нильпотентный элемент в полупростой алгебре Ли является орициклическим. Ясно также, что в произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентный элемент не обязан быть орициклическим (пример: алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима).

Пусть $G^-(a)$ есть сжимающаяся орисферическая подгруппа для диагонального элемента $a = \exp(\mathfrak{a}) \in G$. Тогда $u = \exp(\mathfrak{u}) \in G^-(a)$. Заметим, что диагональный элемент для орициклического элемента вообще говоря, не единственен. Однако можно доказать (см. [R91a]), что если $a, a' \in G$ диагональны для $u \in G$, то $a' = s a s^{-1}$ для некоторого $s \in G^-(a) \cap Z_G(u)$ (где $Z_G(u)$ обозначает централизатор u в G).

Заметим, что если элемент $a \in G$ диагонален для $u \in G$, то множество $D(a)$ существенно дивергентных полуорбит в $\Gamma \backslash G$ инвариантно относительно u -сдвига. Поэтому если μ есть эргодическая вероятностная u -инвариантная мера, то либо

$\mu(D(a)) = 0$, либо $\mu(D(a)) = 1$. Кроме того, $D(a) = D(cac^{-1})$ для любого $c \in G^-(a)$. Следовательно, множество $D(a)$ не зависит от выбора диагонального элемента для $u \in G$.

Пусть μ есть эргодическая вероятностная мера на $\Gamma \backslash G$ для орициклического элемента $u \in G$ и $\Lambda = \Lambda(\mu) \subset G$ – ее стабилизатор. Используя R -свойство (см. [R95b], где оно обсуждается в общем случае), Марина Ратнер доказала, что альтернатива $\mu(D(a)) = 0$ или 1 в точности соответствует тому, найдется элемент $c \in G^-(a)$ такой, что $cac^{-1} \in \Lambda$ или нет. Если такой элемент $c \in G$ существует, оказывается возможным доказать, что $cSL_2(u, a)c^{-1} \subset \Lambda$ (и, таким образом, подгруппа Λ неамenable) и мера μ алгебраична: $\mu(x\Lambda_0) = 1$ для некоторой точки $x \in \Gamma \backslash G$. Таким образом, верна

ТЕОРЕМА 7.4 ([R91a]). *Пусть элемент $a \in G$ диагонален для орициклического элемента $u \in G$ и μ есть u -эргодическая вероятностная мера на $\Gamma \backslash G$. Тогда либо 1) $\mu(D(a)) = 1$, либо 2) $cSL_2(u, a)c^{-1} \subset \Lambda(\mu)$ для некоторого $c \in G^-(a)$ и мера μ алгебраична.*

Заметим, что для $G = SL(2, \mathbb{R})$ (см. §6) первая возможность соответствует тому, что геодезический поток не сохраняет меру μ (а сама мера оказывается сосредоточенной на периодической орбите орицикла). Во втором случае мера μ является G -инвариантной мерой на $\Gamma \backslash G$, индуцированной мерой Хаара на G .

Основная метрическая теорема для однопараметрической унитарной подгруппы U доказывается по следующей схеме с использованием индукции по $\dim(G)$. Рассмотрим стабилизатор Λ для U -эргодической вероятностной меры μ . Возможны два варианта. Если связная компонента Λ_0 аменабельна, то максимальная связная унитарная в G подгруппа $N \subset \Lambda_0$ нормальна в Λ_0 и содержит U . В этом случае с использованием обобщенного R -свойства для унитарной подгруппы $N \subset G$ удается доказать алгебраичность μ . Если же Λ_0 неамenable, она содержит некоторый орициклический элемент h , диагональный элемент a и подгруппу $SL_2(h, a)$. Так как $a \in \Lambda$, то $\mu(D(a)) = 0$. Следовательно, по теореме 7.4 μ -почти всякая эргодическая компонента для орициклического элемента $h \in G$ алгебраична. Рассмотрение факторпространства по модулю этого разбиения позволяет снизить размерность группы Λ и применить аргумент индукции.

Для того чтобы доказать теорему 7.1 в случае $\dim(U) > 1$, напомним следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.5 (Пью–Шуб, [PS]). *Пусть U – связная абелева группа Ли с эргодическим действием на вероятностном пространстве (X, μ) . Тогда почти всякий элемент U (относительно меры Хаара на U) действует на (X, μ) эргодически.*

М. Ратнер обобщила этот результат на класс связных нильпотентных групп Ли (см. также [Da89]), доказав таким образом метрическую теорему для связных унитарных подгрупп $U \subset G$. Отсюда уже нетрудно вывести теорему 7.1 и для связных подгрупп $U \subset G$, порожденных унитарными элементами. В самом деле, такая группа U имеет вид $U = PM$, где подгруппа $M \subset G$ унитарна, а $P \subset G$ полупроста и не

имеет компактных множителей. Пусть $V \subset P$ – максимальная связная унитарная подгруппа. Тогда VM является максимальной связной унитарной подгруппой в U и нормальная в U подгруппа Мура для VM совпадает с U . Но в силу феномена Матнера С.1 любая U -эргодическая конечная мера является VM -эргодической, и мы можем найти эргодическую однопараметрическую подгруппу из VM .

Случай несвязной подгруппы U , порожденной унитарными элементами, технически более сложен. В полном объеме доказательство гипотезы Маргулиса было недавно закончено Шахом.

ТЕОРЕМА 7.6 ([Sh97]). Пусть G – группа Ли с замкнутой подгруппой $\Gamma \subset G$ и подгруппа $U \subset G$ порождена унитарными элементами. Тогда любая U -эргодическая вероятностная мера на $\Gamma \backslash G$ является алгебраической.

2. Как видно из теоремы 7.6, гипотеза Маргулиса доказана для произвольной замкнутой подгруппы $\Gamma \subset G$ и любой (возможно, несвязной) группы G . В явном виде требование дискретности Γ было устранено Витте [Wi94] с использованием теоремы плотности В.3, но по существу имелось еще в работе автора [St88], где проведена редукция теории однородных потоков к случаю дискретной подгруппы изотропии.

Изложим идею этой редукции для связной односвязной группы G , используя конструкцию расщепления Мальцева [М] для разрешимых групп.¹³ Пусть $G = L \cdot R$ – разложение на радикал R и полупростую подгруппу Леви L . Согласно Мальцеву (см. [М] или [ВМ]) R вкладывается в вещественно-алгебраическую группу $A(R) = A(T_R) \cdot R$, причем найдется такой выбор абелевой редуктивной подгруппы $A(T_R) \subset \text{Aut}(R)$, что ее действие на R коммутирует с действием L . Кроме того, любой Ad -унитарный элемент в R унитарен и как элемент $A(R)$. Пусть $A(G) = (L \times A(T_R)) \cdot R$, $Z(G)$ – центр G и $Z = Z(G) \cap L$. Предположим вначале, что $Z = 1$. Тогда группа $A(G)$ является вещественно-алгебраической и любой Ad -унитарный элемент в G унитарен в $A(G)$. Обозначим через $A(H) \subset A(G)$ алгебраическую оболочку любой подгруппы $H \subset A(G)$.

Пусть теперь замкнутая подгруппа U порождена унитарными элементами и μ является U -инвариантной эргодической конечной мерой на $\Gamma \backslash A(G)$. Пусть $X = \{g \in A(G) : gUg^{-1} \subset A(\Gamma)\}$. Тогда $\Gamma X = X$. Докажем, что мера μ сосредоточена на замкнутом подмножестве $\Gamma X \subset \Gamma \backslash G$. В самом деле, если $g \notin X$, то найдется унитарный элемент $u \in U$ такой, что $guu^{-1} \notin A(\Gamma)$. Алгебраическая оболочка подгруппы $\{gu^k u^{-1}, k \in \mathbb{Z}\}$ является однопараметрической унитарной подгруппой. Так как произведение двух алгебраических подгрупп локально замкнуто и $g \notin X$, то орбита $\{A(\Gamma)gu^k, k \in \mathbb{Z}\} \subset A(\Gamma) \backslash A(G)$ локально замкнута и непериодична. В этом случае орбита $\{\Gamma gu^k, k \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma \backslash A(G)$ также локально замкнута и непериодична. Но множество таких орбит имеет μ -меру 0, поскольку μ -почти все орбиты подгруппы $\{u^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на $\Gamma \backslash G$ являются рекуррентными. Так как в U найдется плотная счетная подгруппа, порожденная унитарными элементами, то $\text{supp}(\mu) \subset \Gamma X$.

Итак, мера μ сосредоточена на объединении U -инвариантных замкнутых подмножеств вида $X(g) = \Gamma \backslash A(\Gamma)g$, где $g \in X$. Ввиду эргодичности меры μ найдется такой элемент $g \in X$, что μ сосредоточена на $X(g) \subset \Gamma \backslash A(G)$. Поток $(X(g), U)$ изоморфен

¹³Впервые для изучения однородных потоков ее применил Ауслендер [AG], а в отечественной литературе – Сафонов [Saf].

потоку $(\Gamma \setminus A(\Gamma), gUg^{-1})$. Но связная компонента Γ_0 нормальна в $A(\Gamma)$, и мы можем теперь воспользоваться классификацией эргодических мер на однородном пространстве $(\Gamma/\Gamma_0) \setminus (A(\Gamma)/\Gamma_0)$ с дискретной подгруппой изотропии.

В общем случае можно рассмотреть эпиморфизм $\psi: A(G) \rightarrow A(G)/Z = (L/Z \times A(T_R)) \cdot R$ и имитировать структуру алгебраической группы на $A(G)$, беря для $H \subset G$ в качестве “алгебраической” оболочки $A(H) \subset A(G)$ группу $\psi^{-1}(A(\psi(H)))_0 H$ (пользуясь тем, что $A(G)/Z$ является “настоящей” алгебраической группой). Легко проверить, что все предыдущие рассуждения проходят дословно.

3. В заключение мы изложим схему доказательства метрической теоремы для алгебраических групп способом, предложенным Маргулисом и Томановым [MT94].

Пусть $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ – алгебраическая группа над $\mathbb{R}$ с дискретной подгруппой Γ . Если элемент $g \in G$ нормализует связную подгруппу $A \subset G$, через $\alpha(g, A)$ обозначим коэффициент искажения меры Хаара m на A элементом g (т.е. $m(g^{-1}Xg) = \alpha(g, A)m(X)$ для любого измеримого $X \subset A$). Скажем, что элемент $s \in G$ класса $\mathcal{A}$, если его алгебраическая оболочка в G одномерна и диагонализуема над $\mathbb{R}$. Для $s \in G$ класса $\mathcal{A}$ определим $W^+ = G^+(s)$, $W^- = G^-(s)$, $Z = Z_G(s)$. Элемент s^{-1} расширяет W^- и поэтому $\alpha(s^{-1}, V) > 1$ для любой s -инвариантной подгруппы $V \subset W^-$. Следующая оценка энтропии важна сама по себе и значительно упрощает доказательство метрической теоремы.

ТЕОРЕМА 7.7 ([MT94]). *Предположим, что μ – s -инвариантная эргодическая вероятностная мера на $\Gamma \setminus G$ и $V \subset W^-$ нормализуется элементом s класса $\mathcal{A}$. Пусть $h = h(s, \mu)$ – энтропия μ по отношению к s и $\alpha = \alpha(s^{-1}, V)$. Тогда*

- 1) *если μ является V -инвариантной, то $h \geq \log_2 \alpha$,*
- 2) *если найдется множество $M \subset \Gamma \setminus G$ такое, что $\mu(M) = 1$ и $M \cap xW^- \subset xV$ для всех $x \in M$, то $h \leq \log_2 \alpha$ и равенство влечет V -инвариантность меры μ .*

Заметим, что доказательство этой теоремы использует результаты работы [LY].

Теперь пусть $U \subset W^+$ – унитарная алгебраическая подгруппа. В [MT94] важную роль играет так называемое квазирегулярное отображение $\varphi: U \rightarrow N_G(U)$. Приведем идею его построения (ср. [R90b,c]). Предположим для простоты, что s нормализует U . Пусть $V \subset W^+$ – s -инвариантное дополнение к U в W^+ . Тогда произведение $L = VZW^-$ является сечением для $U \setminus G$ (т.е. локально $L \cap U = 1$ и $G = UL$). Зафиксируем последовательность $g_n \in G - N_G(U)$, сходящуюся к 1, и определим отображение $\tilde{\varphi}_n: U \rightarrow L$ по правилу $g_n u \in U \tilde{\varphi}_n(u)$. По теореме Шевалле [Hu] найдутся (правое) действие G на линейном пространстве E и вектор $q \in E$ такие, что $U = \{h \in G : q \circ h = q\}$. Зафиксируем относительно компактные окрестности $A = O(1) \subset U$ и $D = O(q) \subset E$. Положим $A_n = s^{-n} A s^n$ и определим целые числа r_n по правилу: $q \circ (g_n A_{r_n}) \not\subset D$ и $q \circ (g_n A_k) \subset D$ для всех $k < r_n$. Теперь определим $\varphi_n: U \rightarrow L$ следующим образом: $\varphi_n(u) = \tilde{\varphi}_n(s^{-r_n} u s^{r_n})$. Легко видеть, что отображения $\varphi'_n: U \rightarrow E$, определенные как $\varphi'_n(u) = q \circ \varphi_n(u)$, являются полиномами равномерно ограниченных степеней. Так как $\varphi'_n(A_{-1}) \subset D$ и $\varphi'_n(A) \not\subset D$, мы можем считать, что φ'_n сходится к некоторому непостоянному полиномиальному отображению $\varphi': U \rightarrow E$. В то же самое время φ_n сходится к некоторому отображению

$\varphi: U \rightarrow L$. Нетрудно проверить, что $\text{Im}(\varphi) \subset N_G(U)$ и группа $F \subset G$, порожденная U и $\text{Im}(\varphi)$, достаточно велика: факторгруппа $U \setminus F$ некомпактна.

ПРИМЕР 7.8. Рассмотрим $G = SL(2, \mathbb{C})$ как $\mathbb{R}$ -алгебраическую группу. Введем обозначения:

$$s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, U_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, V_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ it & 1 \end{pmatrix}, U_t^- = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_t^- = \begin{pmatrix} 1 & it \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $W^+ = U_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}$, $W^- = U_{\mathbb{R}}^- \times V_{\mathbb{R}}^-$, $L = V_{\mathbb{R}} Z W^-$, где Z – подгруппа диагональных матриц. Пусть e', e'' – стандартный $\mathbb{C}$ -базис в $\mathbb{C}^2$. Тогда $e_1 = e', e_2 = ie', e_3 = e'', e_4 = ie''$ образуют $\mathbb{R}$ -базис. Обозначим через ρ стандартное (правое) действие G на $\mathbb{C}^2$ и определим $\rho' = \rho \oplus (\rho \wedge \rho)$. Тогда для $q = e_1 \oplus (e_1 \wedge e_3)$ мы получим $U = \{h \in G : q \circ \rho'_h = q\}$. Легко проверить, что следующее удовлетворяет нашему построению:

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_n = \log_2 n, \quad \varphi(U_t) = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1/(1+t) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, есть и другая комбинация:

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & i/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_n = \frac{1}{2} \log_2 n, \quad \varphi(U_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -it^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Более общим образом: легко проверить, что $\text{Im}(\varphi) \subset W^+$ при условии $g_n \in V^- W^+ Z = W^+ Z$.

В дальнейшем будем говорить, что последовательность $\{g_n\}$ удовлетворяет условию $(\star)$ если последовательность $\{s^{r_n} g_n s^{-r_n}\}$ относительно компактна (для $SL(2, \mathbb{C})$ это всегда так).

Пусть μ есть U -инвариантная эргодическая вероятностная мера на $\Gamma \setminus G$. Еще одно понятие, используемое в [MT94], это множество равномерной сходимости для последовательности $\{A_n\}$ (ср. [R90b,c]). Это – такое множество $M \subset \Gamma \setminus G$, что для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in C_c(\Gamma \setminus G)$ найдется $N = N(\varepsilon, f)$, для которого

$$\left| \frac{1}{m(A_n)} \int_{A_n} f(xu) dm_u - \int_{\Gamma \setminus G} f d\mu \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in M, \quad n > N,$$

где m – мера Хаара на U (заметим, что множества A_n растут достаточно равномерно во всех направлениях и мы можем применить аналог эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина к усредняющей последовательности $\{A_n\} \subset U$). В [MT94] показано, что для каждого $\delta > 0$ найдется множество M_δ равномерной сходимости для $A_n = s^{-n} A s^n$ с $\mu(M_\delta) > 1 - \delta$ независимо от выбора относительно компактного открытого подмножества $A \subset U$. Использование квазирегулярных отображений $\varphi: U \rightarrow N_G(U)$ для доказательства метрической теоремы основано на следующем утверждении.

ЛЕММА 7.9 ([MT94]). Пусть M – множество равномерной сходимости для любой последовательности $A_n \subset U$ указанного вида и допустим, что $x_n \in M$ сходится к $x \in M$, $g_n \in G - N_G(U)$ сходится к $1 \in G$ и удовлетворяет условию $(\star)$ и $x_n g_n \in M$ для всех n . Тогда мера μ является $\text{Im}(\varphi)$ -инвариантной.

Скажем, что мера μ плотна по Зарисскому в $\Gamma \setminus G$, если не найдется собственной алгебраической подгруппы $P \subset G$ такой, что $U \subset P$ и $\mu(xP) = 1$ для некоторого $x \in \Gamma \setminus G$. Для $M \subset \Gamma \setminus G$ определим $\Psi(M) = \{g \in G : Mg \cap M \neq \emptyset\}$. Пусть A, B, C, D – алгебраические подгруппы в G , причем $D \subset AB$. Скажем, что произведение AB трансверсально к C , если локально $G = CAB$ и $AB \cap C = 1$. Основным инструментом для использования леммы 7.9 состоит в следующем.

ЛЕММА 7.10 ([MT94]). Пусть μ плотна по Зарисскому в $\Gamma \setminus G$ и инвариантна относительно C . Предположим, что произведение AB трансверсально к C . Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $M \subset \Gamma \setminus G$ с $\mu(M) > 1 - \delta$ найдется последовательность $g_n \in \Psi(M) \cap (AB - D)$, сходящаяся к $1 \in G$.

Предположим теперь, что мы хотим доказать алгебраичность эргодической U -инвариантной меры μ на $\Gamma \setminus G$ для некоторой унипотентной алгебраической подгруппы $U \subset G$. Ясно, что, не ограничивая общности, меру μ можно считать плотной по Зарисскому. Другое допущение состоит в том, что U не является нормальной в G (иначе доказательство почти тривиально). Наконец, без ограничения общности мы допустим, что подгруппа U максимальна среди алгебраических унипотентных подгрупп, сохраняющих μ . Нам нужно доказать, что мера μ является G -инвариантной.

С этого момента мы опять для простоты предположим, что $U \subset W^+$ для некоторого элемента $s \in G$ класса $\mathcal{A}$. Рассмотрим замыкание по Зарисскому $X \subset G$ произведения UZW^- и введем подгруппу $U^- = \{g \in W^- : gX = X\}$, которая будет играть роль “противоположной” к U . Весьма деликатный анализ локальной структуры меры μ , использующий идеи Ратнер, дает нам следующую информацию:

ЛЕММА 7.11 ([MT94]). Предположим, что s сохраняет меру μ . Тогда найдется множество полной меры $M \subset \Gamma \setminus G$ такое, что $M \cap xW^- \subset xU^-$ для всех $x \in M$.

Мы окончим доказательство на примере группы $G = SL(2, \mathbb{C})$. Достаточно доказать, что мера μ является W^+ -инвариантной (что противоречит максимальнойности U). Пусть D и S – одномерные подгруппы диагональных матриц соответственно с вещественными и комплексными элементами абсолютной величины 1. Тогда $Z = D \times S$ и $N_G(U) = W^+D$. Пусть M_δ – множество равномерной сходимости для последовательности $A_n \subset U$ с $\mu(M_\delta) > 1 - \delta$. Из леммы 7.10 следует, что для достаточно малого $\delta > 0$ найдется последовательность $g_n \in \Psi(M_\delta) \cap (VZW^- - VD)$, сходящаяся к 1. Из леммы 7.9 мы получим квазирегулярное отображение $\varphi: U \rightarrow N_G(U)$ такое, что $\text{Im}(\varphi)$ сохраняет μ . Пусть $s' \in D$ – элемент класса $\mathcal{A}$, порожденный U и $\text{Im}(\varphi)$ и расширяющий U . Из феномена Маутнера следует s' -эргодичность меры μ . Применяя лемму 7.11 и теорему 7.7, мы видим, что

$$\log_2 \alpha(s', U) \leq h(s', \mu) \leq \log_2 \alpha(s'^{-1}, U^-) = \log_2 \alpha(s', U).$$

Теперь из теоремы 7.7 следует U^- -инвариантность μ . Наконец, возьмем трансверсальное к U^- произведение $V^-(ZW^+)$ и, используя лемму 7.10, построим последовательность $g_n \in \Psi(M) \cap (V^-ZW^+ - ZW^+)$, сходящуюся к 1 для некоторого множества M равномерной сходимости по отношению к $\{A_n\} \subset U$. Тогда мы получим квазирегулярное отображение $\varphi : U \rightarrow W^+$, и в силу леммы 7.9 мера μ будет W^+ -инвариантной.

§ 8. Равномерная распределенность унипотентных траекторий

Приступим к рассмотрению топологической гипотезы Рагунатана; см. также [Ma91b], [R94,95b], [B].

1. Пусть $u_{\mathbb{R}} = \{u_t, t \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая подгруппа в G , подгруппа Γ дискретна в G и $x \in \Gamma \backslash G$. Скажем, что траектория $xu_{\mathbb{R}}$ равномерно распределена (в своем замыкании), если найдется замкнутая подгруппа $H \subset G$ такая, что замкнутая орбита $xH \subset \Gamma \backslash G$ имеет H -инвариантную вероятностную меру ν_H и для любой функции $f \in C_c(\Gamma \backslash G)$ (т.е. непрерывной функции с компактным носителем) выполнено

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(xu_t) dt \rightarrow \int_{\Gamma \backslash G} f d\nu_H, \quad T \rightarrow \infty.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 8.1 ([R91b]). *Если Γ – решетка в связной группе Ли G , то каждая унипотентная траектория в $\Gamma \backslash G$ равномерно распределена.*

Очевидно, что если орбита $xu_{\mathbb{R}}$ равномерно распределена в xH , то $\overline{xu_{\mathbb{R}}} = xH$. Поэтому гипотеза Рагунатана для однопараметрических траекторий вытекает из их равномерной распределенности. Это важное свойство унипотентных потоков было впервые доказано М. Ратнер в [R91b]. Одновременно Н. Шах [Sh91] доказал его частный случай (группа G полупроста, $\text{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$ и подгруппа $u_{\mathbb{R}}$ регулярна). Оба доказательства опираются на метрическую теорему Ратнера. Изложим вначале общую часть этих доказательств.

Пусть Γ – произвольная дискретная подгруппа в G и $X = \Gamma \backslash G$. Рассмотрим *сингулярное множество* $Y \subset X$ тех точек $x \in X$, для которых существует собственная подгруппа $H \subset G$ такая, что $u_{\mathbb{R}} \subset H$ и замкнутая орбита xH несет на себе вероятностную H -инвариантную меру. Используя индукцию по $\dim(G)$, достаточно предположить, что $Y \neq X$, и доказать равномерную распределенность орбит для точек $x \in X - Y$. Пусть $\overline{X} = X \cup \infty$ – одноточечная компактификация и $\mu_T, T > 0$, – вероятностная мера на $\overline{X}$, заданная по правилу

$$\int_X f d\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(xu_t) dt.$$

Поскольку множество вероятностных мер на компакте само является компактным по отношению к $*$ -слабой топологии, то для доказательства равномерной распределенности орбиты $xu_{\mathbb{R}}$ точки $x \in X - Y$ достаточно показать, что если $\mu_{T_i} \rightarrow \mu$ при $T_i \rightarrow \infty$, то μ является G -инвариантной вероятностной мерой на X .

Нетрудно видеть, что предельная мера μ является $u_{\mathbb{R}}$ -инвариантной. Рассмотрим разложение меры μ на $u_{\mathbb{R}}$ -эргодические компоненты. По метрической теореме Ратнер все они алгебраичны. Предположим, мы знаем, что $\mu(\infty) < 1$ и $\mu(Y) = 0$. Тогда $\mu(X) > 0$ и найдется эргодическая компонента меры $\mu|_X$, не сосредоточенная на Y . Из алгебраичности такой меры следует ее G -инвариантность и потому Γ является решеткой в G . По теореме Дани D.8 унитарные траектории на однородном пространстве конечного объема проводят почти все свое время в некотором компактном подмножестве. Это означает, что $\mu(X) = 1$, и поэтому сама мера μ является G -инвариантной.

Что касается условия $\mu(\infty) < 1$, то оно может и не выполняться (например, если орбита $xu_{\mathbb{R}}$ уходит на бесконечность в $\Gamma \setminus G$). Однако, если Γ – решетка в G , то по теореме Дани заведомо $\mu(\infty) = 0$ и беспокоиться не о чем. Условие же $\mu(Y) = 0$ выполняется всегда, если $x \notin Y$, и доказательство этого факта является далеко не тривиальным. Имеются два способа для установления этого равенства. Способ Ратнер, как и доказательство метрической теоремы, использует R -свойство для унитарных траекторий. Наше последующее изложение следует работе Дани и Маргулиса [DM93], которая основана на изучении поведения унитарных траекторий вблизи сингулярного множества $Y \subset X$. Подобная идея использовалась ими еще в [DM90a], где была установлена гипотеза Рагунатана для регулярных унитарных подгрупп в $G = SL(3, \mathbb{R})$. Затем эта идея была развита в работе Шаха [Sh91]. Наш выбор объясняется тем, что данный подход позволяет доказать более сильный результат. Всюду далее l обозначает лебеговскую меру на $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 8.2 ([DM93]). Пусть Γ – дискретная подгруппа в группе Ли G , подгруппа $u_{\mathbb{R}}$ унитарна в G , $Y \subset \Gamma \backslash G$ – сингулярное множество для $u_{\mathbb{R}}$ и $x \notin Y$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность Ω сингулярного множества $Y \subset \Gamma \backslash G$, что

$$l\{t \in [0, T] : xu_t \in \Omega\} \leq \varepsilon T \quad \text{для всех } T \geq 0.$$

Таким образом, нам предстоит доказать, что фиксированная унитарная траектория проводит лишь малую часть времени внутри (достаточно малой) окрестности сингулярного множества $Y \subset X$. Следствием этой теоремы является равенство $\mu(Y) = 0$ для предельной меры μ , построенной по траектории $xu_{\mathbb{R}}$, $x \in X - Y$. Здесь важно то, что сама теорема имеет силу для любой дискретной подгруппы $\Gamma \subset G$. Таким образом, замыкание унитарной траектории заведомо является алгебраическим при условии $\mu(X) > 0$, и мы вывели важное следствие (в [DM93] в явном виде оно не сформулировано и было сообщено автору Шахом).

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть Γ – дискретная подгруппа в G , подгруппа $u_{\mathbb{R}} \subset G$ унитарна и $x \in \Gamma \backslash G$. Предположим, что найдутся $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subset \Gamma \backslash G$ такие, что

$$l\{t \in [0, T] : xu_t \in K\} > \varepsilon T \quad \text{для каждого } T > 0.$$

Тогда замыкание $\overline{xu_{\mathbb{R}}}$ алгебраично, а сама траектория равномерно распределена.

Этот результат доказывает, в частности, гипотезу Ратнер о том, что компактное замыкание унитарной траектории на $\Gamma \backslash G$ обязано быть алгебраическим всегда,

если подгруппа $\Gamma \subset G$ дискретна. Для произвольных же подгрупп $\Gamma \subset G$ компактное замыкание унипотентной траектории может не являться многообразием. В самом деле, пусть $G = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}$, $g_{\mathbb{R}}$ – диагональная подгруппа в цилиндре $U \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}$, где $U \subset SL(2, \mathbb{R})$ – унипотентная подгруппа строго верхнетреугольных матриц. Если теперь $B \subset SL(2, \mathbb{R})$ – двумерная борелевская подгруппа верхнетреугольных матриц, то пространство $B \setminus G$ диффеоморфно двумерному тору, в котором есть одна периодическая $g_{\mathbb{R}}$ -орбита, а все остальные локально замкнуты и наматываются на периодическую в обоих направлениях.

2. Приступим к доказательству теоремы 8.2, следуя [DM93]. Вначале рассмотрим подробнее структуру сингулярного множества $Y \subset X$, ассоциированного с унипотентной подгруппой $u_{\mathbb{R}} \subset G$. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает семейство всех собственных связных подгрупп $H \subset G$ таких, что $\Gamma \cap H$ является решеткой в H , плотной по Зарисскому в H относительно Ad -представления группы G . Кроме того, для любых двух замкнутых подгрупп $H, W \subset G$ рассмотрим аналитическое множество

$$X(H, W) = \{g \in G : gWg^{-1} \subset H\}.$$

ЛЕММА 8.4. $Y = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \Gamma X(H, u_{\mathbb{R}}) \subset \Gamma \setminus G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma g \in \Gamma X(H, u_{\mathbb{R}})$, где $H \in \mathcal{H}$. Тогда подпространство $\Gamma Hg \subset \Gamma \setminus G$ замкнуто, имеет конечный объем и содержит траекторию $\Gamma gu_{\mathbb{R}}$. Следовательно, $\Gamma g \in Y$.

Обратно, пусть $\Gamma g \in Y$. Тогда найдется собственная связная подгруппа $H \subset G$ такая, что $u_{\mathbb{R}} \subset H$ и замкнутое подпространство ΓgH имеет конечный объем. Следовательно, $gu_{\mathbb{R}}g^{-1} \subset gHg^{-1}$ и $\Gamma \cap gHg^{-1}$ является решеткой в gHg^{-1} . Пусть H' – подгруппа в связной группе Ли gHg^{-1} , порожденная всеми Ad -унипотентными в G однопараметрическими подгруппами. Тогда $gu_{\mathbb{R}}g^{-1} \subset H'$, H' нормальна в gHg^{-1} и по версии Дани теоремы плотности Бореля В.3 алгебраическое замыкание подгруппы $\text{Ad}(\Gamma \cap gHg^{-1})$ содержит $\text{Ad}(H')$. Поэтому если $F = (\overline{\Gamma H'})_0$, то $gu_{\mathbb{R}}g^{-1} \subset F$ и $\Gamma \cap F$ является решеткой в F , плотной по Зарисскому в Ad -представлении G . Следовательно, $g \in X(F, u_{\mathbb{R}})$, где $F \in \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 8.5. Семейство $\mathcal{H}$ счетно.

Заметим, что этот важный результат впервые появился в работе Ратнер [R91a] и был использован для доказательства теоремы 8.1, а также (в частном случае) – у Шаха [Sh91].

Мы приведем основную идею доказательства из [DM93]. Предположим для простоты, что Ad -представление группы G является точным и образ $\text{Ad}(G)$ замкнут относительно евклидовой топологии в алгебраической группе $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Пересечение $\Gamma \cap H$ для $H \in \mathcal{H}$, будучи решеткой в связной группе Ли H , является конечно-порожденной группой. Ввиду счетности Γ число ее конечно-порожденных подгрупп также счетно. Поэтому достаточно показать, что для данной конечно-порожденной подгруппы $\Delta \subset \Gamma$ найдется не более чем счетное число связных подгрупп $H \subset G$ таких, что Δ является решеткой в H и замыкание по Зарисскому группы $\text{Ad}(H)$ совпадает с замыканием по Зарисскому $\mathcal{A}$ группы $\text{Ad}(\Delta)$. По хорошо известному свойству алгебраических групп последнее условие влечет $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subset \text{Ad}(H)$. Кроме того, поскольку Δ –

решетка в H , то факторпространство $\overline{[\mathcal{A}, \mathcal{A}]} \text{Ad}(\Delta) \setminus \text{Ad}(H)$ компактно, и теперь утверждение теоремы следует из счетности числа связных подгрупп в абелевой группе $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \setminus \mathcal{A}$, содержащих $\overline{[\mathcal{A}, \mathcal{A}]} \text{Ad}(\Delta)$ как равномерную подгруппу.

Имея в распоряжении лемму 8.4 и теорему 8.5, нам достаточно рассмотреть поведение унитарных траекторий вблизи сингулярных подмножеств $\Gamma X(H, u_{\mathbb{R}}) \subset \Gamma \setminus G$, $H \in \mathcal{H}$. С каждым аналитическим подмножеством $X(H, u_{\mathbb{R}})$ оказывается возможным ассоциировать некоторое аффинное многообразие $A = A_H$ в векторном пространстве $V = V_H$, причем участку произвольной Ad -унитарной траектории вблизи $\Gamma X(H, u_{\mathbb{R}}) \subset \Gamma \setminus G$ будет соответствовать счетный набор участков траекторий некоторой унитарной подгруппы из $GL(V)$ вблизи $A \subset V$. Напомним, что любое аффинное многообразие в векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ выделяется как множество нулей некоторого полинома. В свою очередь, координаты унитарных траекторий также записываются полиномами от t . Это позволяет доказать, используя некоторые стандартные свойства полиномов, следующий результат о поведении унитарных траекторий вблизи аффинных многообразий в векторном пространстве.

ЛЕММА 8.6. *Пусть A – аффинное многообразие в вещественном векторном пространстве V . Тогда для любого компакта $C \subset A$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $D \subset A$ (содержащий C) такой, что для любой окрестности $\Phi = \Phi(D) \subset V$ найдется настолько малая окрестность $\Psi = \Psi(C) \subset \Phi$, что для любой унитарной подгруппы $\{u_t\} \subset GL(V)$, любой точки $v \in V - \Phi$ и любого $T > 0$ выполняется*

$$l\{t \in [0, T] : u_tv \in \Psi\} < \varepsilon l\{t \in [0, T] : u_tv \in \Phi\}.$$

Если для компактов $C \subset D \subset V$ выполняется свойство, указанное в лемме, говорят, что *относительный размер* компакта C в D не превосходит ε .

3. Рассмотрим вначале, как доказательство теоремы 8.2 сводится к лемме 8.6, на простейшем примере $G = SL(2, \mathbb{R})$, $U = \{u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$. Мы предположим, что Γ не является равномерной решеткой в G (иначе сингулярное множество пусто и доказывать нечего). Ясно, что тогда $\mathcal{H} = \{H_i = g_i U g_i^{-1}, i = 1, 2, \dots\}$ для некоторого счетного семейства элементов $\{g_i\}$ из G . Поэтому $X(H_i, U) = g_i N(U)$, где $N(U)$ – нормализатор U в G (очевидно, что $N(U)$ есть произведение двумерной связной подгруппы B верхнетреугольных матриц на центр $\mathbb{Z}_2 \subset G$). Следовательно, сингулярное множество Y всех периодических оришклов в $\Gamma \setminus G$ представляется как объединение $Y = \bigcup_i \Gamma g_i N(U)$, $i = 1, 2, \dots$. Любое множество $\Gamma g_i N(U)$ имеет одну (если $\mathbb{Z}_2 \subset \Gamma$) либо две (если $\mathbb{Z}_2 \not\subset \Gamma$) компоненты связности, причем каждая из них является иммерсированным цилиндром без самопересечений (который всюду плотен в $\Gamma \setminus G$, если Γ является неравномерной решеткой в G).

Рассмотрим алгебру Ли $sl(2, \mathbb{R})$ как векторное пространство V с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для простоты мы предположим, что сама подгруппа U пересекает Γ по решетке (т.е. $U \in \mathcal{H}$), и рассмотрим множество $X(U, U) = N(U) = \mathbb{Z}_2 \times B$. Пусть $\rho = \text{Ad}$ есть

присоединенное представление G в V , $p = e_1 \in V$ и $\eta(g) = \rho(g)p$. Тогда орбита $\eta(G) = \rho(G)p$ есть та половина конуса $x_1 x_3 + x_2^2 = 0$, которая выделяется неравенством $x_1 > 0$. Множество $\eta(X(U, U))$ есть полупрямая $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 > 0$. Ясно, что замыкание по Зарисскому этой полупрямой есть прямая $A = \{x_2 = x_3 = 0\}$ и $X(U, U) = \eta^{-1}(A) = \{g \in G : \eta(g) \in A\}$. Ввиду того, что $\Gamma_U = \Gamma \cap (\mathbb{Z}_2 \times U)$ является равномерной решеткой в стабилизаторе $\mathbb{Z}_2 \times U$ точки $p \in V$, образ $\eta(\Gamma)$ дискретен в $\eta(G)$. По этой же причине для любого компакта $D \subset A$ множество $\Gamma \eta^{-1}(D) \subset \Gamma \setminus G$ компактно и поэтому найдется (достаточно малая) окрестность $\Phi = \Phi(D) \subset V$, для которой множество $\Gamma \eta^{-1}(\Phi) \subset \Gamma \setminus G$ не имеет самопересечений, т.е. отображение $\Gamma g \rightarrow \eta(g)$, $g \in \eta^{-1}(\Phi)$ корректно определено.

Пусть теперь $x = \Gamma g \notin Y$. Наша цель – для каждого $\varepsilon > 0$ построить такую окрестность Ω “цилиндра” $\Gamma X(U, U) \subset \Gamma \setminus G$, что

$$l\{t \in [0, T] : xu_t \in \Omega\} \leq \varepsilon T \quad \text{для всех } T > 0.$$

Так как замкнутое множество $X(U, U)$ σ -компактно, то достаточно научиться для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $C \subset X(U, U)$ строить нужную окрестность Ω множества $\Gamma C \subset \Gamma \setminus G$, а затем воспользоваться приемом счетности $\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i$. Пусть C – произвольный компакт в $X(U, U)$, $D \subset A$ – компакт, содержащий $\eta(C)$ в качестве подкомпакта относительного размера $\leq \varepsilon$, и $\Phi = \Phi(D) \subset V$ – та его окрестность, для которой отображение $\Gamma \eta^{-1}(\Phi) \rightarrow \Phi$ корректно определено. Рассмотрим малую окрестность $\Psi = \Psi(\eta(C)) \subset \Phi$, которая фигурирует в лемме 8.6. Докажем, что $\Omega = \Gamma \eta^{-1}(\Psi)$ является искомой окрестностью.

Зафиксируем $T > 0$ и для каждого $q \in \eta(\Gamma) = \rho(\Gamma)p$ определим

$$I(q) = \{t \in (0, T) : \rho(gu_t)q \in \Phi\}, \quad J(q) = \{t \in (0, T) : \rho(gu_t)q \in \Psi\}.$$

Тогда $J(q) \subset I(q)$ и множества $I(q_1), I(q_2)$ дизъюнкты для $q_1 \neq q_2$ ввиду выбора Φ . Так как $\Gamma gu_t \in \Omega \iff \exists \gamma \in \Gamma : \eta(\gamma gu_t) \in \Psi$, то достаточно установить неравенство $l(\bigcup_{q \in \eta(\Gamma)} J(q)) \leq \varepsilon T$. Пусть (a, b) – любая связная компонента $I(q)$. Тогда, положив в лемме 8.6 $v = \rho(gu_a)q$ и $T = b - a$, мы получим $l(J(q) \cap (a, b)) \leq \varepsilon(b - a)$ и поэтому $l(J(q)) \leq \varepsilon l(I(q))$ для всех $q \in \eta(\Gamma)$. Теперь наше неравенство следует из дизъюнктности множеств $I(q)$. Наконец, рассмотрев аналогично остальные “цилиндры” $\Gamma g_i X(U, U)$ и снова воспользовавшись приемом счетности, мы построим нужную окрестность сингулярного множества $Y \subset \Gamma \setminus G$.

4. Приступим к рассмотрению общего случая. Пусть G – произвольная связная группа Ли. С каждой подгруппой $H \in \mathcal{H}$ размерности h мы свяжем векторное пространство $V = V_H = \wedge^h \mathfrak{g}$ – внешнюю h -степень алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и представление $\rho = \rho_H = \wedge^h \text{Ad} : G \rightarrow GL(V_H)$ – внешнюю h -степень присоединенного представления. Заметим, что $\rho(gg') = \rho(g')\rho(g)$ (так как Ad_g является дифференциалом сопряжения $h \rightarrow g^{-1}hg$). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_h$ – базис подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы $H \subset G$. Тогда $\wedge^h \mathfrak{h} = \mathbb{R}p$, где $p = p_H = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_h \in V$. Также обозначим через $\eta = \eta_H : G \rightarrow V$ отображение $\eta(g) = \rho(g)p$, $g \in G$. Ясно, что $\eta(H) \subset \mathbb{R}p$. Наконец, для $H \in \mathcal{H}$ пусть $\Gamma_H = N_\Gamma(H)$ – нормализатор H в Γ .

ЛЕММА 8.7. Если $H \in \mathcal{H}$, то $\Gamma_H = \{\gamma \in \Gamma : \rho(\gamma)p = \pm p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\rho(\gamma)p = \pm p$ для $\gamma \in \Gamma$, то $\text{Ad}(\gamma)$ нормализует $\mathfrak{h}$ и, следовательно, $\gamma \in \Gamma_H$. Обратно, если $\gamma \in \Gamma_H$, то γ нормализует решетку $\Gamma \cap H \subset H$ и поэтому сопряжение $h \rightarrow \gamma^{-1}h\gamma$ сохраняет бинвариантную меру Хаара на H и (с точностью до знака) форму объема на $\mathfrak{h}$.

ЛЕММА 8.8. Пусть $H \in \mathcal{H}$ и $A = A_H \subset V$ есть замыкание по Зарисскому множества $\eta(X(H, u_{\mathbb{R}}))$. Тогда $X(H, u_{\mathbb{R}}) = \eta^{-1}(A) = \{g \in G : \eta(g) \in A\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $X(H, u_{\mathbb{R}}) \subset \eta^{-1}(A)$. Обратно, пусть $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ есть (одномерная) подалгебра Ли для $u_{\mathbb{R}} \subset G$. Тогда $g \in X(H, u_{\mathbb{R}}) \iff \mathfrak{u} \subset \text{Ad}_g(\mathfrak{h}) \iff \eta(g) \wedge \mathfrak{u} \equiv 0 \iff \eta(g) \in A_0$, где $A_0 = \{v \in V : v \wedge \mathfrak{u} \equiv 0\}$ замкнуто по Зарисскому и потому содержит A .

Теперь мы рассмотрим строение сингулярных подмножеств $\Gamma X(H, u_{\mathbb{R}}) \subset \Gamma \backslash G$ для $H \in \mathcal{H}$. Если каждое такое множество не имеет самопересечений, то доказательство для $G = SL(2, \mathbb{R})$ проходит практически без изменений в общем случае. Однако если оно имеет самопересечения, доказательство усложняется, поскольку оказывается невозможным построить корректно определенное отображение какой-либо окрестности $\eta^{-1}(D) \subset \Gamma \backslash G$ на окрестность компакта $D \subset A$. Впервые это затруднение было преодолено Шахом [Sh91].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.9. Пусть M – подмножество в G . Скажем, что $g \in M$ есть точка (H, Γ) -самопересечения, если найдется такой элемент $\gamma \in \Gamma - \Gamma_H$, что $\gamma g \in M$.

Эквивалентно, $g \in M$ не есть точка (H, Γ) -самопересечения, если из $\Gamma g = \Gamma g'$, $g' \in M$, следует $\Gamma_H g = \Gamma_H g'$.

Нас будут интересовать самопересечения множества $X(H, u_{\mathbb{R}})$. Предположим, что $u_{\mathbb{R}} \subset H$. Тогда $N(H) \subset X(H, u_{\mathbb{R}})$ и если $N(H) = X(H, u_{\mathbb{R}})$, то (H, Γ) -самопересечений у $X(H, u_{\mathbb{R}})$ нет. Однако в общем случае имеет место строгое включение и возможны самопересечения.

ПРИМЕР 8.10. Пусть $G = SL(2, \mathbb{C})$, $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, $u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $H = SL(2, \mathbb{R})$. Тогда $X(H, u_{\mathbb{R}}) = Hu'_{\mathbb{R}}$, где $u'_t = \begin{pmatrix} 1 & it \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\Gamma_H = SL(2, \mathbb{Z})$. Легко проверить, что множество точек (H, Γ) -самопересечения $X(H, u_{\mathbb{R}})$ есть $u_{\mathbb{R}} \times u'_{\mathbb{R}}$ (иначе говоря, множество $\Gamma X(H, u_{\mathbb{R}}) \subset \Gamma \backslash G$ самопересекается по тору $\Gamma(u_{\mathbb{R}} \times u'_{\mathbb{R}})$).

К счастью, бороться с самопересечениями позволяют индукция по размерности и следующее утверждение.

ЛЕММА 8.11. Пусть $H \in \mathcal{H}$ и $h = \dim(H)$. Тогда множество точек (H, Γ) -самопересечений $X(H, u_{\mathbb{R}})$ лежит в объединении всех $X(H', u_{\mathbb{R}})$, где $H' \in \mathcal{H}$ и $\dim(H') \leq h - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in X(H, u_{\mathbb{R}})$ есть точка (H, Γ) -самопересечения. Тогда найдется элемент $\gamma \in \Gamma - \Gamma_H$ такой, что $gu_{\mathbb{R}}g^{-1} \subset H \cap \gamma^{-1}H\gamma$. Так как $\gamma \notin \Gamma_H$, то $\dim(H \cap \gamma^{-1}H\gamma) \leq h - 1$. Подпространство $\Gamma(H \cap \gamma^{-1}H\gamma)$ открыто и замкнуто в пересечении двух замкнутых подпространств ΓH и $\Gamma H\gamma$ (это следует из дискретности $\Gamma \subset G$). Следовательно, оно само является замкнутым. Заметим, что пересечение двух однородных подпространств конечного объема, вообще говоря, не обязано иметь

конечный объем (например, ΓH и $\Gamma k H k^{-1}$, где $k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, из примера 8.10 пересекаются по одномерному некомпактному многообразию). Эту трудность мы преодолеем следующим образом. Пусть H_γ – наименьшая (связная) подгруппа в $H \cap \gamma^{-1} H \gamma$, содержащая все унитарные в G однопараметрические подгруппы. Тогда H_γ нормальна в $H \cap \gamma^{-1} H \gamma$ и поэтому H_γ действует эргодически на $(\Gamma \cap H') \setminus H'$, где $H' = (\overline{\Gamma H_\gamma})_0$, относительно локально конечной H' -инвариантной меры. В силу D.10 эта мера конечна и поэтому $g \in X(H', u_\mathbb{R})$, где $H' \in \mathcal{H}$ и $\dim(H') \leq h - 1$.

Теперь мы приведем без доказательства один из основных результатов [DM93].

ТЕОРЕМА 8.12. *Пусть Γ – дискретная подгруппа в G и $H \in \mathcal{H}$. Тогда орбита $\eta(\Gamma)$ дискретна в V .*

Для иллюстрации этой теоремы рассмотрим тот важный случай, когда G – замкнутая подгруппа в $SL(n, \mathbb{R})$ и $\Gamma \subset G \cap SL(n, \mathbb{Z})$. В этом случае связной подгруппе H , пересекающей Γ по решетке, отвечает рациональная подалгебра $\mathfrak{h} \subset M(n, \mathbb{R})$. Поэтому вектор $p \in V$ коллинеарен вектору с рациональными координатами, в то время как $\rho(\Gamma)$ состоит из целочисленных матриц. Следовательно, орбита $\eta(\Gamma) = \rho(\Gamma)p$ дискретна.

СЛЕДСТВИЕ 8.13. *Пусть $H \in \mathcal{H}$, A – замыкание по Зарисскому $\eta(X(H, u_\mathbb{R}))$ в V и D – компакт в A . Обозначим через Y_D множество точек (H, Γ) -самопересечения $\eta^{-1}(D)$ и пусть K – компакт в $G - \Gamma Y_D$. Тогда существует окрестность Φ компакта D в V такая, что $\eta^{-1}(\Phi) \cap \Gamma K$ не имеет точек самопересечения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, напротив, что найдутся последовательности $\{g_i\}, \{g'_i\}$ элементов из G таких, что $\Gamma g_i = \Gamma g'_i \in \Gamma K$, $\Gamma_H g_i \neq \Gamma_H g'_i$ и $\eta(g_i) \rightarrow d \in D$, $\eta(g'_i) \rightarrow d' \in D$. Ввиду компактности K можно считать, что $g_i = \gamma_i h_i$, $g'_i = \gamma'_i h_i$, где $\gamma_i, \gamma'_i \in \Gamma$ и $h_i \rightarrow h \in K$. Тогда $\eta(\gamma_i) = \rho(h_i^{-1})\eta(g_i) \rightarrow \rho(h^{-1})d$ и, аналогично, $\eta(\gamma'_i) \rightarrow \rho(h^{-1})d'$. Из дискретности множества $\eta(\Gamma)$ следует $\eta(\gamma_i) = \rho(h^{-1})d$, $\eta(\gamma'_i) = \rho(h^{-1})d'$, т.е. $\gamma_i h, \gamma'_i h \in \eta^{-1}(D) \subset X(H, u_\mathbb{R})$ для больших i . Так как $\Gamma h \in \Gamma K$ и $\Gamma K \cap Y_D = \emptyset$, то никакой элемент вида $\gamma_i h$ не является точкой (H, Γ) -самопересечения. Поэтому из $\Gamma \gamma_i h = \Gamma \gamma'_i h$ вытекает $\Gamma_H \gamma_i = \Gamma_H \gamma'_i$, и тогда $\Gamma_H g_i = \Gamma_H \gamma_i h_i = \Gamma_H \gamma'_i h_i = \Gamma_H g'_i$. Противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.2. Используя структуру сингулярного множества $Y \subset X$, достаточно для любых $x \in X - Y$, $H \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$ и любых компактов $C \subset X(H, u_\mathbb{R})$, $K \subset \Gamma \setminus G$ научиться строить такую окрестность Ω компакта $\Gamma C \subset \Gamma \setminus G$, что

$$l\{t \in [0, T] : xu_t \in \Omega \cap K\} \leq \varepsilon T \quad \text{для всех } T \geq 0.$$

Мы проделаем это, используя индукцию по $\dim(H)$. Для $\dim(H) = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что оно доказано для $\dim(H) \leq n - 1$. Зафиксируем $x \in X - Y$, $H \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$, $C \subset X(H, u_\mathbb{R})$ и $K \subset \Gamma \setminus G$. Пусть $Y_H \subset G$ есть множество точек (H, Γ) -самопересечения множества $X(H, u_\mathbb{R})$. Тогда по лемме 8.11 и по предположению индукции найдется окрестность Ω' множества $\Gamma Y_H \subset \Gamma \setminus G$ такая, что

$$l\{t \in [0, T] : xu_t \in \Omega' \cap K\} \leq \varepsilon T/2 \quad \text{для всех } T \geq 0.$$

Пусть, далее, $V = V_H$, $\rho = \rho_H$, $p = p_H$, $\eta = \eta_H$ и $A = A_H$ есть замыкание по Зарисскому множества $\eta(X(H, u_{\mathbb{R}}))$. По лемме 8.6 найдется компакт $D \subset A$, содержащий $\eta(C)$ в качестве подкомпакта относительного размера не более $\varepsilon/4$. Зафиксируем $\Gamma g = x \in X - Y$. Так как образ $\eta(\Gamma) \subset V$ дискретен, то множество $\eta(\Gamma g) = \rho(g)\eta(\Gamma)$ дискретно, причем $\eta(\Gamma g) \cap A = \emptyset$. Пусть K' – такой компакт в G , что $\Gamma K' = K_1 = K - \Omega' \subset \Gamma \setminus G$. Используя 8.13, нетрудно найти окрестность $\Phi = \Phi(D)$ такую, что $\Phi \cap \eta(\Gamma g) = \emptyset$ и множество $\eta^{-1}(\Phi) \cap \Gamma K'$ не имеет (H, Γ) -самопересечений.

Рассмотрим теперь окрестность $\Psi = \Psi(\eta(C)) \subset \Phi \subset V$, для которой

$$l\{t \in [0, T] : \rho(u_t)v \in \Psi\} < \varepsilon l\{t \in [0, T] : \rho(u_t)v \in \Phi\}/4 \quad \text{для всех } v \in V - \Phi, \quad T > 0.$$

Теперь уже по аналогии со случаем $G = SL(2, \mathbb{R})$ нетрудно доказать, что окрестность $\Omega = \Gamma\eta^{-1}(\Psi)$ компакта $\Gamma C \subset \Gamma \setminus G$ является искомой. Тем самым мы доказали теоремы 8.2, 8.3 и 8.1 (в частности, топологическую гипотезу Рагунатана для однопараметрических подгрупп).

5. Обсудим теперь топологическую гипотезу Рагунатана для произвольных подгрупп $U \subset G$, порожденных унитарными элементами (т.е. в обобщенной форме, предложенной Маргулисом). Марина Ратнер полностью исследовала случай, когда U имеет вид как в теореме 7.1. Следуя [R91b], мы докажем алгебраичность замыканий U -орбит в ситуации, когда U связна и целиком состоит из унитарных элементов (общий случай требует более тонких рассуждений). Зафиксируем $x = \Gamma g \in \Gamma \setminus G$. Мы знаем, что для каждой подгруппы $u_{\mathbb{R}} \subset U$ найдется такая связная подгруппа $H \subset G$, что $\overline{xu_{\mathbb{R}}} = xH$ и xH имеет конечную H -инвариантную $u_{\mathbb{R}}$ -эргодическую меру. По теореме D.4 решетка $\Gamma \cap gHg^{-1}$ плотна по Зарисскому в gHg^{-1} относительно Ad -представления группы G . Таким образом, семейство связных подгрупп $H \subset G$ таких, что xH имеет конечный объем и $\overline{xu_{\mathbb{R}}} = xH$ для некоторой подгруппы $u_{\mathbb{R}} \subset U$, по теореме 8.5 не более чем счетно. Следовательно, связная подгруппа U содержится в счетном объединении подгрупп $H_i \subset G$. Из соображений размерности найдется $H_i \subset G$ такая, что $U \subset H_i$, и тогда, очевидно, $\overline{xU} = xH_i$.

Недавно обобщенная гипотеза Рагунатана была “почти полностью” доказана Шахом.

ТЕОРЕМА 8.14 ([Sh97]). *Пусть пространство $\Gamma \setminus G$ имеет конечный объем и подгруппа $U \subset G$ порождена унитарными элементами. Тогда для любой точки $x \in \Gamma \setminus G$ найдется подгруппа $F \subset G$ такая, что $\overline{xU} = xF$ и xF_0 имеет конечную F_0 -инвариантную меру.*

То, что и xF имеет конечную F -инвариантную меру, показано Эскиным и Маргулисом (устное сообщение). Таким образом, обобщенную гипотезу Рагунатана можно считать полностью доказанной. В частности, из результатов Шаха, Эскина и Маргулиса вытекает решение следующего вопроса, упомянутого в [R94]. Пусть G – простая вещественная группа Ли и $U \subset G$ – ее неравномерная решетка (она заведомо порождена унитарными элементами). Тогда каждая U -орбита на пространстве $\Gamma \setminus G$ конечного объема имеет алгебраическое замыкание. В частности, если произведение двух решеток в G замкнуто, то они соизмеримы. Заметим, что для $G = PSL(2, \mathbb{C})$ ранее это было доказано Шахом.

6. Напоследок покажем, как гипотеза Рагунатана сводится к случаю решетки $\Gamma \subset G$ (именно в таком виде были получены результаты Ратнер). Пусть $G = L \cdot R$ – разложение Леви связной односвязной группы Ли G . Рассмотрим группу $A(G) = (L \times A(T_R)) \cdot R$, введенную в конце §7. Как было сказано, на $A(G)$ можно имитировать структуру вещественно-алгебраической группы. В [St89] доказано, что если $\Gamma \setminus G$ имеет конечный объем, то Γ “почти плотна по Зарисскому” в G . Точнее, $A(\Gamma)$ нормальна в $A(G)$ и найдется тор $T \subset A(T_{\mathbb{R}})$ такой, что $A(G) = (K \times T)A(\Gamma)$, где K – компактная компонента подгруппы Леви $L \subset G$. Не ограничивая общности мы можем предположить, что K не имеет центральных в G подгруп. Тогда $A(\Gamma)$ содержит все унитарные элементы и поэтому $U \subset A(\Gamma)$. Теперь при рассмотрении орбиты ΓU мы можем сосредоточить внимание на подпространстве конечного объема $\Gamma \setminus H$, где $H = G \cap A(\Gamma)$. При этом связная компонента Γ_0 нормальна в $A(\Gamma)$ и, стало быть, в H . Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой 8.14 для решетки $\Gamma_0 \setminus (\Gamma \cap H)$ в группе Ли $\Gamma_0 \setminus H$ (возможная несвязность H в данном случае не приводит к затруднениям).

§ 9. Различные вопросы сходимости мер

Здесь мы приводим без доказательства обобщения теоремы 8.1 о равномерной распределенности унитарных орбит; см. также [R94, 95b]. Все они опираются на метрическую теорему Ратнер 7.1, но саму теорему 8.1 не используют.

1. Точка $x \in \Gamma \setminus G$, подгруппа $u_{\mathbb{R}} \subset G$ и число $T > 0$ определяют вероятностную меру $\mu_{T,x,u}$ на $\Gamma \setminus G$ по правилу

$$\mu_{T,x,u}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(xu_t) dt, \quad f \in C_c(\Gamma \setminus G)$$

(т.е. $\mu_{T,x,u}(f)$ есть временное среднее функции f вдоль куска траектории $xu_{[0,T]}$). Напомним, что сингулярное множество $Y = Y(u_{\mathbb{R}}) \subset \Gamma \setminus G$ для унитарного потока $(\Gamma \setminus G, u_{\mathbb{R}})$ (т.е. объединение всех собственных инвариантных замкнутых однородных подпространств) является счетным объединением локально аналитических множеств: $Y = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \Gamma X(H, u_{\mathbb{R}})$. Теорема 8.1 в точности означает, что $\mu_{T,x,u}$ в $*$ -слабой топологии стремится к G -инвариантной мере ν при $T \rightarrow \infty$ для любой точки x вне сингулярного множества Y .

Заметим, что для орициклического потока $(\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R}), u_{\mathbb{R}})$ с равномерной решеткой Γ каждая траектория равномерно распределена в $\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R})$ (и это эквивалентно строгой эргодичности). Довольно тонкие оценки для асимптотики сходимости $\mu_{T,x,u} \rightarrow \nu$ в этом случае найдены Бургером [Bu].

Оказывается, сходимость имеет место и для последовательности точек $x_n \in \Gamma \setminus G$, сходящейся к несингулярной точке $x \in \Gamma \setminus G$. Первая часть следующей теоремы была независимо также доказана Ратнер [R94].

ТЕОРЕМА 9.1 ([DM93]). а) Пусть $T_n \rightarrow +\infty$ и $x_n \rightarrow x$, причем $x \in \Gamma \setminus G$ является несингулярной для унитарной подгруппы $u_{\mathbb{R}} \subset G$. Тогда $\mu_{T_n, x_n, u} \rightarrow \nu$, $n \rightarrow \infty$.

б) Более того, для функции $f \in C_c(\Gamma \setminus G)$, компакта $K \subset \Gamma \setminus G$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется конечное число подгруп $H_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, \dots, k$, и компактов $C_i \subset$

$X(H_i, u_{\mathbb{R}})$ таких, что $|\mu_{T,x,u}(f) - \nu(f)| < \varepsilon$ равномерно по любому подкомпакту $F \subset K - \bigcup_i \Gamma C_i$ для всех $T \geq T_0 = T_0(F)$.

Для иллюстрации рассмотрим любую последовательность периодических орициклов $x_n u_{\mathbb{R}} \subset \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ с периодами $T_n \rightarrow \infty$ и соответствующими эргодическими мерами μ_{T_n} . Нетрудно доказать (используя свойство топологического перемешивания геодезического потока), что для сколь угодно малой окрестности $O_\varepsilon(x)$ произвольной точки $x \in \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ найдется N такое, что $x_n u_{\mathbb{R}} \cap O_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ для всех $n \geq N$. Следовательно, найдутся точки $x'_n \in x_n u_{\mathbb{R}}$, сходящиеся к x . Применяя теперь предыдущий результат, мы получаем теорему Сарнака [Sa] о равномерной распределенности: периодический орицикл $x_n u_{\mathbb{R}} = x'_n u_{\mathbb{R}}$ становится все более и более равномерно распределенным в $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ при $T_n \rightarrow \infty$ (элементарное доказательство этого факта можно также найти у Ратнер в [R92]).

На самом деле Сарнак нашел и асимптотику сходимости $\mu_T \rightarrow \nu$ с точностью до $o(T^{-1/2})$ для всех неравномерных решеток $\Gamma \subset G$. Для $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ она принимает особенно простой вид (найденный впервые Загьером [Za]): $\mu_T(f) = \nu(f) + o(T^{-1/2})$, $T \rightarrow +\infty$, для каждой $f \in C_c^\infty(\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R}))$. В [Za] найдена и замечательная связь между скоростью сходимости $\mu_T(f) \rightarrow \nu(f)$, $T \rightarrow +\infty$, и знаменитой гипотезой Римана из теории чисел: она верна тогда и только тогда, когда $\mu_T(f) = \nu(f) + o(T^{-3/4+\varepsilon})$ для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой $f \in C_c^\infty(\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R}))$. Элементарное доказательство результата Загьера и подробное изучение арифметических свойств орбиты $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$ можно найти в работе Верева [Ve]. Там же доказано, что $\alpha = -1/2$ является оптимальной константой, если пытаться найти асимптотику вида $o(T^\alpha)$ для характеристических функций простейших открытых подмножеств в $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$ (типа кубической окрестности). Разумеется, это не опровергает гипотезу Римана, так как такие функции разрывны.

2. Результат о равномерной распределенности замкнутых орбит можно доказать и для действия полупростых подгрупп $H \subset G$.

ТЕОРЕМА 9.2 ([DM93]). Пусть $H \subset G$ – максимальная связная собственная подгруппа, причем H полупроста и не имеет компактных множителей. Предположим, что каждая орбита $x_n H$ замкнута и поэтому несет на себе единственную H -инвариантную вероятностную меру μ_n . Пусть $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$, причем орбита xH не замкнута. Тогда $\mu_n \rightarrow \nu$, $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что H содержит унипотентную подгруппу $u_{\mathbb{R}}$, которая не содержится в собственной нормальной в H подгруппе. Тогда по критерию эргодичности Мура С.1 каждый поток $(x_n H, u_{\mathbb{R}})$ эргодичен. Пусть $x = \Gamma g$ для некоторого $g \in G$. Докажем, что точка $\Gamma gh \in \Gamma \backslash G$ не является сингулярной (в смысле §8) для потока $(\Gamma \backslash G, u_{\mathbb{R}})$ для почти каждого $h \in H$. Если это не так, то, используя структуру сингулярного множества, мы найдем собственную подгруппу $L \subset G$ такую, что $\Gamma \cap L$ – решетка в L и $gh \in X(L, u_{\mathbb{R}}) = \{f \in G : fu_{\mathbb{R}}f^{-1} \subset L\}$ для множества $h \in H$ положительной меры. Так как множество $X(L, u_{\mathbb{R}})$ аналитично, то пересечение $gH \cap X(L, u_{\mathbb{R}})$ может иметь положительную меру, лишь если $gH \subset X(L, u_{\mathbb{R}})$, и поэтому $hu_{\mathbb{R}}h^{-1} \subset g^{-1}Lg$ для всех $h \in H$. Отсюда ввиду выбора $u_{\mathbb{R}}$ и максимальной H мы выводим, что $H = g^{-1}Lg$. Но тогда орбита $\Gamma gH = \Gamma Lg$ замкнута, что противоречит условию на $x = \Gamma g$.

Итак, точка xh не является сингулярной для $u_{\mathbb{R}}$ при почти всех $h \in H$. Для каждого n орбита $x_n h u_{\mathbb{R}}$ равномерно распределена ввиду эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина для почти всех $h \in H$. Следовательно, найдется такой элемент $h \in H$, что каждая орбита $x_n h u_{\mathbb{R}}$ равномерно распределена в $x_n H$ по отношению к μ_n и точка $xh \in \Gamma \setminus G$ не является сингулярной для $u_{\mathbb{R}}$. Применяя теперь теорему 9.1 к последовательности $x_n h \rightarrow xh$, мы получаем требуемый результат.

Заметим, что доказанная теорема обобщает теорему Бургера и Сарнака [BS] о равномерной распределенности так называемых точек Гекке, возникающих в теории чисел. Чтобы получить результат [BS], нужно взять некомпактную простую группу S с решеткой Λ и рассмотреть случай, когда H – диагональная подгруппа в группе Ли $G = S \times S$ с решеткой $\Gamma = \Lambda \times \Lambda$.

3. Как показали Дани и Маргулис, теорему 8.1 о равномерной распределенности можно обобщить еще дальше, если варьировать не только точку $x \in \Gamma \setminus G$, но и саму подгруппу $u_{\mathbb{R}}$:

ТЕОРЕМА 9.3 ([DM93]). *Рассмотрим последовательность унипотентных подгрупп $u_{\mathbb{R}}^{(n)}$, сходящуюся к унипотентной подгруппе $u_{\mathbb{R}}$ (это означает, что $u_t^{(n)} \rightarrow u_t$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $t \in \mathbb{R}$), и такую последовательность точек $x_n \rightarrow x$, что предел $x \in \Gamma \setminus G$ является несингулярной точкой для $u_{\mathbb{R}} \subset G$. Тогда $\mu_{T_n, x_n, u^{(n)}} \rightarrow \nu$, $T_n \rightarrow +\infty$.*

4. Пусть теперь Γ – произвольная дискретная подгруппа в G , $X = \Gamma \setminus G$ и $\mathcal{P}(X)$ – аффинное пространство вероятностных борелевских мер на X с топологией *-слабой сходимости. Следуя Мозесу и Шаху [MS], обозначим через $Q(X)$ подмножество всех мер $\mu \in \mathcal{P}(X)$, для которых найдется однопараметрическая унипотентная подгруппа $u_{\mathbb{R}} \subset G$ такая, что μ является инвариантной эргодической мерой для потока $(X, u_{\mathbb{R}})$.

ТЕОРЕМА 9.4 ([MS]). *Множество $Q(X)$ замкнуто в $\mathcal{P}(X)$.*

Это означает, что если $\mu_n \in Q(X)$ и $\mu_n \rightarrow \mu \in \mathcal{P}(X)$, то мера μ также является эргодической относительно некоторой унипотентной подгруппы, т.е. $\mu \in Q(X)$.

Предположим теперь, что Γ – решетка в G , $X = \Gamma \setminus G$ и X^c – одноточечная компактификация X (если X некомпактно). Тогда пространство $\mathcal{P}(X^c)$ компактно (относительно *-слабой топологии). Согласно теореме D.8 фиксированная унипотентная траектория $xu_{\mathbb{R}} \subset X$ большую часть времени проводит в некотором компакте $K \subset X$. Оказывается, этот результат можно обобщить, если разрешить точкам x пробегать произвольный компакт $C \subset X$, а компакт K выбирать единым для всех унипотентных подгрупп $u_{\mathbb{R}} \subset X$:

ТЕОРЕМА 9.5 ([DM93]). *Пусть C – произвольный компакт в пространстве $\Gamma \setminus G$ конечного объема. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset \Gamma \setminus G$ (содержащий C) такой, что*

$$l\{t \in [0, T] : xu_t \in K\} \geq (1 - \varepsilon)T$$

для всех $T > 0$, $x \in C$ и всех унипотентных подгрупп $u_{\mathbb{R}} \subset G$.

Этот результат применяется для доказательства теоремы 9.3 и позволяет нам получить следующее

СЛЕДСТВИЕ 9.6 ([MS]). Пусть $X = \Gamma \backslash G$ – пространство конечного объема и ν_∞ – вероятностная мера на X^c , сосредоточенная на бесконечности (если X некомпактно). Тогда множество $Q(X) \cup \nu_\infty \subset \mathcal{P}(X^c)$ компактно.

В самом деле, пусть $\mu_n \in Q(X)$ и $\mu_n \rightarrow \mu \in \mathcal{P}(X^c)$. Если $\mu \neq \nu_\infty$, то найдется компакт $C \subset X$ с $\mu(C) > 0$. Тогда, без ограничения общности, $\mu_n(C) > 0$ для всех n . Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и компакт $K = K(\varepsilon, C)$ из теоремы 9.5. Пусть мера μ_n эргодична относительно унитарной подгруппы $u_{\mathbb{R}}^{(n)} \subset G$. Из теоремы Биркгофа–Хинчина и теоремы 9.5 следует, что $\mu_n(K) > 1 - \varepsilon$ для всех n , и поэтому $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$. Следовательно, $\mu(X) = 1$, т.е. $\mu \in \mathcal{P}(X)$, и осталось применить замкнутость $Q(X)$ в $\mathcal{P}(X)$.

Примером последовательности $\{\mu_n \in Q(X)\}$, сходящейся к ν_∞ , могут служить нормированные меры на последовательности все более коротких периодических орициклов в $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$.

Зафиксируем точку $x \in X$ и обозначим через $Q(x)$ множество тех мер из $Q(X)$, носитель которых содержит точку x . Из 9.6 сразу вытекает, что $Q(x)$ – компакт.

5. В ряде проблем, связанных с теорией чисел (см. § 14), приходится иметь дело со сходимостью эргодических мер для редутивных алгебраических подгрупп (заметим, что такая подгруппа не обязана в общем случае порождаться унитарными элементами). Общая постановка здесь такова: пусть $H \subset G \subset SL(n, \mathbb{R})$ – две редутивные алгебраические подгруппы над $\mathbb{Q}$, причем обе не допускают нетривиальных $\mathbb{Q}$ -характеров. Тогда по теореме В.4 Бореля и Хариш-Чандры $G_{\mathbb{Z}} = G \cap SL(n, \mathbb{Z})$ и $H_{\mathbb{Z}} = H \cap SL(n, \mathbb{Z})$ являются решетками. Для каждой вероятностной меры $\mu \in \mathcal{P}(G_{\mathbb{Z}} \backslash G)$ через μg , $g \in G$, обозначим ее сдвиг: $\mu g(E) = \mu(Eg^{-1})$. Мы получили непрерывное действие группы G на пространстве $\mathcal{P}(G_{\mathbb{Z}} \backslash G)$, снабженном $*$ -слабой топологией. Через μ_H и μ_G обозначим вероятностные H - и G -инвариантные меры на пространствах $G_{\mathbb{Z}}H \simeq H_{\mathbb{Z}} \backslash H$ и $G_{\mathbb{Z}} \backslash G$ соответственно. Пусть $\{g_i\}$ – последовательность элементов из G . Возникает вопрос: какие меры из $\mathcal{P}(G_{\mathbb{Z}} \backslash G)$ могут быть предельными для последовательности $\{\mu_H g_i\}$? В частности, при каких условиях можно гарантировать, что $\mu_H g_i \rightarrow \mu_G$? Когда семейство мер $\{\mu_H g, g \in G\}$ является предкомпактным?

Ответы на эти вопросы получены в работах Эскина, Мозеса и Шаха [EMS96,97]. Начнем с последнего вопроса. Через $\pi: G \rightarrow G_{\mathbb{Z}} \backslash G$ обозначим естественную проекцию. Так как H является $\mathbb{Q}$ -группой, то же верно и в отношении ее централизатора $Z_G(H)$. Поэтому подпространство $\pi(Z_G(H)) \subset G_{\mathbb{Z}} \backslash G$ замкнуто. Если оно некомпактно, то найдется последовательность $z_i \in Z_G(H)$ такая, что $\pi(z_i) \rightarrow \infty$, т.е. для любых двух компактов $K \subset G_{\mathbb{Z}} \backslash G$, $C \subset \pi(H)$ пересечение $Cz_i \cap K$ пусто для всех i за исключением конечного числа. Поэтому $\mu_H z_i(K) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, для любого компакта $K \subset G_{\mathbb{Z}} \backslash G$, т.е. $\mu_H z_i \rightarrow 0$. Мы показали, что семейство $\{\mu_H g, g \in G\}$ не является предкомпактным, если $\pi(Z_G(H))$ некомпактно. С другой стороны, имеет место

ТЕОРЕМА 9.7 ([EMS97]). Пусть $H \subset G \subset SL(n, \mathbb{R})$ – две редутивные алгебраические $\mathbb{Q}$ -группы, причем $H_{\mathbb{Z}}$ и $G_{\mathbb{Z}}$ – решетки в H и G соответственно. Тогда если $\pi(Z_G(H))$ компактно, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset G_{\mathbb{Z}} \backslash G$ такой, что $\mu_H g(K) > 1 - \varepsilon$ для любого $g \in G$.

Таким образом, мы получили критерий предкомпактности семейства вероятностных мер $\{\mu_H g, g \in G\}$. В доказательстве приходится обобщать теорему 9.5 Дани и Маргулиса о возвращаемости унитарных траекторий в некоторый компакт. Заметим, что условие компактности $\pi(Z_G(H))$ эквивалентно любому из следующих двух: 1) H не содержится в параболической $\mathbb{Q}$ -подгруппе G ; 2) любая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в G , содержащая H , редуцируема.

Ответ на второй вопрос (но не само доказательство) оказывается на редкость простым:

ТЕОРЕМА 9.8 ([EMS96]). Пусть $H \subset G \subset SL(n, \mathbb{R})$ – две алгебраические $\mathbb{Q}$ -группы, причем $H_{\mathbb{Z}}$ и $G_{\mathbb{Z}}$ – решетки в H и G соответственно. Тогда любая предельная вероятностная мера для семейства $\{\mu_H g, g \in G\}$ является алгебраической. Более того, если $\mu_H g_i \rightarrow \mu \in \mathcal{P}(G_{\mathbb{Z}} \backslash G)$, то найдутся алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа $L \subset G$ и последовательности $\gamma_i \in G_{\mathbb{Z}}$ и $c_i \rightarrow c \in G$ такие, что μ является $c^{-1}Lc$ -инвариантной мерой на $\pi(L)c$, $\gamma_i^{-1}H\gamma_i \subset L$ и $Hg_i = H\gamma_i c_i$ для всех i кроме конечного их числа.

Доказательство теоремы основано на следующем наблюдении [EMS96]: либо найдется последовательность $c_i \rightarrow c$ такая, что $\mu_H g_i = \mu_H c_i$ (и тогда $\mu = \mu_H c$), либо μ инвариантна относительно некоторой унитарной подгруппы в G (и тогда можно использовать хорошо развитую технику унитарных потоков). Заметим, что в данном результате редуцируемость H и G не нужна.

Фактически вторая часть теоремы дает ответ и на первый вопрос. Иногда, впрочем, никакие проверки на существование промежуточных подгрупп $L \subset G$ и не требуются:

СЛЕДСТВИЕ 9.9 ([EMS96]). В условиях теоремы 9.8 пусть H – максимальная связная алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа. Тогда $\mu_H g_i \rightarrow \mu_G$, как только $Hg_i \rightarrow \infty$ в $H \backslash G$.

6. Теперь мы обсудим работу Шаха [Sh94], в которой доказывается довольно неожиданный результат о том, что алгебраичность орбит и их равномерная распределенность сохраняют свою силу, если вместо действий унитарных потоков мы рассмотрим полиномиальные кривые. Идея состоит в том, что при доказательстве теоремы 8.1, по существу, использовалась лишь полиномиальная расходимость унитарных траекторий. Скажем, что $\theta: \mathbb{R} \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ – полином, если каждая координатная функция $\theta_{i,j}$ является полиномиальной.

ТЕОРЕМА 9.10 ([Sh94]). Пусть $G \subset SL(n, \mathbb{R})$ – замкнутая подгруппа с решеткой $\Gamma \subset G$ и $\theta: \mathbb{R} \rightarrow G \subset SL(n, \mathbb{R})$ – такой полином, что $\theta(0) = 1 \in G$. Тогда существует замкнутая подгруппа $F \subset G$ такая, что орбита ΓF имеет вероятностную F -инвариантную меру ν_F и $\mu_{T, \Gamma, \theta} \rightarrow \nu_F$ при $T \rightarrow \infty$.

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть μ есть предельная мера для некоторой последовательности $\{\mu_{T_n}\}$. Оказывается, эта мера инвариантна относительно некоторой унитарной подгруппы $u_{\mathbb{R}} \subset G$. Это вытекает из следующих двух наблюдений:

ЛЕММА 9.11 ([Sh94]). Пусть $\theta: \mathbb{R} \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ – нетривиальный полином. Тогда найдутся $q \geq 0$ и нетривиальная унитарная подгруппа $u: \mathbb{R} \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ такие, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)^{-1} \theta(t + st^{-q}) = u(s)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Для иллюстрации: если $\theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_0 \neq 0$, то $q = n - 1$, $u(s) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 ns \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 9.12 ([Sh94]). $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T (f(t + st^{-q}) - f(t)) dt = 0$ для любых $f \in C_c(\mathbb{R})$, $q \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, причем скорость сходимости зависит только от s , q и $\sup |f|$.

Докажем, что предельная мера μ инвариантна относительно $u_{\mathbb{R}}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus G} f(xu(s)) d\mu_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} f(\Gamma\theta(t)u(s)) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} f(\Gamma\theta(t + st^{-q})) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} f(\Gamma\theta(t)) dt = \int_{\Gamma \setminus G} f(x) d\mu_x, \end{aligned}$$

где второе равенство следует из выбора $u_{\mathbb{R}}$ и равномерной непрерывности f , а третье – из леммы 9.12.

Таким образом, предельная мера μ инвариантна относительно унитарной подгруппы, и потому каждая ее эргодическая компонента имеет алгебраическое происхождение. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству равномерной распределенности унитарных траекторий в § 8. А именно, теорема D.8 о том, что унитарная траектория на пространстве конечного объема почти все свое время проводит внутри некоторого компакта, использует лишь полиномиальность траектории, откуда выводится свойство $\mu(\Gamma \setminus G) = 1$. Затем используется теорема 8.5 о счетности, процедура линеаризации и лемма 8.6 о поведении полиномиальных траекторий вблизи аффинных многообразий в векторных пространствах.

Теорема о равномерной распределенности имеет место и для полиномов от нескольких переменных. Назовем параллелепипедом $B \subset \mathbb{R}^k$ множество вида $[0, T_1] \times \dots \times [0, T_k]$ и рассмотрим отображение $\Theta: \mathbb{R}^k \rightarrow G \subset SL(n, \mathbb{R})$, которое имеет вид произведения $\Theta(t_1, \dots, t_k) = \theta_1(t_1) \dots \theta_k(t_k)$, где $\theta_1, \dots, \theta_k$ – набор из k полиномов. Возьмем последовательность мер

$$\mu_{B_n}(f) = \frac{1}{l(B_n)} \int_{t \in B_n} f(\Gamma\Theta(t)) dl(t), \quad f \in C_c(\Gamma \setminus G),$$

построенную по последовательности параллелепипедов в $\mathbb{R}^k$. Как показано в [Sh94], имеет место сходимость $\mu_{B_n} \rightarrow \nu_F$ к F -инвариантной мере ν_F на ΓF для некоторой подгруппы $F \subset G$; здесь $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, l – лебеговская мера на $\mathbb{R}^k$ и $\{B_n\}$ – последовательность k -мерных параллелепипедов в $\mathbb{R}^k$, длины всех сторон которых стремятся к бесконечности (независимо друг от друга). В качестве Θ можно взять

и произвольное полиномиальное отображение $\mathbb{R}^k$ в $SL(n, \mathbb{R})$, но тогда в качестве B_n нужно брать последовательность шаров в $\mathbb{R}^k$ с возрастающими радиусами.

Из этих результатов выводится и утверждение о равномерной распределенности орбит многомерных унитарных подгрупп, которое было доказано Ратнер в разрешимом случае [R91b] и высказано ею в качестве гипотезы в общем случае в [R94]. Скажем, что базис $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ в нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{n}$ является *треугольным*, если структурные константы удовлетворяют равенству $c_{i,j}^l = 0$, как только $l \leq \max(i, j)$ (если подалгебра $\mathfrak{n}_l$ натянута на $b_1, \dots, b_k$, то она является идеалом и $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_l] \subset \mathfrak{n}_{l+1}$; ясно, что такой базис существует). Перестановка треугольного базиса называется *регулярным* базисом в $\mathfrak{n}$.

ТЕОРЕМА 9.13 ([Sh94]). Пусть Γ – решетка в группе Ли G и $N \subset G$ – односвязная унитарная подгруппа в G . Рассмотрим регулярный базис $\{b_1, \dots, b_k\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{n}$ и отображение $S: \mathbb{R}^k \rightarrow N$, заданное по правилу $S(t_1, \dots, t_k) = \exp(t_1 b_1) \cdots \exp(t_k b_k)$. Для любого параллелепипеда $B \subset \mathbb{R}^k$ положим

$$\mu_B(f) = \frac{1}{\lambda(S(B))} \int_{t \in B} f(\Gamma S(t_1, \dots, t_k)) dt,$$

где λ обозначает меру Хаара на N . Тогда найдется подгруппа $F \subset G$ такая, что для любой последовательности параллелепипедов $\{B_n\} \subset \mathbb{R}^k$, длины всех сторон которых стремятся к бесконечности, имеет место сходимость $\mu_{B_n} \rightarrow \nu_F$ к F -инвариантной мере на орбите ΓF .

Если G – вещественно-алгебраическая группа Ли, то данный результат очевидно следует из предыдущих, так как для регулярного базиса отображение S переводит лебегову меру на $\mathbb{R}^k$ в меру Хаара на N (см. [R90b]). Случай произвольной группы Ли G сводится к алгебраическому.

Отметим один нерешенный вопрос из данной области. Что будет, если вместо полиномиальной траектории $\Gamma\theta(\mathbb{R}) \subset \Gamma \backslash G$ рассмотреть $\Gamma\theta(\mathbb{Z})$? Если $\theta: \mathbb{R} \rightarrow G$ является унитарной подгруппой, то речь идет о равномерной распределенности орбит унитарных каскадов, которая имеет место в силу 8.1. С другой стороны, если $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольное полиномиальное отображение, то по теореме Вейля [KSF] равномерная распределенность на торе $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$ имеет место как для $x\theta(\mathbb{R})$, так и для $x\theta(\mathbb{Z})$, $x \in \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$. Однако если $G = SL(2, \mathbb{R})$, $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ и, скажем, $\theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то устройство счетных “траекторий” $\Gamma\theta(\mathbb{Z}) \subset \Gamma \backslash G$ пока не изучено. Будут ли их замыкания алгебраичны и будут ли они равномерно распределены в своих замыканиях?

§ 10. Структура орбит, минимальных множеств и эргодических мер однородных потоков

В этом параграфе содержится обзор работ автора [St90], [St95a] о строении орбит, минимальных множеств и конечных эргодических мер однопараметрических однородных потоков. Еще раз напомним, что все замыкания орбит и все конечные эргодические меры унитарного потока на пространстве конечного объема являются однородными. Несколько более общий класс потоков составляют квазиунитарные потоки,

и мы покажем, что замыкание произвольной орбиты такого потока, хотя и не обязано быть однородным, является гладким многообразием (и более того, имеет вид инфраоднородного пространства $\Gamma \setminus F/C$, где C – компактная подгруппа в группе $\text{Aff}(\Gamma \setminus F)$ всех аффинных отображений $\Gamma \setminus F$). Далее, это многообразие (вместе с потоком) компактно покрывается однородным пространством конечного объема. Отсюда легко вывести свойство равномерной распределенности квазиунипотентных орбит и тот факт, что произвольная конечная эргодическая мера является гладкой мерой, сосредоточенной на некотором подмногообразии. Кроме того, мы обобщим топологическую теорему Ратнер на класс тех орбит произвольных (возможно, частично-гиперболических) потоков, которые “не уходят на бесконечность внутри нейтрального слоя”. Такое усиление оказывается необходимым для классификации минимальных множеств.

Далее Γ – дискретная подгруппа в группе Ли G . Напомним, что динамика однородного потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ в решающей степени определяется тем, является ли подгруппа $g_{\mathbb{R}}$ квазиунипотентной или нет. Относительно метрики, индуцированной левоинвариантной метрикой на G , скорость разбегания траекторий квазиунипотентного потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ является квазиполиномиальной (с возможным присутствием тригонометрической части), в то время как неквазиунипотентный поток имеет экспоненциальную расходимость траекторий и является равномерно частично-гиперболическим.

1. Как уже отмечалось, орбиты геодезического потока могут быть “весьма плохими”. А именно, орбита может быть нерекуррентной и не уходящей на бесконечность или, напротив, быть рекуррентной и иметь локально-несвязное замыкание (как морсовское минимальное множество). Обобщением этого факта является следующее наблюдение Маргулиса.

ЛЕММА 10.1 ([St90]). *Любой консервативный равномерно частично-гиперболический поток на многообразии всегда имеет нерекуррентную орбиту, не уходящую на бесконечность (и поэтому ее замыкание не является подмногообразием).*

ЗАМЕЧАНИЕ. Было бы интересно у частично-гиперболических потоков (хотя бы однородных) найти также и орбиты с локально-несвязным замыканием. Такие орбиты заведомо имеются у ановских потоков (например, в окрестности замыкания гомоклинической орбиты; подробнее см. [AS]).

Что касается квазиунипотентных потоков, их орбиты можно наглядно представлять как “искривления” орбит унипотентных потоков. В самом деле, если, например, группа G полупроста и имеет конечный центр, то для любой квазиунипотентной подгруппы $g_{\mathbb{R}} \subset G$ найдется тор $T \subset G$ и унипотентная подгруппа $u_{\mathbb{R}} \subset G$ такие, что $g_t = c_t \times u_t$, $t \in \mathbb{R}$, где $c_{\mathbb{R}}$ – плотная подгруппа в торе T (мы получили так называемое разложение Жордана подгруппы $g_{\mathbb{R}}$ в редуктивную и унипотентную части). Таким образом, подгруппу $g_{\mathbb{R}}$ можно представлять как диагональную в “цилиндре” $T \times u_{\mathbb{R}}$ с образующей $u_{\mathbb{R}}$.

В общем случае внутри G такого разложения может и не быть. Однако можно “слегка” расширить группу G до группы G^* , в которой уже есть нужное нам разложение.

ПРИМЕР 10.2. Пусть $G = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^2$ – разрешимая группа Ли, в которой $\mathbb{R}$ действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ ортогональными вращениями с ядром $2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим

решетку $\Gamma = Z(a) \times \mathbb{Z}^2$, где $Z(a)$ – циклическая группа, порожденная элементом $a = 2\pi \times (\sqrt{2}, 0)$. Пусть $g_t = t \in \mathbb{R}$. Тогда $g_{\mathbb{R}}$ является квазиунипотентной (Ad-редуктивной) подгруппой, но внутри G мы не можем представить ее диагональной подгруппой в цилиндре вида $T \times u_{\mathbb{R}}$ с тором T и унипотентной подгруппой $u_{\mathbb{R}}$. Положим $G^* = SO(2) \cdot G$, где $SO(2)$ коммутирует с $\mathbb{R}$ и действует ортогональными вращениями на $\mathbb{R}^2$. Действие элемента $t \in \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$ совпадает с действием элемента $t^* \in SO(2)$ (и есть поворот на угол t). Пусть $\Delta = \{(t, -t^*), t \in \mathbb{R}\}$ – “антидиагональ” в $\mathbb{R} \times SO(2)$. Тогда Δ является центром в G^* и $g_t = c_t \times u_t$, где $c_t = t^* \in SO(2)$ и $u_t = (t, -t^*) \in \Delta$. Так как $\Gamma \subset N = \Delta \times \mathbb{R}^2$, то проекция $\Pi: SO(2) \cdot N \rightarrow N$ индуцирует диффеоморфизм $\Pi^*: \Gamma \setminus G \rightarrow \Gamma \setminus N$. Так как $SO(2)$ коммутирует с $g_{\mathbb{R}}$, то Π переводит g_t -действие в u_t -действие и тем самым индуцирует гладкий изоморфизм потоков $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ и $(\Gamma \setminus N, u_{\mathbb{R}})$. Так как $(\overline{\Gamma u_{\mathbb{R}}})_0 = \Delta \times \mathbb{R}'$, где прямая $\mathbb{R}'$ натянута на $(1, 0)$, то замыкание $\overline{\Gamma g_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G$ совпадает с многообразием $\Gamma(\mathbb{R}\mathbb{R}') \subset \Gamma \setminus G$, которое диффеоморфно двумерному тору $\Gamma(\Delta \times \mathbb{R}') \subset \Gamma \setminus N$, но само не является однородным подпространством в $\Gamma \setminus G$. Заметим, что, взяв другую абелеву решетку $\Gamma = Z(a) \times \mathbb{Z}^2$, где $a = 2\pi \times (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, мы получили бы гладкий изоморфизм минимального потока на разрешимом пространстве $\Gamma \setminus G$ с минимальным прямолинейным потоком на трехмерном торе $\Gamma \setminus N$.

В общем случае имеет место

ЛЕММА 10.3 ([St90]). Пусть $g_{\mathbb{R}}$ – квазиунипотентная подгруппа в группе Ли G . Тогда найдутся

- (1) группа Ли G^* , которая содержит G в качестве нормальной подгруппы, причем G^*/G является тором, и
- (2) унипотентная подгруппа $h_{\mathbb{R}} \subset G^*$

такие, что для произвольной дискретной подгруппы $\Gamma \subset G$ каждое замыкание $M = \overline{xg_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G$ компактно покрывается замыканием $M' = \overline{xh_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G^*$, причем покрытие является сопряженностью потоков. Если M' – однородное пространство конечного объема, то M – гладкое многообразие.

Ясно, что $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty \iff \text{vol}(\Gamma \setminus G^*) < \infty$, и поэтому для решетки $\Gamma \subset G$ все орбиты унипотентного потока $(\Gamma \setminus G^*, h_{\mathbb{R}})$ имеют однородные замыкания и свойство равномерной распределенности. Отсюда сразу вытекает, что произвольная орбита $xg_{\mathbb{R}}$ квазиунипотентного потока на пространстве конечного объема также равномерно распределена (относительно гладкой меры на многообразии $M = \overline{xg_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G$, полученной из H -инвариантной меры на пространстве $M' = xH \subset \Gamma \setminus G^*$). Заметим также, что многообразие M не обязано быть однородным подпространством (см. пример 10.2).

Теперь мы можем сформулировать общий критерий.

ТЕОРЕМА 10.4 ([St90]). Пусть Γ – решетка в G . Тогда все орбиты потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ имеют гладкие замыкания $\iff$ подгруппа $g_{\mathbb{R}}$ квазиунипотентна.

2. Пусть теперь μ – конечная эргодическая мера для квазиунипотентного потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ и $M \subset \Gamma \setminus G$ – ее носитель (здесь мы не предполагаем, что $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty$). Тогда поток $(M, g_{\mathbb{R}})$ является эргодическим по отношению к строго положительной мере, и поэтому он имеет плотную орбиту. Но тогда по лемме 10.3 поток $(M, g_{\mathbb{R}})$

компактно покрывается топологически транзитивным потоком вида $(M', h_{\mathbb{R}})$, где $M' \subset \Gamma \setminus G^*$ и $h_{\mathbb{R}}$ – унитарная подгруппа в G^* . Конструкция Вейля полупрямого произведения мер (см. [Rag]) снабжает нас конечной $h_{\mathbb{R}}$ -инвариантной мерой на M' , которая проектируется в меру μ . Пусть μ'' – та эргодическая компонента μ' , которая проектируется на μ . Тогда μ'' является H -инвариантной мерой на некоторой замкнутой орбите $xH \subset M' \subset \Gamma \setminus G^*$. Поэтому μ является гладкой мерой на многообразии $M \subset \Gamma \setminus G$. Мы вывели

СЛЕДСТВИЕ 10.5. *Пусть μ – конечная эргодическая мера для квазиунитарного потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$. Тогда найдется гладкое многообразие $M \subset \Gamma \setminus G$ такое, что μ сосредоточена на M и ограничение μ на M является гладкой мерой, равномерно распределенной относительно потока.*

Напомним еще раз, что согласно Синаю [Si72] и Боуэну [Bo75] каждый аносовский поток имеет континуум эргодических мер как с локально-несвязным носителем, так и строго положительных (но сингулярных к гладкой мере объема). Простейший пример строго положительных эргодических мер построен в работе Аносова [An]. В этом примере берется гиперболический автоморфизм тора $A: T^2 \rightarrow T^2$ и строится непрерывное семейство гладких возмущений $A_s: T^2 \rightarrow T^2$, $A_0 = A$, причем лебеговская мера l на T^2 остается инвариантной. При этом энтропия A_s меняется непрерывно и в точке $s = 0$ достигает своего локального максимума. По теореме Аносова о грубости для достаточно малых s найдется гомеоморфизм $\varphi_s: T^2 \rightarrow T^2$ такой, что $\varphi_s A_s = A \varphi_s$. Легко видеть, что каждая мера $(\varphi_s)_*(l)$ строго положительна, эргодична и отлична от l из соображений энтропии. Ясно, что надстройка над A есть однородный аносовский поток на 3-мерном разрешимом многообразии и для него также имеется континуум эргодических мер.

Уместно высказать следующее предположение.

ГИПОТЕЗА. *Любой частично-гиперболический поток на однородном пространстве конечного объема имеет конечную эргодическую меру, носитель которой не является гладким многообразием. Если он эргодичен, то найдется эргодическая строго положительная негладкая мера.*

3. Перейдем теперь к орбитам частично-гиперболических однородных потоков. В случае $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty$ почти все орбиты имеют гладкое замыкание (для эргодических потоков типичные орбиты всюду плотны, а для неэргодических совпадают с соответствующим эргодическим подмногообразием [St83]). Среди оставшихся орбит есть орбиты как с негладким (см. лемму 10.1), так и с гладким замыканием (например, периодические орбиты геодезического потока). Оказывается, при некоторых условиях можно гарантировать гладкость или даже однородность замыканий некоторых орбит потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$.

Чтобы сформулировать результат, рассмотрим разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- + \mathfrak{g}^0 + \mathfrak{g}^+$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G на сжимающуюся, нейтральную и расширяющуюся подалгебры по отношению к оператору Ad_{g_1} . Обозначим через G^- , Q и G^+ соответствующие аналитические подгруппы в G . Мы знаем, что орбиты G^- , Q и G^+ на $\Gamma \setminus G$ образуют соответственно сжимающееся, нейтральное и расширяющееся слоения для потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$. Заметим, что $g_{\mathbb{R}} \subset Q$ и $g_{\mathbb{R}}$ всегда квазиунитарна в своей нейтральной

подгруппе Q . Скажем, что орбита $xg_{\mathbb{R}} \subset \Gamma \setminus G$ не уходит на бесконечность внутри нейтрального слоя $xQ \subset \Gamma \setminus G$, если найдется последовательность $\{t_n\} \rightarrow \infty$ и компакт $K \subset Q$ такие, что $xg_{t_n} \in xK$ для всех n . Можно доказать следующее.

ТЕОРЕМА 10.6 ([St95a]). *Предположим, что $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty$ и орбита $xg_{\mathbb{R}} \subset \Gamma \setminus G$ не уходит на бесконечность внутри нейтрального слоя $xQ \subset \Gamma \setminus G$. Тогда замыкание $\overline{xg_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G$ является гладким многообразием.*

Доказательство этой теоремы использует утверждение, аналогичное лемме 10.3. А именно, найдутся группа Ли G^* и подгруппа $h_{\mathbb{R}} \subset G^*$ такие, что G^*/G – тор, все собственные значения операторов Ad_{h_t} на $\mathfrak{g}^*$ являются чисто вещественными и каждое замыкание $\overline{xg_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G$ компактно покрывается замыканием $\overline{xh_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G^*$. Если второе замыкание однородно, то первое является гладким. Теперь теорема 10.6 вытекает из следующего результата.

ТЕОРЕМА 10.7 ([St95a]). *Предположим, что $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty$ и подгруппа $g_{\mathbb{R}}$ такова, что все собственные значения операторов Ad_{g_t} на $\mathfrak{g}$ чисто вещественные. Тогда если орбита $xg_{\mathbb{R}} \subset \Gamma \setminus G$ не уходит на бесконечность внутри нейтрального слоя $xQ \subset \Gamma \setminus G$, то замыкание $\overline{xg_{\mathbb{R}}} \subset \Gamma \setminus G$ является однородным пространством конечного объема.*

Заметим, что данная теорема обобщает топологическую теорему Ратнер для однопараметрических унитарных потоков. В самом деле, если $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty$, то по лемме Маргулиса D.7 ни одна из полуорбит унитарного потока не уходит на бесконечность. Теорема 10.7 не является непосредственным следствием теоремы Ратнер, так как нейтральный слой $xQ \subset \Gamma \setminus G$ может быть незамкнутым и, как однородное Q -пространство, иметь бесконечную Q -инвариантную меру. Теорема 10.7 доказывается многократным применением теоремы Ратнер (вначале с использованием теории алгебраических групп рассматривается случай арифметической подгруппы $\Gamma = G \cap SL(n, \mathbb{Z})$, а затем полупростой, разрешимый и общий случаи сводятся к арифметическому). Казалось бы, ее можно вывести из теоремы 8.3 Дани и Маргулиса следующим образом. Пусть $x = \Gamma \in \Gamma \setminus G$. Рассмотрим унитарный поток $((\Gamma \cap Q) \setminus Q, g_{\mathbb{R}})$ на пространстве $(\Gamma \cap Q) \setminus Q$ (вообще говоря, бесконечного объема). По условию орбита $(\Gamma \cap Q)g_{\mathbb{R}}$ не уходит на бесконечность и поэтому через сколь угодно большое время возвращается в некоторый фиксированный компакт. Если бы эта орбита возвращалась в данный компакт с положительной плотностью моментов вращения, мы могли бы применить теорему 8.3 и немедленно вывести наш результат. Однако орбита, скажем, орициклического потока может не уходить на бесконечность и в то же время не возвращаться в какой-либо компакт с положительной плотностью времен (так устроены, например, рекуррентные непериодические орбиты орициклического потока на поверхности второго рода, см. [St95b]).

С другой стороны, заметим, что для редуктивной (т.е. состоящей из Ad -полупростых элементов) подгруппы $g_{\mathbb{R}} \subset G$ теорема 10.7 почти тривиальна, так как $g_{\mathbb{R}}$ лежит в центре своей нейтральной подгруппы Q и потому орбита $(\Gamma \cap Q)g_{\mathbb{R}}$ не уходит на бесконечность в $(\Gamma \cap Q) \setminus Q$, лишь если ее замыкание является тором. Таким образом, основное значение данная теорема имеет для “смешанных” (не редуктивных и не унитарных) подгрупп $g_{\mathbb{R}} \subset G$.

4. Теперь мы в состоянии дать классификацию минимальных множеств однородных потоков. Вначале введем новый класс инвариантных множеств.

Пусть $(X, g_{\mathbb{R}})$ – непрерывный поток на локально-компактном пространстве X . Тогда замкнутое инвариантное множество $M \subset X$ называется *бирекуррентным*, если каждая орбита внутри M рекуррентна (возвращается сколь угодно близко к исходной точке) в обоих направлениях.

Этот класс инвариантных множеств естественно возникает в топологической динамике. Ясно, что любое компактное минимальное множество является бирекуррентным. Пример Бебутова (см. [Ne] или [KW]) показывает, что компактное бирекуррентное множество не обязано быть минимальным, даже если оно топологически транзитивно. Однако в этом примере множество имело бесконечную размерность. Теперь, имея в распоряжении теорему Ратнер, мы можем строить алгебраические примеры таких множеств. В самом деле, компактное однородное пространство конечного объема является бирекуррентным по отношению к любому унипотентному потоку на нем, но эргодический унипотентный поток не обязан быть минимальным. (Пример: $\Gamma \subset SL(4, \mathbb{R})$ – равномерная решетка, которая пересекает $SL(2, \mathbb{R})$ по решетке, и $g_{\mathbb{R}} \subset SL(2, \mathbb{R})$ – любая унипотентная подгруппа. Тогда поток $(\Gamma \setminus SL(4, \mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})$ эргодичен и неминимален.)

Доказательство следующего результата смоделировано над леммой Маргулиса 10.1.

ЛЕММА 10.8 ([St95a]). Пусть $(X, g_{\mathbb{R}})$ – равномерно частично-гиперболический поток на многообразии X с бирекуррентным множеством $M \subset X$. Пусть $O(x) \subset X$ – достаточно малая окрестность точки $x \in M$. Тогда связная компонента точки x в пересечении $M \cap O(x)$ лежит внутри нейтрального слоя $x \in X$.

Из теоремы 10.6 и леммы 10.8 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 10.9 ([St95a]). Пусть M – топологически транзитивное бирекуррентное множество для потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ на однородном пространстве конечного объема. Тогда либо M локально-несвязно в каждой точке $x \in M$, либо M является гладким подмногообразием в $\Gamma \setminus G$.

Теперь предположим, что M – минимальное множество непрерывного потока $(X, g_{\mathbb{R}})$. Тогда либо все полуорбиты внутри M не уходят на бесконечность, либо хотя бы одна из них уходит. Маргулис в [Ma91a] доказал, что в первом случае M обязано быть компактом. Теперь мы можем дать классификацию минимальных множеств однородных потоков.

ТЕОРЕМА 10.10 ([St95a]). Пусть M – минимальное множество однородного потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $M = xg_{\mathbb{R}}$ есть орбита, уходящая на бесконечность в обоих направлениях,
- 2) найдется точка $x \in M$ такая, что одна из ее полуорбит уходит на бесконечность, а другая является рекуррентной,
- 3) M – компактное локально-несвязное в каждой точке множество,

- 4) M – компактное гладкое подмногообразие в $\Gamma \backslash G$ такое, что поток $(M, g_{\mathbb{R}})$ компактно покрывается строго эргодическим унитарным потоком.

Заметим, что данная теорема имеет место для произвольных дискретных подгрупп $\Gamma \subset G$. Если $\Gamma \backslash G$ не имеет конечного объема, то вместо теоремы Ратнер мы можем применить теорему 8.3 Дани и Маргулиса (согласно которой компактные замыкания унитарных орбит всегда однородны)

Предположим теперь, что $\text{vol}(\Gamma \backslash G) < \infty$. Из теорем Ратнер следует, что для унитарного однопараметрического потока свойства минимальности и строгой эргодичности эквивалентны. Из предыдущей теоремы вытекает, что любой квазиунитарный поток может быть минимальным, лишь если $\Gamma \backslash G$ – компакт, и в этом случае поток строго эргодичен. С другой стороны, из леммы 10.1 следует, что однородный поток может быть минимальным, лишь если он квазиунитарен. Таким образом, из минимальности следует строгая эргодичность. Обратно, как недавно доказали Клейнбок и Маргулис [KM96], однородный поток на пространстве конечного объема всегда обладает ограниченными (т.е. предкомпактными) орбитами и поэтому обладает компактным инвариантным множеством. Хорошо известно, что на таком множестве всегда есть хотя бы одна инвариантная мера, и поэтому строго эргодичным может быть лишь поток на компактном пространстве. Но для однопараметрических потоков на компакте строгая эргодичность относительно G -инвариантной меры влечет минимальность. Мы доказали следующее.

ТЕОРЕМА 10.11. *Для однопараметрических потоков на пространстве конечного объема минимальность и строгая эргодичность эквивалентны.*

Орбиты геодезического потока, уходящие на бесконечность в обоих направлениях, представляют собой первый тип минимальных множеств по нашей классификации, морсовские минимальные множества – третий, а периодические орбиты – четвертый. Кажется вероятным, что (если поверхность имеет конечную площадь и некомпактна) геодезический поток обладает и минимальными множествами второго типа.

Пусть теперь $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ – произвольный эргодический поток на однородном пространстве конечного объема. Имеет ли он хотя бы одно минимальное множество? Конечно, если пространство $\Gamma \backslash G$ компактно, у нас нет проблем. Если же оно некомпактно и подгруппа $g_{\mathbb{R}}$ не является квазиунитарной либо редуктивной, вопрос оказался не столь тривиален.

В общем случае существование ограниченных орбит (а следовательно, и компактных минимальных множеств) было доказано Клейнбоком и Маргулисом [KM96]. Остановимся чуть подробнее на этом результате. Из топологической теоремы Ратнер следует, что семейство ограниченных орбит для эргодического (квази)унитарного потока $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ на некомпактном пространстве не может иметь хаусдорфову размерность, равную $\dim G$. С другой стороны, для элемента вида $g = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} p$, где $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ и p – верхнетреугольная матрица, положительная полуорбита $\{SL(2, \mathbb{Z})gA_t, t > 0\}$ геодезического потока ограничена $\iff$ число α плохо аппроксимируется рациональными числами ([Da86c]). Но множество таких чисел имеет хаусдорфову размерность 1 ([Sch]), и поэтому семейство ограниченных орбит

геодезического потока имеет полную хаусдорфову размерность (в данном случае 3). В [Da86c] Дани распространил этот результат в двух направлениях: либо G – полупростая группа $\mathbb{R}$ -ранга 1, либо $G = SL(n, \mathbb{R})$ и $\{g_t\}$ – ее диагональная подгруппа, причем g_1 имеет всего два (кратных) собственных значения. Этот результат был значительно усилен в [KM96], где, по существу, был доказан следующий критерий: семейство ограниченных орбит для эргодического потока имеет полную хаусдорфову размерность $\iff$ максимальное факторпространство $\overline{\Gamma U} \setminus G$ с нулевой энтропией (см. С.3) компактно. Отсюда, в частности, следует существование ограниченных орбит у любого однородного потока на пространстве конечного объема.

Более общий вопрос: верно ли, что эргодический частично-гиперболический поток имеет минимальные множества всех возможных типов, а именно третьего и четвертого, в компактном случае и всех четырех в некомпактном (при наличии K -свойства)?

Отметим, что на поверхности бесконечной площади замыкание орициклической орбиты не обязано быть однородным, даже если оно минимально. В самом деле, следуя Хедлунду, нетрудно доказать (см. [St95b]), что неблуждающее множество Ω орициклического потока $(\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R}), u_{\mathbb{R}})$ минимально, если фуксова группа Γ конечно порождена и не содержит параболических (т.е. унитарных) элементов (это следует также из работы Бургера [Bu]). Если Γ не является равномерной решеткой, то минимальное множество Ω по нашей классификации имеет второй тип: иначе оно было бы компактным и состояло из одной периодической орбиты (которых нет, так как в Γ нет унитарных элементов). Заметим также, что в данном случае Ω всюду локально-несвязно.

Наконец, мы укажем на контраст между классом однородных потоков и более общим классом гладких потоков. Как было отмечено, однородный поток на компактном пространстве может быть минимальным, лишь если он имеет нулевую энтропию (т.е. является квазиунитарным). С другой стороны, Эрман [H] построил минимальный диффеоморфизм на компактном многообразии с положительной энтропией. Далее, согласно теореме 10.10 любое компактное минимальное множество однородного потока локально-связно либо всюду, либо нигде. Первый пример гомеоморфизма плоскости с минимальным множеством, которое локально связно лишь на своем собственном непустом подмножестве, был дан в работе [Re]. Гладкий поток с аналогичным минимальным множеством был построен Джонсоном [Jo] с использованием квазипериодических систем дифференциальных уравнений Миллионщикова [Mi68] и Винограда [Vi].

§ 11. Кратное перемешивание и метрическая жесткость однородных потоков

В этом разделе мы применяем метрическую теорему Ратнер для доказательства гипотезы Маркуса о том, что перемешивающий однородный поток $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ обладает перемешиванием всех кратностей. В связи с одним результатом Рыжикова [Ry91] этот вопрос оказывается тесно связан с вопросом о мощности множества $\mathcal{M}$ тех моментов времени $t > 0$, для которых сдвиг g_t метрически изоморфен “единичному” сдвигу g_1 . Поэтому нам придется изучить вопрос о жесткости эргодических квазиунитарных каскадов. Мы покажем, что $\mathcal{M}$ либо не более чем счетно, либо совпадает

с группой $\mathbb{R}^+$.

1. Вначале сформулируем определение кратного перемешивания для действия локально-компактной группы F на лебеговском пространстве (X, μ) .

Действие F на (X, μ) называется k -перемешивающим (или принадлежащим классу $\text{Mix}(k)$), если для любых $k + 1$ измеримых множеств $A_0, \dots, A_k \subset X$ и любых $k + 1$ последовательностей $\{g_i(0)\}, \dots, \{g_i(k)\}$ элементов из F таких, что $g_i(l)(g_i(m))^{-1} \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$, для всех $l \neq m$, имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcap_{l=0}^k g_i(l) A_l \right) = \prod_{l=0}^k \mu(A_l).$$

Из определения следует, что если действие F на (X, μ) принадлежит классу $\text{Mix}(k)$, то действие любой замкнутой некомпактной подгруппы $H \subset F$ на (X, μ) принадлежит тому же классу.

Старая проблема Рохлина заключается в том, следует ли из однократного перемешивания перемешивание всех высших кратностей, т.е. $\text{Mix}(1) \Rightarrow \text{Mix}(\infty)$? В классическом случае $F = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ (т.е. для каскадов и однопараметрических потоков) эта проблема пока решена лишь при весьма сильных ограничениях на действие. Так, Каликов [Ка] показал, что $\text{Mix}(1) \Rightarrow \text{Mix}(2)$, если поток имеет ранг аппроксимации 1. Недавно этот результат был полностью перекрыт Рыжиковым [Ru93], который доказал, что проблема Рохлина имеет положительное решение, если поток или автоморфизм имеют конечный ранг аппроксимации. С другой стороны, имеется пример Ледрапше [L] $\mathbb{Z}^2$ -действия класса $\text{Mix}(1)$, но не $\text{Mix}(2)$.

Вернемся в наш класс однородных потоков и рассмотрим проблему Рохлина для геодезического и орициклического потоков на поверхности постоянной отрицательной кривизны конечной площади. Геодезический поток, будучи ановским K -поток, обладает перемешиванием любой кратности. В 1962 г. Синай предположил, что и орициклический поток принадлежит классу $\text{Mix}(\infty)$. Эта гипотеза была доказана Маркусом [Mar78]. Более того, он доказал следующий результат:

ТЕОРЕМА 11.1 ([Mar78]). Пусть $g_{\mathbb{R}}$ – произвольная однопараметрическая подгруппа в полупростой группе Ли G с решеткой $\Gamma \subset G$. Тогда если поток $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ перемешивает, то он обладает перемешиванием любой кратности.

Вначале Маркус свел доказательство к случаю унитарной подгруппы $h_{\mathbb{R}} \subset G$. Скажем, что унитарная подгруппа $h_{\mathbb{R}}$ в группе Ли G является слабо орициклической, если найдется такая подгруппа $a_{\mathbb{R}} \subset G$, что

$$a_t h_1 a_{-t} = h_{e^t} \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}.$$

(Это понятие несколько слабее понятия орициклическости, введенного в § 7, поскольку мы не требуем здесь, чтобы $h_{\mathbb{R}}$ и $a_{\mathbb{R}}$ вкладывались в подгруппу, локально изоморфную $SL(2, \mathbb{R})$; так, например, разрешимая группа Ли может содержать слабо орициклическую подгруппу, но не имеет орициклических подгрупп.) Заметим, что слабо орициклические подгруппы суть однопараметрические подгруппы орисферических подгрупп. По лемме Морозова–Джекобсона [Ja] любая однопараметрическая унитарная подгруппа в полупростой группе Ли орициклическа. Теперь теорема 11.1 следует из основного результата работы Маркуса:

ТЕОРЕМА 11.2 ([Mar78]). Пусть $a_{\mathbb{R}}$ и $h_{\mathbb{R}}$ – два непрерывных потока на многообразии X с инвариантной мерой μ . Предположим, что поток $h_{\mathbb{R}}$ эргодичен и $a_t \circ h_1 = h_{e^t} \circ a_t$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда $h_{\mathbb{R}}$ обладает перемешиванием всех кратностей.

В произвольной группе Ли, однако, унипотентная подгруппа не обязана быть слабо орициклической, даже если она индуцирует перемешивающий поток (см. пример 11.5). Тем не менее, Маркус предположил, что $\text{Mix}(1) \Rightarrow \text{Mix}(\infty)$ для произвольного однопараметрического потока на однородном пространстве конечного объема (см. также доклад Маргулиса [Ma91b] на Международном конгрессе математиков в Киото, 1990 г.).

Почти одновременно и весьма похожими методами Рыжиков и Мозес получили важные обобщения теоремы 11.2. Во-первых, заметим, что из ее условия вытекает метрический изоморфизм $h_s \simeq h_1$ для всех $s > 0$, причем он устанавливается действием другого потока $a_{\mathbb{R}}$. Имеет место более общий результат:

ТЕОРЕМА 11.3 ([Ry91]). Пусть $(X, h_{\mathbb{R}})$ – сохраняющий меру эргодический поток на пространстве Лебега и $\mathcal{M} = \{s \in \mathbb{R} \mid h_s \simeq h_1\}$. Тогда $h_{\mathbb{R}}$ обладает перемешиванием всех кратностей при условии, что $\mathcal{M}$ имеет положительную лебеговскую меру.

Естественно возникает вопрос о приложимости данного результата к классу однородных потоков. Довольно легко проблема о кратном перемешивании сводится к унипотентному случаю. Если теперь верно, что множество $\mathcal{M}$ для перемешивающего унипотентного потока имеет положительную меру, то гипотеза Маркуса следует из теоремы 11.3. Далее мы, однако, покажем, что даже несчетность множества $\mathcal{M}$ для однородного потока $(G/\Gamma, g_{\mathbb{R}})$ влечет за собой слабую орициклическость подгруппы $g_{\mathbb{R}} \subset G$ и поэтому для однородных потоков теоремы 11.2 и 11.3 эквивалентны. Таким образом, гипотеза Маркуса не может быть выведена из теоремы 11.3.

С другой стороны, связь между $a_{\mathbb{R}}$ и $h_{\mathbb{R}}$ в теореме 11.2 означает, что на X действует двумерная разрешимая группа с тривиальным центром. Мозес доказал, что $\text{Mix}(1) \Rightarrow \text{Mix}(\infty)$ для всех измеримых действий так называемых Ad-собственных групп Ли. Группа Ли F называется Ad-собственной, если центр $Z(F)$ конечен и присоединенная группа $\text{Ad}(F) = F/Z(F)$ замкнута (относительно евклидовой топологии) в алгебраической группе $\text{Aut}(\mathfrak{f})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{f}$.

ТЕОРЕМА 11.4 ([Moz92,95b]). Пусть Ad-собственная группа Ли F действует сохраняющими меру преобразованиями на лебеговском пространстве (X, μ) . Тогда $\text{Mix}(1) \Rightarrow \text{Mix}(\infty)$.

Таким образом, проблема Рохлина в классе Ad-собственных групп имеет положительное решение. Однако это не помогает нам в решении этой проблемы для однородных потоков.

ПРИМЕР 11.5. Пусть $G = SL(2, \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^2$, Γ – любая решетка в G и $n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{R})$ по отношению к некоторому базису e_1, e_2 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $[n, e_1] = 0$, $[n, e_2] = e_1$. Легко проверить, что элемент $u = n + e_2$ не является слабо орициклическим. В то

же время унитарный поток $(\Gamma \setminus G, \exp(\mathbb{R}u))$ перемешивает, как это следует из критерия Дани С.2. Существуют ровно две Ad -собственные подгруппы в G , которые содержат $\exp(\mathbb{R}u)$, а именно: $F_1 = B \cdot \mathbb{R}^2$, где B есть двумерная борелевская подгруппа в $SL(2, \mathbb{R})$, содержащая $\exp(\mathbb{R}n)$, и $F_2 = G$. Однако действие обеих подгрупп не является перемешивающим, поскольку действие $\mathbb{R}^2$ на $\Gamma \setminus G$ даже не эргодично.

Полностью гипотеза Маркуса была доказана автором.

ТЕОРЕМА 11.6 ([St93]). *Пусть $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ – перемешивающий поток на однородном пространстве конечного объема. Тогда он обладает перемешиванием любой кратности.*

Изложим вкратце доказательство этой теоремы. Вначале проведем редукцию к унитарному случаю. Пусть $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ – однопараметрический поток на однородном пространстве конечного объема. Напомним, что с подгруппой $g_{\mathbb{R}} \subset G$ ассоциируется нормальная подгруппа Ауслендера $U \subset G$, порожденная орисферическими относительно $g_{\mathbb{R}}$ подгруппами G^+ и G^- . По теореме С.3 поток $(\overline{\Gamma U} \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ является максимальным факторпоток нулевой энтропии (другими словами, расслоение $\Gamma \setminus G$ на однородные подпространства $\{\overline{\Gamma U}g, g \in G\}$ является разбиением Пинскера) для потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$.

Предположим, что $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ перемешивает, где, как всегда, G предполагается связной односвязной группой Ли. Согласно Тувено (см. [Ka]) сохраняющий меру поток обладает перемешиванием любой кратности, если им обладает максимальный факторпоток нулевой энтропии. Поэтому для доказательства гипотезы Маркуса достаточно доказать, что $(\overline{\Gamma U} \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ имеет перемешивание всех кратностей, если $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ является 1-перемешивающим потоком. В силу теоремы Витте С.5, если $\Gamma \setminus G$ допускает перемешивающий поток, то радикал G нильпотентен и решетка Γ плотна по Зарисскому в Ad -представлении группы G .

Так как $(\overline{\Gamma U})_0$ нормализуется плотной по Зарисскому решеткой Γ , она является нормальной в G . Мы имеем изоморфизм $(\overline{\Gamma U} \setminus G, g_{\mathbb{R}}) \simeq (\Gamma' \setminus G', g'_{\mathbb{R}})$, где $\Gamma' = (\overline{\Gamma U})_0 \setminus \overline{\Gamma U}$ – решетка в $G' = (\overline{\Gamma U})_0 \setminus \Gamma$ и подгруппа $g'_{\mathbb{R}} \subset G'$ квазиунитарна. Поэтому не ограничивая общности можно изначально считать, что $G = G'$ и сама $g_{\mathbb{R}}$ квазиунитарна.

Так как группа G имеет вид $G = L \cdot N$, ее алгебра Ли является алгебраической, и потому G допускает разложение Жордана для любой однопараметрической подгруппы. Пусть $g_t = c_t \times u_t, t \in \mathbb{R}$, причем группа $\text{Ad}(c_{\mathbb{R}})$ предкомпактна, а группа $\text{Ad}(u_{\mathbb{R}})$ унитарна в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Так как поток $(\Gamma \setminus G, c_{\mathbb{R}})$ равномерно непрерывен, то, следуя Маркусу [Mar78], мы заключаем, что достаточно установить перемешивание всех кратностей для унитарного потока $(\Gamma \setminus G, u_{\mathbb{R}})$.

Теперь мы применим технику джойнингов в проблеме кратного перемешивания. Далее $X = \Gamma \setminus G$ и ν есть G -инвариантная вероятностная мера на X , относительно которой унитарный поток $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ перемешивает. Пусть $\{\bar{t}_i\} = \{t_i(1), \dots, t_i(k)\}$ – набор k последовательностей таких, что $|t_i(l) - t_i(m)| \rightarrow \infty$ для всех $l \neq m$. Определим сдвиг диагональной меры ν_{Δ} на X^k вдоль вектора $\bar{t}_i$ формулой

$$\nu_{\Delta}^{\bar{t}_i} \left(\prod_{l=1}^k A_l \right) = \nu \left(\bigcap_{l=1}^k A_l g_{t_i(l)} \right)$$

для измеримых $A_1, \dots, A_k \subset X$. Заметим, что каждая мера $\nu_{\Delta}^{\bar{t}_i}$ на X^k является джойнингом k копий потоков $(X, g_{\mathbb{R}})$. Ясно, что поток $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ является $(k-1)$ -перемешивающим $\iff \nu_{\Delta}^{\bar{t}_i} \rightarrow \nu^k$. Известно, что сходимость джойнингов эквивалентна $*$ -слабой сходимости. Так как пространство мер на X^k , ограниченных условием $\mu(X^k) \leq 1$, компактно относительно $*$ -слабой сходимости, то последовательность $\{\nu_{\Delta}^{\bar{t}_i}\}$ имеет хотя бы одну предельную точку μ . Таким образом, чтобы доказать $(k-1)$ -перемешивание потока, достаточно установить, что из $\nu_{\Delta}^{\bar{t}_i} \rightarrow \mu$ вытекает $\mu = \nu^k$.

Пусть $(\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{R}})$ – перемешивающий унитарный поток. Мы знаем, что $G = L \cdot N$, а по критерию перемешивания С.6 $G = \overline{G_{\infty}}$, где G_{∞} – наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая L . Известно [Da77], что $G_{\infty} = L \cdot M$, где $M \subset N$ – группа, порожденная произведением $V \subset N$ всех нетривиальных неприводимых L -подмодулей в N (здесь мы, по существу, отождествляем нильрадикал N со своей алгеброй Ли).

Обозначим через p_l проекцию G^k на l -ю копию G и через p_l^* – проекцию $\Gamma^k \backslash G^k$ на l -ю копию $\Gamma \backslash G$, $l = 1, \dots, k$. Заметим, что $p_l^*(\nu_{\Delta}^{\bar{t}_i}) = \nu$ и поэтому $p_l^*(\mu) = \nu$. В частности, $\mu(\Gamma^k \backslash G^k) = 1$. Ясно, что все меры $\nu_{\Delta}^{\bar{t}_i}$ инвариантны относительно диагональной подгруппы $\{\bar{g}_t = (g_t, \dots, g_t) \in G^k\}$ и поэтому предельная мера μ также $\bar{g}_{\mathbb{R}}$ -инвариантна.

Пусть $q: G = L \cdot N \rightarrow L$ и $q^*: \Gamma \backslash G \rightarrow q(\Gamma) \backslash L$. Из теоремы Маркуса 11.1, примененной к перемешивающему потоку $(q(\Gamma) \backslash L, q(g_{\mathbb{R}}))$, следует, что $(q^*)^k \mu = q^*(\nu)^k$. Пусть μ' – эргодическая компонента μ по отношению к унитарной подгруппе $\bar{g}_{\mathbb{R}} \subset G^k$ такая, что $(q^*)^k \mu' = q^*(\nu)^k$ и $p_l^*(\mu') = \nu$ для всех $l = 1, \dots, k$. Достаточно доказать, что мера μ' является G^k -инвариантной.

Согласно метрической теореме Ратнер найдутся подгруппа $H \subset G^k$ и элемент $g \in G^k$ такие, что μ' есть H -инвариантная мера, сосредоточенная на замкнутой орбите $\Gamma^k gH \subset \Gamma^k \backslash G^k$. Поскольку $(q^*)^k \mu' = q^*(\nu)^k$, то $H = L^k \cdot N_H$, где $N_H \subset N^k$. С другой стороны, $p_l^*(\mu') = \nu$ и поэтому $p_l(N_H) = N$, $l = 1, \dots, k$.

Ясно, что если $V' \subset V^k$ есть такой L^k -подмодуль, что $p_l(V') = V$, $l = 1, \dots, k$, то $V' = V^k$. Следовательно, $V^k \subset M^k \subset N_H$, где $M \subset N$ – нормальная подгруппа в G , порожденная V . Но из $\overline{GLM} = G$ вытекает $\overline{\Gamma^k L^k M^k} = G^k$ и, так как орбита $\Gamma^k gH$ замкнута, $H = G^k$ и $\mu' = \nu^k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательстве мы использовали теорему Маркуса 11.1. Однако и этот результат нетрудно доказать алгебраическими методами с помощью теоремы Ратнер.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рыжиков [Ry95] анонсировал общий результат, согласно которому $\text{Mix}(1) \Rightarrow \text{Mix}(\infty)$ для гладкого потока φ_t на многообразии M с конечной инвариантной гладкой мерой μ при условии, что автоджойнинги всех степеней являются гладкими мерами на подмногообразиях. Таким образом, гипотеза Маркуса может быть выведена из теоремы Ратнер без использования теории групп Ли.

ГИПОТЕЗА. Проблема Рохлина имеет положительное решение для всех однородных действий вида $(\Gamma \backslash G, F)$, где F – замкнутая подгруппа в G и Γ – решетка в G .

2. Рассмотрим теперь вопрос о метрической жесткости однородных каскадов. В силу теоремы 5.5 эргодические унитарные каскады являются метрически жесткими: любой метрический изоморфизм является (почти всюду) аффинным отображением однородных пространств. Мы уже знаем, что частично-гиперболические каскады таким свойством не обладают (см. § 2). Что касается квазиунитарных каскадов и потоков, то, как показывает пример 10.2, эргодический поток на трехмерном однородном пространстве может быть гладко и метрически изоморфен прямолинейному потоку на трехмерном торе, хотя сами пространства при этом не являются аффинно-эквивалентными. Этот пример хорошо иллюстрирует следующий результат Ауслендера и Грина:

ТЕОРЕМА 11.7 ([AG]). *Эргодический квазиунитарный поток на разрешимом многообразии гладко и метрически изоморфен некоторому эргодическому нильпотенту.*

Однако, как доказал Витте, в классе перемешивающих каскадов имеет место метрическая жесткость:

ТЕОРЕМА 11.8 ([Wi87]). *Метрический изоморфизм перемешивающих однородных квазиунитарных каскадов (или потоков) является аффинным почти всюду.*

В дальнейшем нам потребуется обобщение данной теоремы в классе эргодических квазиунитарных каскадов. Оказывается, изоморфизм таких каскадов, хотя и не обязан быть глобально аффинным отображением, обладает свойством “послойной аффинности”:

ТЕОРЕМА 11.9 ([St95c]). *Предположим, что $f: (\Gamma \backslash G, g_{\mathbb{Z}}) \rightarrow (\Gamma' \backslash G', g'_{\mathbb{Z}})$ есть метрический изоморфизм эргодических квазиунитарных каскадов. Тогда для почти всех $\Gamma g \in \Gamma \backslash G$ мы имеем $f(\overline{\Gamma g G_{\infty}}) = \overline{f(\Gamma g) G'_{\infty}}$, причем ограничение f на почти каждое однородное подпространство $\overline{\Gamma g G_{\infty}}$ является аффинным.*

Как сообщил автору Витте, этот результат также можно получить, используя методы [Wi87] с учетом поправок из [Wi96].

СЛЕДСТВИЕ 11.10 ([St95c]). 1) *В условиях предыдущей теоремы изоморфизм f индуцирует изоморфизм эргодических факторкаскадов $\hat{f}: (\overline{\Gamma G_{\infty}} \backslash G, g_{\mathbb{Z}}) \rightarrow (\overline{\Gamma' G'_{\infty}} \backslash G', g'_{\mathbb{Z}})$ на разрешимых однородных пространствах.*

2) *Если каскады являются перемешивающими, то изоморфизм f является аффинным (почти всюду).*

Заметим, что второе утверждение есть в точности теорема Витте. Оно сразу следует из первого утверждения, поскольку разрешимое однородное пространство не допускает однородных перемешивающих потоков.

Мы приведем лишь идею доказательства теоремы 11.9. Из квазиунитарности следует, что алгебраическая оболочка подгруппы $\text{Ad}(g_{\mathbb{R}}) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ является прямым произведением тора T и некоторой унитарной подгруппы. Следовательно, найдется унитарная подгруппа $u_{\mathbb{R}} \subset T \cdot G$, которая коммутирует с T и при гладкой

проекция $GT \rightarrow G$ переходит в $g_{\mathbb{R}}$. Таким образом, мы построили компактное накрытие исходного каскада унитарным каскадом $(\Gamma \setminus GT, u_{\mathbb{Z}})$. Аналогично строится накрытие каскада $(\Gamma' \setminus G', g'_{\mathbb{Z}})$ унитарным каскадом $(\Gamma' \setminus G'T', u'_{\mathbb{Z}})$. График $\text{Graph}(f) \subset \Gamma \setminus G \times \Gamma' \setminus G'$ компактно покрывается некоторым подмножеством $M \subset \Gamma \setminus GT \times \Gamma' \setminus G'T'$, инвариантным относительно диагональной унитарной подгруппы $(u \times u')_{\mathbb{Z}}$. Конечная эргодическая относительно $(g \times g')_{\mathbb{Z}}$ мера на $\text{Graph}(f)$ (получаемая переносом G -инвариантной меры на $\Gamma \setminus G$) покрывается некоторой конечной $(u \times u')_{\mathbb{Z}}$ -инвариантной мерой на M . Любая эргодическая компонента этой меры имеет алгебраическое происхождение и покрывает эргодическую меру на $\text{Graph}(f)$. Таким образом, $\text{Graph}(f)$ компактно покрывается однородным пространством. Наконец, равенства $(GT)_{\infty} = G_{\infty}$, $(G'T')_{\infty} = G'_{\infty}$ позволяют доказать, что $\text{Graph}(f)$, хотя и не обязан быть однородным подпространством, расслаивается на однородные подпространства вида $\text{Graph}(f|_{\overline{\Gamma g G_{\infty}}}) \subset \Gamma \setminus G, g \in G$.

3. Теперь для однородного потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ мы готовы обсудить структуру множества $\mathcal{M} = \{t > 0 : g_t \simeq g_1\}$. Ясно, что если поток частично-гиперболический, то множество $\mathcal{M}$ состоит только из единичного элемента $1 \in \mathbb{R}$ (это следует из соотношения для энтропии $e(g_t) = te(g_1)$, $t > 0$). Таким образом, множество $\mathcal{M}$ может быть нетривиально лишь для квазиунитарных потоков.

Рассмотрим конкретный пример, когда множество $\mathcal{M}$ нетривиально. Возьмем двумерный тор $T^2 = \mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ и $v \in \mathbb{R}^2$. Тогда прямолинейные потоки $(T^2, \mathbb{R}v)$ и $(T^2, \mathbb{R}A(v))$ изоморфны. В частности, если вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным, т.е. $A(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda > 0$, то каскады $(T^2, \mathbb{Z}v)$ и $(T^2, \lambda \mathbb{Z}v)$ изоморфны. Таким образом, множество $\mathcal{M}$ содержит мультипликативную циклическую группу $\lambda^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^+$. Нетрудно показать, используя свойство метрической жесткости таких каскадов, установленное еще Перри [P71], что в данном случае множество $\mathcal{M}$ является счетным.

С другой стороны, по определению для слабо орициклической подгруппы $u_{\mathbb{R}} \subset G$ имеем $\mathcal{M} = \mathbb{R}^+$. Оказывается, других вариантов и не бывает:

ТЕОРЕМА 11.11 ([St95c]). *Предположим, что множество $\mathcal{M} = \{t > 0 \mid u_t \simeq u_1\}$ для эргодического однородного потока $(\Gamma \setminus G, u_{\mathbb{R}})$ на пространстве конечного объема несчетно. Тогда подгруппа $u_{\mathbb{R}}$ слабо орициклическа в G (и поэтому $\mathcal{M} = \mathbb{R}^+$).*

Покажем вначале, как эта теорема доказывается для унитарных потоков. Не ограничивая общности мы будем предполагать, что решетка $\Gamma \subset G$ несократима. Предположим, что найдется несчетное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^+$ такое, что для всякого $t \in \mathcal{M}$ существует метрический изоморфизм эргодических унитарных каскадов $\varphi_t : (\Gamma \setminus G, u_{\mathbb{Z}}) \rightarrow (\Gamma \setminus G, u_{t\mathbb{Z}})$. В силу метрической жесткости для каждого $t \in \mathcal{M}$ найдутся элемент $c(t) \in G$ и автоморфизм $\sigma_t \in \text{Aut}(G, \Gamma)$ такие, что почти всюду на $\Gamma \setminus G$ изоморфизм φ_t имеет вид $\varphi_t(\Gamma g) = \Gamma \sigma_t(g)c(t)$. Так как ввиду плотности Γ в Ad -представлении группа $\text{Aut}(G, \Gamma)$ не более чем счетна, то для некоторого несчетного подмножества $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ автоморфизмы σ_t совпадают с некоторым фиксированным автоморфизмом $\sigma \in \text{Aut}(G, \Gamma)$. Поскольку φ_t переводит правое действие подгруппы $u_{\mathbb{Z}}$ в правое действие $u_{t\mathbb{Z}}$, то $\varphi_t(\Gamma g u_1) = \varphi_t(\Gamma g) u_t$ почти всюду на $\Gamma \setminus G$.

Используя явный вид $\varphi_t, t \in \mathcal{M}'$, мы убеждаемся, что $\Gamma\sigma(g)\sigma(u_1)c(t) = \Gamma\sigma(g)c(t)u_t$ для почти всех $g \in G$. Но тогда элемент $\sigma(u_1)c(t)u_{-t}c(t)^{-1}$ имеет тривиальное действие на $\Gamma \setminus G$ и потому обязан лежать в пересечении центра $Z(G)$ и решетки Γ . Ввиду несократимости Γ такое пересечение тривиально и поэтому $c(t)u_t c(t)^{-1} = \sigma(u_1)$ для каждого $t \in \mathcal{M}'$. Зафиксируем произвольный элемент $s \in \mathcal{M}'$ и заметим, что $c(t)^{-1}c(s)u_s c(s)^{-1}c(t) = u_t$ для каждого $t \in \mathcal{M}'$. Теперь наша теорема следует из следующего несложного замечания:

ЛЕММА 11.12 ([St95c]). *Предположим, что $u_{\mathbb{R}}$ – такая подгруппа в G , что для каждого элемента t из некоторого несчетного множества $\mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^+$ найдется $h(t) \in G$ такой, что $h(t)u_1 h(t)^{-1} = u_t$. Тогда подгруппа $u_{\mathbb{R}}$ слабо орициклическа.*

Рассмотрим, наконец, эргодический квазиунипотентный каскад $(\Gamma \setminus G, u_{\mathbb{Z}})$ с несчетным множеством $\mathcal{M} = \{t > 0 \mid u_t \simeq u_1\}$. В силу следствия 11.10 для любого $t \in \mathcal{M}$ факторкаскад $(\overline{\Gamma G_{\infty}} \setminus G, u_{t\mathbb{Z}})$ изоморфен факторкаскаду $(\overline{\Gamma G_{\infty}} \setminus G, u_{\mathbb{Z}})$. Ввиду 11.7 эргодический квазиунипотентный поток на разрешимом пространстве гладко и метрически изоморфен некоторому нильпотенту. Мы уже доказали теорему 11.11 в унипотентном случае и можем утверждать, что множество $\mathcal{M}$ для произвольного нильпотента всегда не более чем счетно, поскольку нильпотентная группа Ли не содержит слабо орициклических подгрупп. Следовательно, пространство $\overline{\Gamma G_{\infty}} \setminus G$ вырождается в точку, и по теореме С.6 любой эргодический каскад на $\Gamma \setminus G$ перемешивает. Поэтому мы можем применить теорему 11.8 Витте и заключить, что любой метрический изоморфизм $u_t \simeq u_1, t \in \mathcal{M}$, задается аффинным отображением. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют схему доказательства в унипотентном случае.

§ 12. Эргодические меры и замыкания орбит для действия произвольных подгрупп

1. Мы знаем, что для связных подгрупп $H \subset G$, порожденных унипотентными элементами, конечные эргодические меры и замыкания орбит на $\Gamma \setminus G$ (при условии $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty$) имеют алгебраическое происхождение. Если H порождена квазиунипотентными элементами, по аналогии с леммой 10.3 нетрудно построить компактное расширение G^* группы G , в котором наша подгруппа H лежит в компактном расширении связной подгруппы $U \subset G^*$, порожденной унипотентными элементами. Отсюда легко вывести, что любая конечная H -эргодическая мера является “хорошей”: она сосредоточена на гладком подмногообразии в $\Gamma \setminus G$ и на своем носителе является гладкой мерой. Аналогично, при условии конечности объема $\Gamma \setminus G$ замыкания H -орбит являются гладкими (и даже аналитическими) подмногообразиями в $\Gamma \setminus G$.

Предположим теперь, что связная подгруппа H вообще не содержит (квази)унипотентных элементов. Разумеется, при $\dim(H) = 1$ (т.е. для частично-гиперболического потока) нельзя гарантировать, что все эргодические меры и замыкания орбит являются сколь-нибудь хорошими. Однако для достаточно больших подгрупп $H \subset G$ дела могут обстоять значительно лучше. Пусть, например, G – полупростая группа Ли и H – ее максимальная $\mathbb{R}$ -диагонализуемая подгруппа, причем $\dim(H) = \text{rank}_{\mathbb{R}}(G) \geq 2$. Тогда, взяв неприводимую решетку $\Gamma \subset G$, можно надеяться, что эргодические меры и замыкания H -орбит имеют алгебраическое происхождение. Однако, как показывает пример Рис, при этом нужна некая осторожность. В этом примере строится

равномерная решетка $\Gamma \subset G = SL(3, \mathbb{R})$, которая пересекает по решетке две коммутирующие подгруппы $L, D \subset G$, причем L изоморфна $SL(2, \mathbb{R})$, а D одномерна и $\mathbb{R}$ -диагонализуема. Ясно, что, взяв диагональную подгруппу $D_L \subset L$ и помножив ее на D , мы получим максимальную $\mathbb{R}$ -диагонализуемую подгруппу в G , и что любая “плохая” D_L -эргодическая мера для геодезического потока $((\Gamma \cap L) \setminus L, D_L)$ дает “плохую” $D_L \times D$ -эргодическую меру для двумерного потока на $\Gamma \setminus G$. То же относится и к замыканиям орбит. Эти соображения привели Катка и Спатциера [KS96] к следующей гипотезе. Если H – максимальная $\mathbb{R}$ -диагонализуемая подгруппа в полупростой группе Ли G и Γ – решетка в G , то конечная H -эргодическая мера μ на $\Gamma \setminus G$ либо алгебраична, либо имеет следующее происхождение: H -действие на некотором инвариантном замкнутом однородном подпространстве проектируется на одномерный факторпоток и мера μ получается поднятием эргодической меры этого факторпотока. С использованием метрической теоремы Ратнер в [KS96] Каток и Спатциер при некоторых предположениях доказали алгебраичность H -эргодических мер положительной энтропии, однако в общем случае эта проблема остается открытой.

Заметим, что для неравномерной решетки $\Gamma = SL(3, \mathbb{Z}) \subset G = SL(3, \mathbb{R})$ гипотеза об алгебраичности замыканий орбит диагональной подгруппы $H \subset G$ не опровергнута. Более того, как замечено Маргулисом (а в неявном виде и в [CS]), у нее имеются сильные приложения в теории чисел. А именно, если установить компактность всех ограниченных H -орбит в $\Gamma \setminus G$, будет доказана известная гипотеза Литлвуда: $\liminf_{n \rightarrow \infty} n\{n\alpha\}\{n\beta\} = 0$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть $x \in \mathbb{R}$).

2. Рассмотрим теперь “смешанный” случай: H порождена унитарными и $\mathbb{R}$ -диагонализуемыми элементами (см. также [R94, 95b], [B]). Простейший случай: $H = AU$, где одномерная $\mathbb{R}$ -диагонализуемая подгруппа A является “диагональной” по отношению к унитарной подгруппе U (см. §7). Тогда согласно результатам Ратнер (см. теорему 7.4) любая конечная H -эргодическая мера μ является инвариантной (и, разумеется, эргодической) относительно подгруппы $SL_2(U, A) \subset G$, содержащей H и локально-изоморфной $SL(2, \mathbb{R})$. Так как $SL_2(U, A)$ уже порождена унитарными элементами, проблема отпадает: мера μ является алгебраической.

Это подсказывает следующее обобщение:

ТЕОРЕМА 12.1 ([R94]). *Предположим, что связная подгруппа $U \subset G$ порождена унитарными элементами и подгруппы $A_1, \dots, A_n \subset G$ являются “диагональными” для унитарных подгрупп $U_1, \dots, U_n \subset U$ соответственно. Пусть $H \subset G$ порождена U и всеми $A_1, \dots, A_n$. Тогда каждая конечная H -эргодическая мера на $\Gamma \setminus G$ является алгебраической. Если $\text{vol}(\Gamma \setminus G) < \infty$, то все замыкания H -орбит на $\Gamma \setminus G$ являются однородными подпространствами в $\Gamma \setminus G$ конечного объема.*

Разумеется, в данной теореме эргодические меры и замыкания орбит для H совпадают с эргодическими мерами и замыканиями орбит для подгруппы $H' \subset G$, порожденной U и всеми $SL_2(U_i, A_i)$.

В частности, условия теоремы выполнены, если подгруппа $H \subset G$ параболична в полупростой группе $G_1 \subset G$ без компактных множителей.

Метрическая часть теоремы 12.1 была усилена Мозесом следующим образом. По

Бьену и Борелю [BV] подгруппа $H \subset G$ называется *эпиморфной* в G , если H -неподвижные векторы в любом конечномерном представлении группы G являются и G -неподвижными. Известно [Rag], что параболическая подгруппа в полупростой группе Ли без компактных множителей является эпиморфной. В частности, каждая подгруппа $A_i U_i$ эпиморфна в $SL_2(U_i, A_i)$. Отсюда следует, что H из теоремы 12.1 эпиморфна по отношению к группе $H' \subset G$, порожденной всеми $SL_2(U_i, A_i)$. Поэтому следующий результат Мозеса действительно усиливает теорему 12.1.

ТЕОРЕМА 12.2 ([Moz95a]). *Пусть подгруппа $H \subset G$ эпиморфна по отношению к подгруппе $H' \subset G$, порожденной связными унитарными подгруппами. Тогда каждая конечная H -эргодическая мера на пространстве $\Gamma \backslash G$ алгебраична.*

Аналог данной теоремы для замыканий орбит пока не доказан. Любопытно, что согласно [BV] в каждой простой некомпактной группе Ли G , $\dim G > 3$, можно найти 3-мерную разрешимую эпиморфную подгруппу. Ясно, что эта подгруппа строго эргодически действует на любом факторпространстве G конечного объема.

Предположим теперь, что подгруппа $H \subset G$ порождена элементами $g \in G$, у которых все собственные числа оператора Ad_g вещественны и положительны. Обозначим через $H_u \subset H$ нормальную подгруппу, порожденную всеми унитарными однопараметрическими подгруппами в H . С помощью следующего результата Маргулиса и Томанова изучение H -эргодических мер на $\Gamma \backslash G$ (где подгруппа $\Gamma \subset G$ дискретна) может быть сведено к случаю, когда подгруппа H_u тривиальна. Рассмотрим разложение H -эргодической инвариантной вероятностной меры μ на алгебраические H_u -эргодические компоненты. Имеет место

ТЕОРЕМА 12.3 ([MT96]). *В указанной ситуации найдется связная замкнутая подгруппа $L \subset G$ такая, что почти каждая H_u -эргодическая компонента является L -инвариантной мерой на замкнутой L -орбите. Если $P \subset G$ — группа всех элементов в G , которые нормализуют L и сохраняют на ней меру Хаара, то $H \subset P$ и $\mu(xP) = 1$ для некоторой точки $x \in \Gamma \backslash G$.*

Так как подгруппа L нормальна в P , пространство X разбиения xP на L -орбиты является однородным P/L -пространством. Мера μ , будучи L -инвариантной, проецируется на A -инвариантную эргодическую меру μ' на X , где $A = HL/L$. Ясно, что μ' алгебраична $\iff \mu$ алгебраична (заметим, что группа A абелева, если H связна). В [MT96] также показано, как теорема Мозеса 12.2 выводится из теоремы 12.3. Заметим, что в [MT96] рассматривается намного более общая ситуация (G — произведение групп Ли над локальными полями, Γ — любая ее замкнутая подгруппа и т. д.). С другой стороны, в p -адическом случае на $H \subset G$ накладывается дополнительное ограничение (необязательное для вещественных групп Ли).

Приведем результат Шаха [Sh96], также имеющий отношение к действиям произвольных подгрупп. Допустим, что G_1 — полупростая подгруппа без компактных множителей в группе Ли G , $a \in G_1$ — полупростой элемент и $U \subset G_1$ — расширяющаяся подгруппа в G_1 для элемента a (т.е. $U = G^+ \cap G_1$, где G^+ — расширяющаяся орисферическая подгруппа в G). Пусть Γ — решетка в G и $\pi: G \rightarrow \Gamma \backslash G$ — естественная

проекция. Предположим без ограничения общности, что U не содержится в собственной нормальной подгруппе группы G_1 и что $\overline{\Gamma G_1} = \Gamma \setminus G$. Рассмотрим любую площадку $B \subset U$ с конечной положительной мерой Хаара m на U . При $n \rightarrow +\infty$ сдвиг $\Gamma B a^n = \Gamma a^n(a^{-n} B a^n)$ растягивает площадку B . Оказывается, эта последовательность площадок становится все более и более равномерно распределенной в пространстве конечного объема $\Gamma \setminus G$. Точнее, если $\lambda = m|_B$ – ограничение меры Хаара с U на B , то последовательность конечных мер $a^n \pi(\lambda)$ на $\Gamma \setminus G$ стремится к G -инвариантной мере в $*$ -слабой топологии. Для $G = G_1$ этот факт был хорошо известен и ранее, но в общем случае результат является весьма нетривиальным. Разумеется, из него следует, что подгруппа $a^{\mathbb{Z}}U$ имеет плотную орбиту точки $\Gamma \in \Gamma \setminus G$ (впрочем, этот же факт следует из теоремы 12.1).

3. Заметим, что приведенные результаты позволяют решить вопрос о строении эргодических мер и замыканий орбит для действия связных подгрупп $H \subset G$ на пространстве конечного объема $\Gamma \setminus G$, если G является полупростой группой Ли $\mathbb{R}$ -ранга 1. Обозначим через $A \subset G$ максимальную $\mathbb{R}$ -диагонализуемую подгруппу, $\dim(A) = 1$, и через $U \subset G$ – расширяющуюся орисферическую подгруппу для A . Пусть также $K_1 \subset G$ – компактная компонента централизатора A . Тогда $P = (K_1 \times A) \cdot U$ – параболическая подгруппа в G . Если связная замкнутая подгруппа $H \subset G$ не порождается квазиунипотентными элементами, то она сопряжена подгруппе в P . Ясно, что из некомпактных подгрупп в P лишь абелевы редуктивные подгруппы могут иметь (и имеют) “плохие” эргодические меры и замыкания орбит (это можно вывести как из теоремы Ратнер 12.1, так и из приведенного результата Шаха). Таким образом, критерий здесь выглядит следующим образом: если $H \subset G$ – некомпактная связная подгруппа, то на $\Gamma \setminus G$ найдется “плохая” H -эргодическая мера $\iff$ группа H сопряжена подгруппе в $K_1 \times A$. Аналогичное утверждение имеет место и для замыканий орбит.

Подобная задача для разрешимых групп Ли еще не решена. Один из наиболее интересных случаев здесь связан с изучением орбит и эргодических мер для пары эргодических автоморфизмов тора, один из которых является ановсовским. Когда среди фактор-действий имеется почти циклическая группа эргодических автоморфизмов тора, для исходного действия естественно возникают “плохие” эргодические меры и замыкания орбит. Если же таких фактор-действий не имеется, то все минимальные множества конечны (Беренд, [Be]) и это позволяет надеяться на хорошее поведение всех орбит. Интересные результаты об алгебраичности эргодических мер для таких действий получены Катком и Спаттиером [KS96].

§ 13. Унипотентные потоки на однородных пространствах над локальными полями

1. Гипотеза Ошпенгейма–Давенпорта о значениях квадратичных форм в целых точках имеет смысл не только для поля вещественных чисел, но и в так называемом S -арифметическом контексте (см. §14). Это наводит на естественную мысль о справедливости гипотез Рагунатана и Дани над любым локальным (недискретным локально-компактным) полем k нулевой характеристики. Более того, можно рассмотреть действие унипотентных потоков на однородных пространствах вида $\Gamma \setminus H$, где H –

замкнутая подгруппа в произведении $G = \prod_{i=1}^n G_i$ групп Ли G_i над (различными) локальными полями k_i нулевой характеристики, а $\Gamma \subset H$ – дискретная подгруппа. Полностью обе гипотезы в такой постановке были доказаны Ратнер [R95a], а метрическая – также Маргулисом и Томановым [MT94,96]. Заметим, что в [MT94] был рассмотрен случай, когда все группы G_i алгебраичны; в [MT96] это ограничение снято (и к тому же замкнутая подгруппа $\Gamma \subset H$ не предполагается дискретной). Способ доказательства Ратнер состоит в том, что вначале развивается теория групп Ли над полем $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел, а затем доказательство для $k = \mathbb{R}$ прослеживается с тем, чтобы внести необходимые изменения в общем случае. Способ Маргулиса и Томанова (помимо некоторых идей Ратнер) интенсивно использует теорию алгебраических групп и энтропийную теорию и дает новое доказательство метрической теоремы даже для вещественного случая. Мы не будем вдаваться в подробности доказательства в общем случае, но остановимся на новых моментах, которые появляются при рассмотрении p -адического случая, следуя работе Ратнер [R95a] (см. также [B], [R95b]).

2. Известно [VdV], что локальное поле нулевой характеристики есть либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо конечное расширение поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (при некотором простом $p \in \mathbb{N}$). Поэтому можно предполагать, что $G = \prod_{i=1}^n G_i$, где $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ – некоторое конечное множество различных простых чисел (включая, быть может, ∞), а G_i – группа Ли над полем $\mathbb{Q}_{p_i}$, $p_i \in S$ (либо над $\mathbb{R}$, если $p_i = \infty$). Разумеется, в значительной мере задача сводится к рассмотрению однородных пространств группы Ли над $\mathbb{Q}_p$.

Напомним основные факты из теории p -адических чисел (всюду далее p – простое число). Каждый элемент $x \in \mathbb{Q}$ единственным образом представляется в виде $x = p^n a/b$, где $n, a, b \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, причем p, a, b взаимно просты. Поле $\mathbb{Q}_p$ является пополнением $\mathbb{Q}$ по метрике $|x|_p = p^{-n}$. Известно, что поля $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_s$ неизоморфны при $p \neq s$. Кроме того, $\mathbb{Q}_p$ ни при каком конечном p не изоморфно $\mathbb{R}$.

Пополнением кольца $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ является кольцо *целых p -адических чисел* $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$. Известно, что $\mathbb{Z}_p$ является компактной открытой (аддитивной) подгруппой в $\mathbb{Q}_p$ и имеет мощность континуума. Число $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ называется *p -адической единицей*, если найдется $\beta \in \mathbb{Z}_p$ такое, что $\alpha\beta = 1$. Множество p -адических единиц образует компактную мультипликативную группу O_p . В O_p выделяется подгруппа $1 + p\mathbb{Z}_p$ *главных единиц*. Легко проверить, что $O_p = \{\mathbb{Z}_p\} - \{p\mathbb{Z}_p\}$.

Ясно, что в $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_p$ нет дискретных аддитивных подгрупп.¹⁴ Заметим, что $\mathbb{Q}_p$ является пределом возрастающей последовательности компактных подгрупп $\{p^{-n}\mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{N}\}$ и потому любая собственная замкнутая подгруппа $H \subset \mathbb{Q}_p$ компактна. Любая циклическая группа вида $\alpha^{\mathbb{Z}}$ при $|\alpha|_p \neq 1$ дискретна в мультипликативной группе $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p - \{0\}$. Максимальная дискретная подгруппа $\Sigma_p \subset O_p$ конечна и состоит из корней 1. Известно (см. [Se82]), что при $p > 2$ группа Σ_p является циклической порядка $p - 1$, причем $\Sigma_p \cap (1 + p\mathbb{Z}_p) = 1$ и $O_p = \Sigma_p \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$. Если $p = 2$, то $\Sigma_p = \pm 1$.

¹⁴Заметим однако, что в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ такие подгруппы есть: например, группа рациональных чисел вида m/p^k , $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, диагонально погруженная в $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$. Легко убедиться, что эта подгруппа является бесконечно-порожденной равномерной решеткой в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$.

Рассмотрим ряд

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Оценив норму $\left| \frac{x^i}{i!} \right|_p$, можно убедиться, что этот ряд сходится для каждого $x \in p\mathbb{Z}_p$ при $p > 2$ и для каждого $x \in 4\mathbb{Z}_2$ при $p = 2$. Таким образом, при $p > 2$ мы имеем непрерывный гомоморфизм $\exp: p\mathbb{Z}_p \rightarrow 1 + p\mathbb{Z}_p$, а при $p = 2$ – непрерывный гомоморфизм $\exp: 4\mathbb{Z}_2 \rightarrow 1 + 4\mathbb{Z}_2$. Гораздо проще проверить, что формула

$$\ln(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(x-1)^i}{i}$$

задает непрерывный гомоморфизм $\ln: 1 + p\mathbb{Z}_p \rightarrow p\mathbb{Z}_p$ при любом p . Так как $\exp$ и $\ln$ взаимно обратны в кольце формальных степенных рядов, мы выводим, что если $p > 2$, то $\exp$ и $\ln$ являются взаимно обратными изоморфизмами. При $p = 2$ ядро $\ln$ содержит $\Sigma_2 = \pm 1$; поэтому $\exp$ и $\ln$ являются изоморфизмами, если их определить на $4\mathbb{Z}_2$ и $1 + 4\mathbb{Z}_2$ соответственно.

Отсюда следует, что при $p > 2$ любая замкнутая подгруппа в $1 + p\mathbb{Z}_p$ имеет вид $1 + p^k\mathbb{Z}_p$ для некоторого целого $k \geq 1$ (аналогично, любая замкнутая подгруппа в $1 + 4\mathbb{Z}_2$ имеет вид $1 + 2^k\mathbb{Z}_2$ для некоторого целого $k \geq 2$). Следовательно, предел любой возрастающей последовательности компактных подгрупп в O_p компактен (при любом p).

Непрерывный гомоморфизм групп $\varphi: \mathbb{Z}_p \rightarrow 1 + p\mathbb{Z}_p$ можно получить, взяв любой элемент α в $1 + p\mathbb{Z}_p$ (или в $1 + 4\mathbb{Z}_2$, если $p = 2$) и определив $\varphi(x) = \alpha^x = \exp(x \ln(\alpha))$. С другой стороны, как легко убедиться, любой непрерывный гомоморфизм $\psi: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$ тривиален. В то же время, так как $\mathbb{Q}_p^* = p^{\mathbb{Z}}O_p = p^{\mathbb{Z}}\Sigma_p(1 + p\mathbb{Z}_p)$, мы можем доопределить $\ln: (1 + p\mathbb{Z}_p) \rightarrow p\mathbb{Z}_p$ тривиальным образом на $p^{\mathbb{Z}}\Sigma_p$ (или на $p^{\mathbb{Z}}$, если $p = 2$) и получить непрерывный гомоморфизм $\psi: \mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathbb{Q}_p$. Нелишне заметить, что образ $\psi(\mathbb{Q}_p^*) \subset \mathbb{Q}_p$ всегда предкомпактен, так как O_p – компакт и $\psi(p^{\mathbb{Z}}) \subset \{\alpha \in \mathbb{Q}_p : |\alpha|_p \leq |\psi(p)|_p\}$.

3. Перейдем теперь к рассмотрению групп Ли над $\mathbb{Q}_p$. Упрощенно говоря, группа G есть n -мерная группа Ли над $\mathbb{Q}_p$, если она допускает атлас из карт, гомеоморфных $\mathbb{Z}_p^n$ (напомним, что $\mathbb{Z}_p$ является компактной окрестностью 0 в $\mathbb{Q}_p$), причем сквозные отображения и групповые операции в этом атласе аналитичны (точное определение см. у Серра [Se69] или в [DSMS]). Замкнутая подгруппа группы Ли над $\mathbb{Q}_p$ сама является группой Ли над $\mathbb{Q}_p$ [Se69]. Ясно, что $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p^*$ – группы Ли над $\mathbb{Q}_p$. Наиболее важным многомерным примером является группа $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ n -мерных матриц с коэффициентами из $\mathbb{Q}_p$ и ненулевым определителем. В этой группе выделяется подгруппа $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ матриц A с целыми коэффициентами и условием $|\det(A)|_p = 1$. Известно [Se69], что $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ является максимальной (открытой) компактной подгруппой в $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ и любая максимальная компактная подгруппа в $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ сопряжена с $GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Известно также, что в $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ имеется открытая подгруппа V , не содержащая конечных подгрупп (при $n = 1, p > 2$ такова подгруппа $V = 1 + p\mathbb{Z}_p \subset O_p = GL(1, \mathbb{Z}_p)$, а при $n = 1, p = 2$ – подгруппа $V = 1 + 4\mathbb{Z}_2$). Следовательно, порядок любой конечной подгруппы из $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ ограничен числом элементов в $GL(n, \mathbb{Z}_p)/V$.

Далее наше изложение следует [R95a]. Пусть G – произвольная группа Ли над $\mathbb{Q}_p$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Выделим в $\mathfrak{g}$ любой n -мерный базис и положим $\|v\| = \max_i |v_i|_p$ для каждого вектора $v \in \mathfrak{g}$. Для $\varepsilon > 0$ определим векторное подпространство $\mathfrak{g}_\varepsilon(0) = \{v \in \mathfrak{g} : \|v\| < \varepsilon\}$ над $\mathbb{Z}_p$. Известно [Se69], что имеется $\delta > 0$ такое, что $[\mathfrak{g}_\delta(0), \mathfrak{g}_\delta(0)] \subset \mathfrak{g}_\delta(0)$ и потому $\mathfrak{g}_\delta(0)$ является алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_p$. Исходя из формулы Кемпбелла–Хаусдорфа, можно гарантировать (уменьшив, если надо, $\delta > 0$), что $\mathfrak{g}_\delta(0)$ диффеоморфно отображается посредством экспоненциального отображения $\exp$ на некоторую компактную открытую подгруппу $G_\delta(1) \subset G$. Ясно, что, взяв $v \in \mathfrak{g}_\delta(0)$, $v \neq 0$, мы получим изоморфизм $\mathbb{Z}_p$ на $\exp(\mathbb{Z}_p v)$. В частности, $G_\delta(1)$ не содержит конечных (и, следовательно, дискретных) подгрупп.

Итак, в группе Ли над $\mathbb{Q}_p$ имеются сколь угодно малые открытые подгруппы. Следовательно, малая окрестность единицы не порождает всю группу G . Кроме того, экспоненциальное отображение определено не на всей алгебре $\mathfrak{g}$, а лишь на окрестности $0 \in \mathfrak{g}$. Это делает изучение групп Ли над $\mathbb{Q}_p$ и их однородных пространств более сложным. С другой стороны, p -адические группы Ли в некоторых отношениях устроены намного проще, чем вещественные.

4. Однопараметрической подгруппой в G называется непрерывный гомоморфизм $\varphi: \mathbb{Q}_p \rightarrow G$. Заметим, что любая унипотентная одномерная подгруппа в $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ является однопараметрической, так как для нильпотентной матрицы X ряд

$$\exp(tX) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i X^i}{i!}$$

обрывается и потому подгруппа $\exp(tX)$ определена при всех $t \in \mathbb{Q}_p$.

Сформулируем некоторые результаты из [R93, 95a], которые весьма полезны при изучении групп Ли над $\mathbb{Q}_p$. Во-первых, заметим, что для любой замкнутой подгруппы $H \subset G$ имеем $H \cap G_\delta(1) \subset \exp(\mathfrak{h}_\delta(0))$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли для H (это так, поскольку из $\exp(v) \in H \cap G_\delta(1)$ следует $\exp(\mathbb{Z}_p v) \subset H$ и поэтому $v \in \mathfrak{h}_\delta(0)$). Отсюда вытекает, что предел возрастающей последовательности замкнутых подгрупп в G сам является замкнутой подгруппой в G . Следовательно, *любая однопараметрическая подгруппа замкнута* (так как $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{i=0}^{\infty} p^{-i}\mathbb{Z}_p$ и каждая подгруппа $p^{-i}\mathbb{Z}_p$ компактна). Поскольку в $\mathbb{Q}_p$ нет дискретных подгрупп, то однопараметрическая подгруппа либо тривиальна, либо замкнута и некомпактна. Более того, *каждая такая подгруппа является Ad-унипотентной* в G . Это вытекает из теоремы [R95a] (доказанной независимо Любоцким и Прасадом) о том, что любая однопараметрическая подгруппа в $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ имеет вид $\varphi(t) = \exp(tX)$, $t \in \mathbb{Q}_p$, для некоторой нильпотентной матрицы $X \in gl(n, \mathbb{Q}_p)$. (Идея доказательства теоремы состоит в том, что в некотором конечномерном алгебраическом расширении F поля $\mathbb{Q}_p$ подгруппа $\varphi(\mathbb{Q}_p)$ приводится к верхнетреугольному виду (жорданова форма!) и потому каждый ее диагональный элемент задает непрерывный гомоморфизм $\lambda: \mathbb{Q}_p \rightarrow F^* = F - \{0\}$. Так как $|\lambda(s)|^{p^n} = |\lambda(p^n s)| \rightarrow 1, n \rightarrow +\infty$, то $|\lambda(s)| = 1$, и поэтому образ $\lambda(\mathbb{Q}_p)$ компактен, а следовательно, и тривиален. Это означает, что $\varphi(\mathbb{Q}_p)$ состоит из строго верхнетреугольных матриц и, как следствие, имеет искомый вид.)

Группу Ли G над $\mathbb{Q}_p$ назовем *регулярной*, если $Z(G) = \text{Ker Ad}_G$ и порядки всех конечных подгрупп в G ограничены некоторой константой. Ясно, что группа $GL(n, \mathbb{Q}_p)$

регулярна (как и ее связные по Зарисскому алгебраические подгруппы). Далее мы ограничимся рассмотрением регулярных групп Ли и их подгрупп Ли (в них всегда можно найти регулярную открытую подгруппу, содержащую все однопараметрические подгруппы [R95a]). Преимущество рассмотрения именно таких групп состоит, в частности, в том, что две однопараметрические подгруппы, совпадающие на окрестности единицы в G , обязаны совпадать всюду [R95a]. Заметим, что дискретная группа $G = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ нерегулярна и, положив $\varphi_1(x) = \mathbb{Z}_p \in G$ и $\varphi_2(x) = (x + \mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p$, мы получим две различные аддитивные подгруппы в G , совпадающие на окрестности единицы $\mathbb{Z}_p \in G$.

По аналогии с вещественным случаем можно определить *орицикличность* однопараметрической подгруппы U , связав с ней одномерную подгруппу $A \subset G$ (называемую *диагональной* для U) и соответствующую полупростую подгруппу $SL_2(U, A) \subset G$ (точное определение см. в [R95a]). Регулярную группу Ли G назовем *редуктивной*, если каждая аддитивная однопараметрическая подгруппа в G орициклична (такое определение обобщает обычную редуктивность алгебраических групп). Одним из основных результатов является

ТЕОРЕМА 13.1 ([R95a]). *Любая регулярная группа Ли G над $\mathbb{Q}_p$, имеющая решетку, является редуктивной.*

Ранее этот факт был известен для алгебраических групп Ли над $\mathbb{Q}_p$ (см. [Т]). Итак, при вполне естественных условиях на G все однопараметрические подгруппы не только унипотентны, но орицикличны, что существенно упрощает доказательство гипотез Рагунатана и Дани. Заметим, что $\mathbb{Q}_p^*$ не имеет однопараметрических подгрупп и поэтому является редуктивной. Что касается $\mathbb{Q}_p$, то в ней нет решеток.

Другая особенность поля $\mathbb{Q}_p$ состоит в том, что *каждая решетка в группе Ли G над $\mathbb{Q}_p$ является равномерной* [R93]. Напомним, что если Γ – дискретная подгруппа в группе Ли G , то последовательность $\{\Gamma g_n\}$ существенно расходится в $\Gamma \backslash G$, если найдутся $\gamma_n \in \Gamma - \{1\}$ такие, что $g_n^{-1}\gamma_n g_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Так как $G_\delta(1)$ не содержит дискретных подгрупп, то каждое пересечение $g_n^{-1}\Gamma g_n \cap G_\delta(1)$ тривиально и поэтому на $\Gamma \backslash G$ нет существенно расходящихся последовательностей (независимо от выбора дискретной подгруппы $\Gamma \subset G$). Отсюда следует, в частности, что каждая решетка $\Gamma \subset G$ является равномерной [Rag].

Основным инструментом в доказательстве метрической гипотезы служит

ТЕОРЕМА 13.2 ([R95a]). *Пусть подгруппа $A \subset G$ диагональна для орициклической подгруппы U в регулярной группе Ли G над $\mathbb{Q}_p$, $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа и μ – вероятностная U -эргодическая мера на $\Gamma \backslash G$. Тогда найдется элемент $c \in Z_G(U)$ такой, что μ является $cSL_2(U, A)c^{-1}$ -инвариантной алгебраической мерой.*

Если сравнить эту теорему с теоремой 7.4, легко видеть, что в p -адическом случае мера μ не может быть сосредоточена на существенно дивергентном для A подмножестве в $\Gamma \backslash G$ (так как на $\Gamma \backslash G$ вообще нет существенно дивергентных точек для действия какой-бы то ни было подгруппы в G).

В заключение сформулируем основные результаты для унипотентных потоков на однородных пространствах общего вида. Пусть S – некоторое конечное множество

различных простых чисел $p_1, \dots, p_n$, включая, быть может, ∞ , а G_i – регулярная группа Ли над полем $\mathbb{Q}_{p_i}$, $i = 1, \dots, n$ (либо связная над $\mathbb{R}$, если $p_i = \infty$). Предположим, что H – замкнутая подгруппа в $\prod_{i=1}^n G_i$, Γ – дискретная подгруппа в H , и $U \subset H$ – подгруппа вида $U = \prod_{i=1}^n U_i$, где каждая U_i порождена однопараметрическими Ad-унипотентными подгруппами в G_i , $i = 1, \dots, n$ (напомним, что для $p_i < \infty$ условие Ad-унипотентности выполняется автоматически). Тогда имеют место

ТЕОРЕМА 13.3 ([R95a]). *Каждая U -инвариантная эргодическая вероятностная мера на $\Gamma \backslash H$ является алгебраической.*

Заметим, что в [MT94] эта теорема доказана для алгебраических групп, а в [MT96] распространена на класс почти линейных групп (заметим, что любая связная группа Ли над $\mathbb{R}$ является почти линейной).

ТЕОРЕМА 13.4 ([R95a]). *Если Γ – решетка в H , то каждое замыкание $\overline{xU}$, $x \in \Gamma \backslash H$, является однородным пространством конечного объема.*

Если подгруппа U однопараметрична, т.е. $U = \{u(t), t \in \mathbb{Q}_s\} \subset G_i$ для некоторого $s = p_i$, то имеет место следующий результат о сходимости мер, обобщающий теорему 9.1:

ТЕОРЕМА 13.5 ([R95a]). *Пусть Γ – решетка в H и $x_k \rightarrow x \in \Gamma \backslash H$. Предположим, что в H нет замкнутой неоткрытой подгруппы $L \subset H$ такой, что $U \subset L$ и xL есть пространство конечного объема. Тогда найдется алгебраическая мера ν на $\Gamma \backslash H$ такая, что ее стабилизатор $\Lambda(\nu)$ открыт в H , $\nu(x\Lambda(\nu)) = 1$, действие U на $(x\Lambda(\nu), \nu)$ эргодично и*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_s(F_s(\tau_k))} \int_{F_s(\tau_k)} f(x_k u(t)) d\lambda_s(t) = \int_{\Gamma \backslash H} f d\nu$$

для любой функции $f \in C_c(\Gamma \backslash G)$ и любой последовательности $\tau_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$.

Здесь $F_s(\tau) = \{t \in \mathbb{Q}_s : |t|_s \leq \tau\}$ и λ_s – мера Хаара на $\mathbb{Q}_s$. Ясно, что при $x_k \equiv x$ мы получаем теорему о равномерной распределенности унипотентных орбит.

§ 14. Применения в теории чисел

1. Как уже было сказано во введении, самым мощным стимулом для доказательства гипотез Рагунатана стала гипотеза Оппенгейма–Давенпорта в теории чисел (см. также [Ma91b,96], [R94,95b], [B]). Назовем квадратичную форму *рациональной*, если она пропорциональна форме с рациональными коэффициентами, и *иррациональной* в противном случае. Пусть $B(x_1, \dots, x_n)$ – неопределенная невырожденная иррациональная квадратичная форма от $n \geq 3$ переменных. Гипотеза состояла в том, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется целочисленный ненулевой вектор $x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, для которого $|B(x)| < \varepsilon$. Методами аналитической теории чисел в 50-х годах удалось доказать данную гипотезу для $n \geq 21$ (история вопроса хорошо изложена в [Ma96]).

Докажем по индукции, что достаточно рассмотреть случай $n = 3$ (следуя [DM89]). В самом деле, для $n > 3$ рассмотрим такой рациональный базис $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ в $\mathbb{R}^n$, что ограничение B на линейную оболочку $L = \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$ является

неопределенной невырожденной формой и B нетривиальна на $\text{Span}(v_1, v_2)$ (это легко сделать, если привести B к главным осям, а затем пошевелить базис, сделав его рациональным). Допустим, что эта форма на L рациональна. Пусть $L_t = \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-2}, v_{n-1} + tv_n)$. Тогда для малых $|t| < \delta$ ограничение B на L_t также является неопределенной невырожденной формой. Предположим, что для рационального $0 < t < \delta$ форма $B|_{L_t}$ рациональна. Так как ограничение B на $L \cap L_t = \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-2})$ при $n > 3$ нетривиально, то найдется $\alpha > 0$ такое, что αB на L и L_t имеет рациональные коэффициенты. Но тогда αB имеет рациональные коэффициенты на всем $\mathbb{R}^n$. Это противоречие показывает, что ограничение B на некоторую рациональную гиперплоскость L_t , $t \in \mathbb{Q}$, является невырожденной неопределенной иррациональной формой и можно снизить размерность до $n - 1$.

Заметим, что для $n = 2$ гипотеза неверна. Например, если $B(x_1, x_2) = x_1^2 - \lambda^2 x_2^2$, где $\lambda = 1 + \sqrt{2}$, то 0 является изолированной точкой множества $B(\mathbb{Z}^2)$. Дело в том, что $\sqrt{2}$ (а значит, и λ) плохо приближается рациональными числами: как легко проверить, $|\sqrt{2} - \frac{n}{m}| > \frac{1}{4m^2}$ для любых $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим случай $n = 3$. Пусть $G = SL(3, \mathbb{R})$, $\Gamma = SL(3, \mathbb{Z})$ и $S(x) = 2x_1x_3 - x_2^2$. Мы будем рассматривать правое действие G на $\mathbb{R}^n$, т.е. элементы $\mathbb{R}^n$ будем записывать строками. Ясно, что любая невырожденная неопределенная квадратичная форма B на $\mathbb{R}^3$ эквивалентна над $\mathbb{R}$ одной из форм $\pm S$. Поэтому если H_B — связная компонента стабилизатора $SO(B) = \{g \in G : B(xg) = B(x), x \in \mathbb{R}^n\}$ формы B , то H_B сопряжена связной компоненте H стабилизатора формы S . В группе H можно выделить три однопараметрические подгруппы:

$$\left\{ V_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ A_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ V_t^T = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Легко видеть, что $H \simeq SO(2, 1)_0 \simeq PSL(2, \mathbb{R})$ и H порождается двумя унитарными подгруппами $V_{\mathbb{R}}$ и $V_{\mathbb{R}}^T$ (кстати, для $n = 2$ стабилизатор неопределенной формы является редуктивной однопараметрической подгруппой в $SL(2, \mathbb{R})$, задающей геодезический поток, и в этом состоит решающее отличие случаев $n = 2$ и $n = 3$). Рагуна-тан заметил, что гипотеза Оппенгейма–Давенпорта сводится к рассмотрению орбит действия $(\Gamma \setminus G, H)$.¹⁵

ЛЕММА 14.1 (см. [Ma87]). *Если каждая предкомпактная орбита вида ΓgH , $g \in G$, является компактной, то верна гипотеза Оппенгейма–Давенпорта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B — любая невырожденная неопределенная форма на $\mathbb{R}^3$, то найдутся $g \in G$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что $B(x) = \lambda S(xg)$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Достаточно поэтому доказать, что множество $S(\mathbb{Z}^3 g)$ имеет 0 своей предельной точкой при условии, что форма B иррациональна. Предположим, что, напротив, 0 является изолированной точкой этого множества. Тогда орбита $\Gamma gH \subset \Gamma \setminus G$ предкомпактна. В самом деле, допустим, что $\Gamma gh_k \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности $h_k \in H$. Тогда по критерию Малера D.6 точка $0 \in \mathbb{R}^3$ является предельной для системы решеток $\mathbb{Z}^3 gh_k$, $k \in \mathbb{N}$. Но $S(xgh_k) = S(xg)$ и мы получили противоречие.

¹⁵Как замечено в [Ma96], по существу эта редукция содержалась в неявном виде еще в [CS].

Итак, орбита $\Gamma gH \subset \Gamma \backslash G$ предкомпактна. По условию леммы в таком случае она даже компактна, откуда следует, что $SL(3, \mathbb{Z}) \cap gHg^{-1}$ является решеткой в gHg^{-1} , плотной по Зарисскому по теореме Бореля В.2. Следовательно, gHg^{-1} определена над $\mathbb{Q}$. Но gHg^{-1} есть связная компонента стабилизатора B . Докажем, что тогда форма B рациональна.

В самом деле, пусть $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ есть любой (вообще говоря, разрывный) автоморфизм поля $\mathbb{C}$, неподвижный на $\mathbb{Q}$. Он индуцирует автоморфизм $\mathbb{C}^3$, который мы будем обозначать так же, и автоморфизм $g \rightarrow g^\sigma$ группы $GL(3, \mathbb{C})$ применением σ к каждому элементу матрицы g . Так как стабилизатор $H_B = gHg^{-1}$ формы B определен над $\mathbb{Q}$, то H_B инвариантна относительно этого автоморфизма, и поэтому стабилизаторы B и B^σ совпадают. Докажем, что тогда $B = \alpha B^\sigma$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно проверить, что $C = \alpha S$ для любой квадратичной формы C со стабилизатором H . Это достигается прямой проверкой: любая симметрическая матрица C , удовлетворяющая двум условиям $V_1 C V_1^T = C$ и $V_1^T C V_1 = C$, пропорциональна матрице S .

Таким образом, B^σ пропорциональна B для любого $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$. Допустим, что $\alpha = B_{ij}/B_{kl} \notin \mathbb{Q}$ для некоторой пары элементов матрицы B . Хорошо известно, что множество неподвижных точек группы $\text{Aut}(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ есть в точности $\mathbb{Q}$. Поэтому найдется $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ такой, что $B_{ij}^\sigma/B_{kl}^\sigma = \sigma(\alpha) \neq \alpha$ и, стало быть, $B_{ij}/B_{ij}^\sigma \neq B_{kl}/B_{kl}^\sigma$. Противоречие.

Итак, гипотеза Оппенгейма–Давенпорта сводится к доказательству компактности предкомпактных орбит потока $(\Gamma \backslash G, H)$. По существу для этого достаточно рассмотреть предкомпактные орбиты унитарного потока $(\Gamma \backslash G, V_{\mathbb{R}})$ (данное наблюдение Рагунатана и повысило интерес к изучению унитарных потоков). Эта задача с использованием структуры группы $SL(3, \mathbb{R})$ была полностью решена Маргулиссом [Ма87]; мы приводим доказательство в конце параграфа. В [Ма89] был доказано и усиление гипотезы Оппенгейма–Давенпорта: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $x \in \mathbb{Z}^n$, для которого $0 < |B(x)| < \varepsilon$. Известно [Ор], что если 0 является правой предельной точкой для $B(\mathbb{Z}^n)$, то он является и левой предельной точкой. Кроме того, множество $B(\mathbb{Z}^n)$ инвариантно относительно умножения на квадрат любого целого числа. Поэтому множество $B(\mathbb{Z}^n)$ плотно в $\mathbb{R}$ для любой формы B указанного вида (семейство интервалов вида $\left(\frac{a-\varepsilon}{n^2}, \frac{a+\varepsilon}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, содержит интервал вида $(0, \delta)$ и потому множество $B(\mathbb{Z}^n)$ попадает в любую ε -окрестность произвольной точки $a > 0$). Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 14.2 ([Ма89]). *Пусть $B(x)$ – неопределенная невырожденная иррациональная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$. Тогда множество $B(\mathbb{Z}^n)$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.*

Заметим, что основная сложность в изучении потока $(\Gamma \backslash G, V_{\mathbb{R}})$ состояла в том, что подгруппа $V_{\mathbb{R}} \subset G$ не является орисферической. Таким образом, Маргулису впервые удалось изучить устройство орбит унитарного потока, не являющегося орисферическим (в случае полупростой группы G).

Детальное изучение всех (а не только предкомпактных) орбит действия $(\Gamma \backslash G, H)$ позволило Дани и Маргулису [DM89, 90a] значительно усилить результат о значениях

формы B в целых точках. Оказалось, что любая незамкнутая орбита потока $(\Gamma \backslash G, H)$ всюду плотна в $\Gamma \backslash G$ (с точки зрения общего результата Ратнер это и не удивительно, так как между H и $SL(3, \mathbb{R})$ нет других связанных замкнутых подгрупп).

Скажем, что целочисленный вектор $x \in \mathbb{Z}^n$ является *примитивным*, если нет вектора $y \in \mathbb{Z}^n$ и целого числа $k \geq 2$ таких, что $x = ky$. Обозначим через $P(\mathbb{Z}^n)$ множество всех примитивных векторов. Заметим, что множество $P(\mathbb{Z}^n)$ инвариантно относительно действия $SL(n, \mathbb{Z})$. Имеет место

ТЕОРЕМА 14.3 ([DM89]). Пусть $B(x)$ – неопределенная невырожденная иррациональная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$. Тогда множество $B(P(\mathbb{Z}^n))$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Приведем вывод этого результата из утверждения о структуре орбит. Как и при доказательстве теоремы 14.2, заметим, что достаточно рассмотреть случай $n = 3$ (единственное дополнение при этом состоит в том, что $P(L \cap \mathbb{Z}^n) \subset P(\mathbb{Z}^n)$ для любой рациональной гиперплоскости $L \subset \mathbb{R}^n$). Нам нужно доказать, что $\overline{B(E)} = \mathbb{R}$, где $E = P(\mathbb{Z}^3)$ и B – неопределенная невырожденная иррациональная квадратичная форма. Но $B(E) = B(EH_B) = B(E\Gamma H_B)$, где $\Gamma = SL(3, \mathbb{Z})$ и H_B – стабилизатор формы B . Мы знаем, что орбита ΓH_B либо замкнута, либо всюду плотна в $\Gamma \backslash G$. В первом случае группа $\Gamma \cap H_B$ по теореме D.10 является решеткой в H_B , и поэтому $H_B \subset G = SL(3, \mathbb{R})$ определена над $\mathbb{Q}$. Доказательство леммы 14.1 говорит о том, что форма B рациональна. Следовательно, $\overline{\Gamma H_B} = G$ и поэтому $\overline{B(E)} = \overline{B(E\Gamma)} = \overline{B(\mathbb{R}^3)} = \mathbb{R}$.

2. Для квадратичной формы P на $\mathbb{R}^n$ определим $V_{(a,b)}^P(T) = \{|x| < T : a < P(x) < b\}$. Приведем результаты [DM93] и [EMM] об асимптотике числа $N_{(a,b)}^P(T)$ целых точек в $V_{(a,b)}^P(T)$. Пусть $n \geq 3$, $1 \leq p \leq n/2$ и $Q(p, n)$ – пространство симметрических матриц размера $n \times n$ с определителем ± 1 и сигнатурой $(p, n-p)$. Каждая матрица $P \in Q(p, n)$ задает квадратичную форму $P(x) = xPx^T$, $x \in \mathbb{R}^n$, и пространство $Q(p, n)$ имеет естественную локально-компактную топологию поточечной сходимости на $\mathbb{R}^n$.

Первое утверждение нижеизложенной теоремы дает асимптотическую нижнюю оценку для $N_{(a,b)}^P(T)$ равномерно по любому подкомпакту $C \subset Q(p, n)$ в произвольном компакте $K \subset Q(p, n)$ после выкидывания конечного числа рациональных форм в K . Знаменитая теорема Мейера (см. [Ca78] или [Se82]) гласит, что при $n \geq 5$ рациональная форма $P \in Q(p, n)$ имеет $x \in \mathbb{Z}^n$, $x \neq 0$, такой, что $P(x) = 0$. Поэтому естественно предположить, что при $n \geq 5$ можно найти асимптотическую нижнюю оценку для $N_{(-\varepsilon, \varepsilon)}^P(T)$ для всех без исключения форм из произвольного компакта $K \subset Q(p, n)$. Второе утверждение теоремы подтверждает это предположение, хотя оценка получается несколько более слабой.

ТЕОРЕМА 14.4 ([DM93]). Пусть K – произвольный компакт в $Q(p, n)$. Тогда

- (1) для любых $a < b$ и любого $\delta > 0$ найдется конечный набор $N \subset K$ рациональных форм такой, что для любого компакта $C \subset K - N$ существует $T_0 \geq 0$, для которого

$$N_{(a,b)}^P(T) \geq (1 - \delta) \text{vol}(V_{(a,b)}^P(T)), \quad P \in C, \quad T \geq T_0;$$

- (2) если $n \geq 5$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c > 0$ и $T_0 \geq 0$ такие, что

$$N_{(-\varepsilon, \varepsilon)}^P(T) \geq c \text{vol}(V_{(-\varepsilon, \varepsilon)}^P(T)), \quad P \in K, \quad T \geq T_0.$$

Для иррациональной формы $P \in Q(p, n)$ оценка (1) (но с константой $0 < c < 1$ вместо $1 - \delta$) была независимо получена Дани и Мозесом, а также Ратнер (оба результата не опубликованы). Можно показать, что $\text{vol}(V_{(a,b)}^P(T)) \sim \lambda_P(b-a)T^{n-2}$, $T \rightarrow \infty$.

Приведем идею доказательства теоремы 14.4. Определим форму $S \in Q(p, n)$ на $\mathbb{R}^n$ с базисом $e_1, \dots, e_n$ формулой

$$S(x_1, \dots, x_n) = 2x_1x_n + \sum_2^p x_i^2 - \sum_{p+1}^{n-1} x_i^2.$$

Пусть $G = SL(n, \mathbb{R})$, $\Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$, $H = SO(S)$. Так как любая форма $B \in Q(p, n)$ заменой переменных может быть превращена в S , то $Q(p, n)$ гомеоморфно $H \backslash G$. Пусть $U \subset H$ фиксирует $e_1, \dots, e_{n-2}$ и оставляет инвариантными подпространства, натянутые на e_1, e_{n-1} и e_1, e_{n-1}, e_n . Тогда U является однопараметрической унитарной подгруппой (и в случае $(p, n) = (1, 3)$ она совпадает с $V_{\mathbb{R}}$). Через $M \simeq SO(p-1, \mathbb{R})$ обозначим стабилизатор в H подпространства $\mathbb{R}(e_1 + e_n) + \mathbb{R}e_2 + \dots + \mathbb{R}e_p$, на котором форма S положительно определена.

Правое действие G на $\mathbb{R}^n$ задает гомеоморфизм $\Gamma \backslash G$ и пространства решеток в $\mathbb{R}^n$. Всякой измеримой функции ψ на $\mathbb{R}^n$, обращающейся в нуль вне некоторого компакта, можно сопоставить функцию $\tilde{\psi}$ на $\Gamma \backslash G$ по формуле

$$\tilde{\psi}(\Gamma g) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n g} \psi(x).$$

При этом

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi dx = \int_{\Gamma \backslash G} \tilde{\psi} d\nu.$$

Доказательство теоремы 14.4 опирается на следующее очевидное тождество:

$$(*) \quad \int_T^{kT} \int_A \sum_{v \in \mathbb{Z}^n g} \psi(vmU_t) dm dt = \int_T^{kT} \int_A \tilde{\psi}(\Gamma gmU_t) dm dt$$

для всякой ограниченной измеримой функции ψ на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем, любого борелевского подмножества $A \subset M$, $k > 1$ и $T > 0$. Идея состоит в том, что для подходящего выбора ψ и $g \in G$ левая часть этого тождества (при $A = M$) дает хорошее приближение $N_{(a,b)}^P(T)$, а асимптотика правой части оценивается с помощью теоремы 8.1 о равномерной распределенности. Однако нужно иметь ввиду, что функция $\tilde{\psi}$ не является ограниченной, если $\psi \neq 0$, и поэтому теорему 8.1 (точнее, ее равномерный аналог 9.1b) приходится применять к некоторой ограниченной непрерывной функции $f \leq \tilde{\psi}$.

Ясно, что этот метод не позволяет получить асимптотическую оценку сверху для $N_{(a,b)}^P(T)$. Это затруднение было недавно преодолено Эскиным, Маргулисом и Мозесом [ЕММ]. Оказывается, оценка сверху правой части (*) все-таки получается

применением теоремы о равномерной распределенности, если доказать, что для некоторого $\delta > 0$

$$(**) \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \tilde{\psi}(\Gamma g m U_t)^{1+\delta} dm dt < \infty.$$

В [ЕММ], по существу, доказывается это неравенство для любого $0 \leq \delta < 1$ в случае, если $(p, n) \neq (1, 3)$ и $(2, 4)$. Для исключительных значений (p, n) и $\delta = 0$ неравенство $(**)$ становится верным, если заменить $1/T$ на $1/(T \log T)$. В итоге доказывается следующий важный результат.

ТЕОРЕМА 14.5 ([ЕММ]). Пусть K – произвольный компакт в $Q(p, n)$ и $a < b$. Тогда

- (1) если $(p, n) \neq (1, 3)$ и $(p, n) \neq (2, 4)$, то найдется константа $c = c(K, a, b)$ такая, что $N_{(a,b)}^P(T) < cT^{n-2}$ для всех $P \in K$, $T > 1$. Более того, для любого $\delta > 0$ найдется конечный набор $N \subset K$ рациональных форм такой, что для любого компакта $C \subset K - N$ существует $T_0 \geq 0$, для которого

$$(1 - \delta)\lambda_P(b - a)T^{n-2} \leq N_{(a,b)}^P(T) \leq (1 + \delta)\lambda_P(b - a)T^{n-2}, \quad P \in C, \quad T \geq T_0;$$

- (2) если $(p, n) = (1, 3)$ или $(p, n) = (2, 4)$, то найдется константа $c = c(K, a, b)$ такая, что

$$N_{(a,b)}^P(T) < cT^{n-2} \log T, \quad P \in K, \quad T > 2.$$

При этом для исключительных значений (p, n) асимптотика $N_{(a,b)}^P(T) \sim T^{n-2}$ выполняется для почти всех форм $P \in Q(p, n)$ и нарушается для форм вида $x_1^2 + x_2^2 - \alpha x_3^2$ и $x_1^2 + x_2^2 - \alpha(x_3^2 + x_4^2)$, если α слишком быстро приближается квадратами рациональных чисел [ЕММ]. Первые примеры квадратичных форм P , для которых нарушается асимптотика $N_{(a,b)}^P(T) \sim T^{n-2}$, были обнаружены Сарнаком.

3. Перейдем к рассмотрению гипотезы Опенгейма–Давенпорта в так называемом S -арифметическом контексте, следуя Борелю и Прасаду [BP]; см. также [R95b], [Ma96]. Пусть S – конечный набор простых чисел, включая ∞ . Тогда каждое число $s \in S$ задает s -адическую метрику $|\cdot|_s$ на поле $k = \mathbb{Q}$, и пополнение по этой метрике приводит к полю $\mathbb{Q}_s$ s -адических чисел (будем считать, что $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$). Рассмотрим аддитивную локально-компактную (по отношению к топологии произведения) группу $k_S = \sum_{s \in S} k_s$. Обозначим через $O_S \subset k_S$ кольцо S -целых чисел. По определению оно состоит из диагональных элементов вида $(x, \dots, x) \in \mathbb{Q}^n$ таких, что $|x|_p \leq 1$ для всех $p \notin S$ (т.е. $x = m/n$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ раскладывается в произведение степеней простых чисел из набора S). Легко проверить, что O_S является дискретной подгруппой в k_S и, более того, O_S является в k_S равномерной решеткой (примечание в § 12 дает O_S для $S = \{p, \infty\}$).

По отношению к операции (покоординатного) умножения k_S является кольцом и мы вправе рассматривать квадратичные формы на k_S^n . Ясно, что любую квадратичную форму F на k_S^n можно трактовать как набор квадратичных форм F_s на $\mathbb{Q}_s^n$. Форма F

называется *невыврожденной*, если таковы все F_s , $s \in S$. Чтобы сформулировать гипотезу Оппенгейма–Давенпорта, нужно еще правильно определить понятия неопределенности и рациональности. Скажем, что невырожденная форма F является *изотропной*, если каждая форма F_s изотропна, т.е. найдется ненулевой элемент $x_s \in \mathbb{Q}_S^n - \{0\}$ такой, что $F_s(x_s) = 0$. Для $s = \infty$ это равносильно неопределенности и изотропность можно понимать как обобщение неопределенности на S -арифметический случай.

Форму F назовем *рациональной*, если найдутся форма F_0 с коэффициентами в $\mathbb{Q}^n$ и обратимый элемент $\lambda \in k_S$ такие, что $F = \lambda F_0$; в противном случае F называется *иррациональной*. Заметим, что для рациональной формы F множество $F(O_S^n)$ ее значений в S -целых точках является дискретным (в самом деле, форму F_0 можно выбрать с коэффициентами в $\mathbb{Z}^n$ и тогда $F(O_S^n) \subset \lambda O_S$). По аналогии со случаем $k_S = \mathbb{R}$ естественно предположить, что для иррациональной формы F множество $F(O_S^n)$ не дискретно в окрестности $0 \in k_S$ при $n \geq 3$.

ТЕОРЕМА 14.6 ([BP]). Пусть F – изотропная невырожденная квадратичная форма на k_S^n , где $n \geq 3$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) F иррациональна,
- (2) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $x \in O_S^n$ такой, что $0 < |F_s(x_s)|_s < \varepsilon$ для всех $s \in S$.

Борель и Прасад доказали эту теорему, следуя идеям Маргулиса из [Ma87]. В частности, они свели задачу к случаю $n = 3$ и рассмотрели структуру орбит однородных действий на $SL(3, O_S) \setminus SL(3, k_S)$. Интересно, что в S -арифметическом случае не удается так легко вывести плотность $F(O_S^n)$ в k_S , как для $k_S = \mathbb{R}$. Борель и Прасад, однако, заметили, что плотность $F(O_S^n)$ в k_S можно установить, если доказать топологическую гипотезу Рагунатана в S -арифметическом контексте, что и было проделано в [R95a]. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 14.7 ([B]). В условиях теоремы 14.6 условия (1) и (2) эквивалентны условию

- (3) множество значений $F(O_S^n)$ плотно в k_S .

Теорема 14.3 о плотности значений F в примитивных точках $P(O_S^n)$ может быть усилена (даже для случая $k_S = \mathbb{R}$) следующим образом. Скажем, что набор векторов $x_1, \dots, x_m \in O_S^n$, $m \leq n$, является *примитивным*, если его можно дополнить до базиса в O_S^n над O_S . При $m < n$ это равносильно тому, что найдется целочисленный элемент $g \in SL(n, O_S)$ такой, что $g(x_i) = e_i$, $i = 1, \dots, m$, где e_i – i -й элемент стандартного базиса в O_S^n . Ясно, что для $m = 1$ это определение равносильно тому, что $x \in P(O_S^n)$, и всякий такой элемент содержится в некотором примитивном $(n - 1)$ -наборе. Имеет место

ТЕОРЕМА 14.8 ([B]). Пусть F – изотропная невырожденная иррациональная квадратичная форма на k_S^n , где $n \geq 3$, и заданы произвольные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in k_S$. Тогда найдется такая последовательность примитивных $(n - 1)$ -наборов $x_1^j, \dots, x_{n-1}^j \in O_S^n$, $j = 1, \dots, \infty$, что $F(x_i^j) \rightarrow \lambda_i$, $j \rightarrow \infty$, для всех $i = 1, \dots, n - 1$. В частности, множество $B(P(O_S^n))$ плотно в k_S .

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле в [BP], [B] рассмотрен несколько более общий случай, чем тот, что мы описали: в качестве исходного поля k можно взять любое числовое поле, т.е. конечное расширение $\mathbb{Q}$.

Наконец, заметим, что асимптотическая оценка 14.4 верна и в S -арифметическом контексте [MT94].

4. Теперь рассмотрим вопрос об асимптотике числа целых точек на алгебраических многообразиях в $\mathbb{R}^n$. Пусть решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ задает соответствующую $\mathbb{Q}$ -структуру. Предположим, что $V \subset \mathbb{R}^n$ – алгебраическое многообразие над $\mathbb{Q}$ (т.е. множество нулей некоторого полинома на $\mathbb{R}^n$ с рациональными коэффициентами) и через $V_{\mathbb{Z}} = V \cap \mathbb{Z}^n$ обозначим множество целых точек в V . Нас будет интересовать асимптотика числа точек в пересечении $V_{\mathbb{Z}} \cap D_T$ множества $V_{\mathbb{Z}}$ с евклидовым шаром D_T радиуса T при $T \rightarrow \infty$.

Мы дополнительно предположим, что V является орбитой действия некоторой редуктивной алгебраической $\mathbb{Q}$ -группы $G \subset SL(n, \mathbb{R})$, т.е. $V = v_0 G$ для некоторого элемента $v_0 \in V_{\mathbb{Z}}$. Тогда стабилизатор $H = \{g \in G : v_0 g = v_0\}$ также является редуктивной алгебраической $\mathbb{Q}$ -группой и $V \simeq H \backslash G$. Предположим дополнительно, что G и H не допускают нетривиальных $\mathbb{Q}$ -характеров. Тогда по теореме Бореля и Харпш-Чандры $G_{\mathbb{Z}}$ и $H_{\mathbb{Z}}$ являются решетками и $V_{\mathbb{Z}}$ есть конечное объединение $G_{\mathbb{Z}}$ -орбит. Таким образом, достаточно оценить число $N(T, V, \mathcal{O})$ целых точек с нормой не более T в орбите $\mathcal{O} = v_0 G_{\mathbb{Z}}$.

Через λ обозначим G -инвариантную меру на $H \backslash G$, индуцированную мерами Хара на G и H . Пусть $R_T = \{Hg : v_0 g \in D_T\} \subset H \backslash G$ есть образ $V \cap D_T$ при отождествлении $V \simeq H \backslash G$. Имеет место

ТЕОРЕМА 14.9 ([DRS], [EM]). *Если $V \subset \mathbb{R}^n$ является аффинным симметрическим многообразием и решетка $G_{\mathbb{Z}}$ неприводима в G , то асимптотически $N(T, V, \mathcal{O}) \sim \lambda(R_T)$.*

Условие на V здесь эквивалентно тому, что стабилизатор H является неподвижной подгруппой некоторой инволюции на G . Основная идея состоит в доказательстве предельного перехода $\mu_{Hg} \rightarrow \mu_G$ при $Hg \rightarrow \infty$ в $H \backslash G$, где μ_H и μ_G обозначают вероятностные инвариантные меры на $H_{\mathbb{Z}} \backslash H$ и $G_{\mathbb{Z}} \backslash G$ соответственно (на самом деле достаточно доказать это соотношение “в среднем” по R_T при $T \rightarrow \infty$). Эскин, Мозес и Шах в [EMS96] нашли способ избавиться от условия симметричности V . Напомним, что согласно доказанной ими теореме 9.8 все предельные вероятностные меры для семейства $\{\mu_{Hg}, g \in G\}$ являются алгебраическими. Более того, если H_0 является максимальной связной алгебраической $\mathbb{Q}$ -подгруппой в G (это так в условиях теоремы 14.9), то согласно следствию 9.9 предельный переход также имеет место. Следовательно, выполняется такая же асимптотическая оценка, как в теореме 14.9.

В общем случае имеются два препятствия. Во-первых, семейство мер $\{\mu_{Hg}, g \in G\}$ должно быть относительно компактным (иначе можно получить сходимость к мере, сосредоточенной на бесконечности) и по теореме 9.7 критерием для этого служит компактность пространства $\pi(Z_G(H)) \subset G_{\mathbb{Z}} \backslash G$, где $\pi : G \rightarrow G_{\mathbb{Z}} \backslash G$ – естественная проекция (это эквивалентно тому, что H не содержится в параболической $\mathbb{Q}$ -подгруппе в G). Во-вторых, множества $R_T \subset H \backslash G$ при $T \rightarrow \infty$ должны “равномерно охватывать” все пространство $H \backslash G$. Следуя [EMS96], скажем, что последовательность

$R_{T_n} \subset H \setminus G$ фокусируется к $H \setminus L$, где $L \supset H_0$ – некоторая редуктивная $\mathbb{Q}$ -подгруппа в G , если найдется компакт $C \subset G$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(q((Z_G(H_0) \cap G_{\mathbb{Z}})LC) \cap R_{T_n})}{\lambda(R_{T_n})} > 0,$$

где $q: G \rightarrow H \setminus G$ – естественная проекция. Заметим, что множество $q((Z_G(H_0) \cap G_{\mathbb{Z}})LC)$ замкнуто в $H \setminus G$. В самом деле, ввиду условия на L произведение $G_{\mathbb{Z}}L$ замкнуто в G и, стало быть, $(Z_G(H_0) \cap G_{\mathbb{Z}})L$ замкнуто в G и потому имеет замкнутый образ в $H \setminus G$.

Следует заметить, что наличие фокусировки, хотя и является довольно редким феноменом, не является невозможным: в [EMS96] приводится пример, когда для $G = SL(2, \mathbb{C})$, $L \simeq SL(2, \mathbb{R})$ и диагональной подгруппы $H \subset L$ последовательность $R_n \subset H \setminus G$ фокусируется к $H \setminus L$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 14.10 ([EMS96]). *Пусть $H \subset G$ – две редуктивные $\mathbb{Q}$ -подгруппы в $SL(n, \mathbb{R})$, причем $H_{\mathbb{Z}}$ и $G_{\mathbb{Z}}$ являются в них решетками и $V = v_0 G \simeq H \setminus G$ для некоторого $v_0 \in \mathbb{Z}^n$. Пусть H не содержится в параболической $\mathbb{Q}$ -подгруппе в G и никакая последовательность $R_{T_n} = V \cap D_{T_n} \subset H \setminus G$ не является фокусированной. Тогда число целых точек в пересечении $V_{\mathbb{Z}} \cap D_T$ асимптотически есть $\lambda(R_T)$.*

Эскин, Мозес и Шах приводят конкретный пример применения теоремы 14.10. Рассмотрим монический неприводимый над $\mathbb{Q}$ полином p степени n с целыми коэффициентами и норму Гильберта–Шмидта на пространстве $M(n, \mathbb{R})$ матриц размера $n \times n$ (т.е. $\|(A_{i,j})\| = \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}$). Пусть $V_p = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(tE - A) = p(t)\}$ и $N(T, V_p)$ – число элементов в $V_p(\mathbb{Z}) = V_p \cap M(n, \mathbb{Z})$ с нормой $\leq T$. Тогда V_p является замкнутой G -орбитой некоторой матрицы $v_0 \in V_p(\mathbb{Z})$ относительно действия сопряжением группы G матриц размера $n \times n$ с определителем ± 1 . Централизатор H элемента v_0 является максимальным $\mathbb{Q}$ -тором без нетривиальных $\mathbb{Q}$ -характеров. Стоит подчеркнуть, что H не есть неподвижная подгруппа какой-либо инволюции и поэтому теорема 14.9 в данном случае неприменима. В [EMS96] с использованием теоремы 14.10 выводится оценка $N(T, V_p) \sim c_p T^{n(n-1)/2}$, где константа c_p может быть явно вычислена.

5. С помощью техники однородных потоков недавно был достигнут значительный прогресс в теории диофантовых аппроксимаций. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ введем обозначения

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

$$\Pi(x) = \prod_{i=1}^n |x_i|, \quad \Pi_+(x) = \prod_{i=1}^n |x_i|_+, \quad \text{где } |a|_+ = \max(|a|, 1).$$

Скажем, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ очень хорошо аппроксимируется (VWA), если найдутся $\varepsilon > 0$ и бесконечное число различных $q \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $|q \cdot y + p| \cdot \|q\|^n \leq \|q\|^{-n\varepsilon}$ для некоторого $p = p(q) \in \mathbb{Z}$. Известно [Ca57], что почти все $y \in \mathbb{R}^n$ не являются VWA.

Более сложный вопрос возникает, если рассматривать ту же задачу для аналитического k -мерного подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n = \{f(x), x \in U\}$, где U – открытое подмножество в $\mathbb{R}^k$ и $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – аналитическое отображение. Разумеется, нужно рассматривать *изогнутые многообразия*, т.е. те, для которых функции $1, f_1, \dots, f_n$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Так, гипотеза Малера о том, что почти все точки на кривой $K = \{x, x^2, \dots, x^n\}$ не являются VWA, была доказана Спринджук в 60-х годах (см. обзор [Sp]). В общем случае вопрос оставался открытым.

Более общо, скажем, что $y \in \mathbb{R}^n$ очень хорошо аппроксимируется мультипликативно (VWMA), если найдутся $\varepsilon > 0$ и бесконечное число различных $q \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $|q \cdot y + p| \cdot \Pi_+(q) \leq \Pi_+(q)^{-\varepsilon}$ для некоторого $p = p(q) \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $VWA \Rightarrow VWMA$. Поэтому еще сложнее доказать, что почти все точки многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ не являются VWMA. Так, аналог гипотезы Малера для кривой $K \subset \mathbb{R}^n$ (называемый гипотезой Бейкера) оставался открытым. Усилив теоремы Дани–Маргулиса D.7, D.8 о возвращаемости унипотентных траекторий, Клейнбок и Маргулис в итоге решили все эти проблемы:

ТЕОРЕМА 14.11 ([KM97]). *Почти все точки изогнутого аналитического многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ не являются VWMA.*

Важные результаты также были недавно получены в задаче об асимптотической оценке числа целых точек внутри многогранников. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник и $N(P, \mathbb{Z}^n)$ – число узлов решетки $\mathbb{Z}^n$ внутри P . Введем *остаточный член* $R(P, \mathbb{Z}^n) = \text{vol } P - N(P, \mathbb{Z}^n)$. Легко видеть, что $R(tP, \mathbb{Z}^n) = O(t^{n-1})$, причем эта оценка достигается, например, для единичного куба P с вершинами из $\mathbb{Z}^n$. Первые примеры многоугольников $P \subset \mathbb{R}^2$ с аномально малым остатком $R(tP, \mathbb{Z}^2) = O(\log t)$ были ранее построены М.М. Скригановым с помощью плохо аппроксимируемых чисел (см. ссылки в [Skr]). Для фиксированного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ интересно найти типичную асимптотику $R(tP, \Gamma)$ в классе всех унимодулярных решеток $\Gamma = \mathbb{Z}^n g, g \in SL(n, \mathbb{R})$. Оказывается, $R(tP, \Gamma) = O((\log t)^{n-1+\varepsilon})$ для почти всякой унимодулярной решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ и произвольно малого $\varepsilon > 0$. Этот результат был получен в [Skr] с помощью изучения динамики диагонального потока $(SL(n, \mathbb{Z}) \backslash SL(n, \mathbb{R}), H)$, $\dim H = n - 1$.

6. В заключение мы докажем гипотезу Оппенгейма–Давенпорта, следуя [DM90b] и [Ma90b]. Пусть $G = SL(3, \mathbb{R}), \Gamma = SL(3, \mathbb{Z})$, подгруппы $\{V_t\}$ и $\{A_t\}$ те же, что и в п. 1, и

$$U_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим квадратичную форму $S(x) = x\sigma_0 x^T$, т.е. $S(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 - x_2^2$ (напомним, что элементы $\mathbb{R}^n$ рассматриваются как строки и G действует на $\mathbb{R}^n$ справа). Пусть $H \subset G$ – связная компонента стабилизатора формы S . Нашей целью является

ТЕОРЕМА 14.12 ([Ma87]). *Если замыкание $\overline{xH} \subset \Gamma \backslash G$ компактно, то орбита xH компактна.*

Введем следующие обозначения:

$$A = A_{\mathbb{R}}, \quad U = U_{\mathbb{R}}, \quad V = V_{\mathbb{R}}, \quad B = A \cdot (U \times V), \quad F = A \cdot V, \quad U^+ = U_{\mathbb{R}^+}, \quad U^- = U_{\mathbb{R}^-}.$$

Ясно, что теорема 14.12 вытекает из следующих двух утверждений.

ЛЕММА 14.13. Замыкания $\overline{xU^+H}$ и $\overline{xU^-H}$ некомпактны для всякой точки $x \in \Gamma \setminus G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0, S(x) < 0\}$ содержит в себе шар сколь угодно большого диаметра. Пусть $x = \Gamma g$. Тогда найдется такая точка $y \in \mathbb{Z}^3 g$, что $y_3 > 0$ и $S(y) < 0$. Но $S(yU_t) = S(y) + 2ty_3^2$. Поэтому $0 \in S(yU^+)$ и, стало быть, $0 \in yU^+H$. По критерию Малера D.6 замыкание $\overline{xU^+H}$ некомпактно.

ЛЕММА 14.14. Пусть некомпактная орбита $xH \subset \Gamma \setminus G$ имеет компактное замыкание. Тогда найдется точка $y \in \overline{xH}$ такая, что либо yU^+ , либо yU^- содержится в $\overline{xH}$.

Приступим к доказательству леммы 14.14. Фактически оно основано на следующем наблюдении, доказательство которого предоставляется читателю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14.15. Пусть группа Ли G непрерывно действует справа на топологическом пространстве Ω . Предположим, что замкнутые подмножества $Z, W \subset \Omega$ инвариантны относительно замкнутых подгрупп $V, H \subset G$ соответственно, причем Z является компактным V -минимальным множеством. Наконец, пусть $Zt \cap W \neq \emptyset$ для всякого $t \in M \subset G$. Тогда $Zh \subset W$ для всякого $h \in N_G(V) \cap \overline{VMH}$.

Докажем, что лемма 14.14 выводится из следующих двух результатов.

ЛЕММА 14.16. Пусть $Y \subset X \subset \overline{xH} \subset \Gamma \setminus G$, причем множество Y компактно и минимально относительно F , а множество X минимально относительно H . Предположим, что $\overline{xH} \neq xH$ и $y \in Y$. Тогда замыкание множества $\{g \in G - UH : yg \in \overline{xH}\}$ содержит единичный элемент $1 \in G$.

ЛЕММА 14.17. Пусть $M \subset G - UH$ и $1 \in \overline{M}$. Тогда $\overline{VMH}$ содержит либо U^+ , либо U^- .

В самом деле, компактное замыкание $\overline{xH}$ содержит компактное H -инвариантное минимальное множество X . В свою очередь, X содержит F -минимальное множество Y , а оно содержит V -минимальное множество Z . Пусть $z \in Z$ и $M = \{g \in G - UH : zg \in \overline{xH}\}$. Тогда $1 \in \overline{M}$ (лемма 14.16) и $\overline{VMH}$ содержит либо U^+ , либо U^- (лемма 14.17). Но в силу утверждения 14.15 $Z(N_G(V) \cap \overline{VMH}) \subset \overline{xH}$ и, поскольку $U \subset N_G(V)$, лемма 14.14 доказана.

Приступим к доказательству леммы 14.16. Вначале приведем элементарное

УТВЕРЖДЕНИЕ 14.18. Пусть группа Ли G непрерывно и транзитивно действует справа на топологическом пространстве Ω и замкнутое подмножество $Y \subset \Omega$ инвариантно относительно замкнутой подгруппы $F \subset G$. Через G_y обозначим стабилизатор точки $y \in Y$. Тогда

- если замыкание множества $\{g \in G - G_y F : yg \in Y\}$ не содержит $1 \in G$, то орбита yF открыта в Y ;
- пусть подгруппа $B \subset G$ замкнута и содержит F , $B_y = B \cap G_y$ и $\pi : B \rightarrow B_y \setminus B$ — естественное отображение; предположим, что множество Y компактно и F -минимально, а замыкание $\pi(F)$ некомпактно; тогда замыкание подмножества $\{g \in G - B : yg \in yF\}$ содержит $1 \in G$.

Легко проверить, что дискретная подгруппа $\Lambda \subset B = A \cdot (U \times V)$ либо лежит в нильрадикале $U \times V$, либо сопряжена подгруппе в A . В любом случае замыкание $\overline{\Lambda F} \subset \Lambda \setminus B$ некомпактно. Теперь из 14.18b) сразу следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.19. Пусть Y – компактное F -минимальное множество и $y \in Y$. Тогда замыкание множества $\{g \in G - B : yg \in yF\}$ содержит $1 \in G$.

На векторном пространстве E симметрических матриц порядка 3×3 определим правое действие группы G правилом $\sigma \circ g = g^{-1}T\sigma(g^{-1})^T$, $g \in G, \sigma \in E$. Следующий результат проверяется непосредственным вычислением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.20. а) $\sigma_0 \circ U_t = \sigma_0 - 2tq_0$ и поэтому $\sigma_0 \circ (HU_t) = \sigma_0 - 2tq_0$ для всех $t \in \mathbb{R}$,

б) если $g \in G$ и $\sigma_0 \circ g = \sigma_0 - tq_0$, то $g \in HU_t$,

с) отображение $(U_t, h) \rightarrow U_th$ задает гомеоморфизм $U \times H \rightarrow UH$.

Отсюда легко выводится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.21. а) Пусть $h \in H$ и $q_0 \circ h = tq_0$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Тогда $h \in F$.

б) Если $h \in H, t \neq 0$ и $U_th \in HU$, то $h \in F$.

Теперь мы от противного докажем лемму 14.16. Пусть найдется окрестность $O(1) \subset G$ такая, что

$$(*) \quad O(1) \cap \{g \in G : yg \in \overline{xH}\} \subset UH.$$

Если орбита yH открыта в $\overline{xH} \supset X$, то ввиду H -минимальности $X = \overline{yH}$ орбита yH компактна и $yH = \overline{xH}$, что противоречит условию $xH \neq \overline{xH}$. Таким образом, орбита yH не открыта в $\overline{xH}$. В силу 14.18a) замыкание множества $\{g \in G - H : yg \in \overline{xH}\}$ содержит $1 \in G$. Тогда ввиду (*) найдутся последовательности $h_i \in H, t_i \neq 0$ такие, что $yU_{t_i}h_i \in \overline{xH}$ и $U_{t_i}h_i \rightarrow 1$. Тогда $yU_{t_i} \in \overline{xH}$ и ввиду 14.20c) $t_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$.

Предложение 14.19 гарантирует, что замыкание множества $\{g \in G - B : yg \in yF\}$ содержит $1 \in G$. Поэтому найдутся $u \in O(1) \cap (G - B)$ и $p \in F$ такие, что $yu = yp$. Но тогда ввиду (*) $u = U_s h$ для некоторых $h \in H - F$ и $s \in \mathbb{R}$. Так как $t_i \rightarrow 0$, для некоторого k будет $up^{-1}U_{t_k}p \in O(1)$. С другой стороны, так как $yU_{t_k} \in \overline{xH}$, то $yup^{-1}U_{t_k}p = ypp^{-1}U_{t_k}p = yU_{t_k}p \in \overline{xHp} = \overline{xH}$. Теперь в силу (*) $U_s hp^{-1}U_{t_k}p \in UH$, и поэтому $p^{-1}U_{-t_k}ph^{-1} \in HU$. Но $h^{-1} \in H$ и $p^{-1}U_{-t_k}p \in U - \{1\}$. Теперь из 14.21b) следует, что $h \in F$, и мы пришли к противоречию.

Нам осталось доказать лемму 14.17. Индукцией по размерности векторного пространства несложно доказать следующее свойство унитарных линейных отображений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.22. Пусть E – векторное пространство и $E_0 \subset E$ – подпространство неподвижных точек для унитарной подгруппы $V_{\mathbb{R}} \subset GL(E)$. Пусть $M_0 \subset E - E_0$ и $p_0 \in \overline{M_0} \cap E_0$. Тогда существуют непостоянное полиномиальное отображение $\psi: \mathbb{R} \rightarrow E_0$ и последовательности $m_i \in M_0, t_i \in \mathbb{R}$ такие, что $\psi(0) = p_0$ и $m_i V_{s t_i} \rightarrow \psi(s), i \rightarrow \infty$, для любого $s \in \mathbb{R}$.

Нетрудно видеть, что орбита $\sigma_0 \circ G$ замкнута в E и поэтому гомеоморфна однородному пространству $H \setminus G$. Кроме того, действие V на E унитарно и подпространство $E_0 = \mathbb{R}\sigma_0 + \mathbb{R}q_0 \subset E$ состоит из всех V -неподвижных точек. Непосредственная проверка показывает, что $E_0 \cap G = \sigma_0 + \mathbb{R}q_0 = \sigma_0 \circ U$. Пусть $M_0 = \sigma_0 \circ M^{-1}$. Нетрудно проверить, что $M_0 \cap E_0 = \emptyset$, так как $M \subset G - UH$.

Предложение 14.22, примененное к точке $\sigma_0 \in \overline{M_0} \cap E_0$, снабжает нас полиномиальным отображением $\psi: \mathbb{R} \rightarrow E_0$ и последовательностями $g_i \in M$, $t_i \in \mathbb{R}$ такими, что $\psi(0) = \sigma_0$ и $\sigma_0 \circ (g_i^{-1}V_{st_i}) \rightarrow \psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Так как $\psi(\mathbb{R}) \subset E_0 \cap G$, найдется полином $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\psi(s) = \sigma_0 \circ U_{\varphi(s)}$, $s \in \mathbb{R}$. Таким образом, $Hg_i^{-1}V_{st_i} \rightarrow HU_{\varphi(s)}$ и, следовательно, $\overline{VMH} \supset U_{\varphi(\mathbb{R})}$. Но так как $\varphi(0) = 0$ и $\varphi \neq \text{const}$, множество $\varphi(\mathbb{R})$ содержит либо $\mathbb{R}^+$, либо $\mathbb{R}^-$, и лемма 14.17, а вместе с ней и теорема 14.12 доказаны.

§ 15. Некоторые нерешенные проблемы

Мы упомянем несколько проблем, так или иначе связанных с рассмотренной тематикой (за исключением уже упомянутых в §§10–12).

1. Теорема жесткости Ратнер утверждает, что метрический изоморфизм орициклических потоков имеет алгебраическое происхождение. Этот результат был распространен Витте до теоремы о метрической жесткости эргодических унитарных потоков. С другой стороны, как упоминалось в §2, топологическая эквивалентность орициклических потоков на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны согласно Маркусу также влечет их аффинную эквивалентность. Как следует из результатов Бенардате [Ben], топологическая эквивалентность двух эргодических унитарных потоков на $\Gamma \setminus G$ и $\Gamma' \setminus G'$ влечет аффинную эквивалентность (с точностью до линейной замены времени) при условии, что изоморфизм фундаментальных групп (индуцированный топологической эквивалентностью) продолжается до аффинного изоморфизма однородных пространств. Это условие выполнено, если группа G (а тогда автоматически и G') нильпотентна (теорема жесткости Мальцева [Rag]). Также согласно теореме жесткости Мостова–Маргулиса–Прасада (см. [Ma90a]) оно выполнено, если G – полупростая группа без центра, компактных множителей и нормальной подгруппы $H \subset G$ такой, что $H \simeq PSL(2, \mathbb{R})$ и произведение ΓH замкнуто. Однако, как показывает результат Маркуса, топологическая жесткость имеет место и для унитарных потоков на компактных однородных пространствах вида $\Gamma \setminus PSL(2, \mathbb{R})$ (причем, возможно, компактность здесь несущественна). Создается впечатление, что топологическая жесткость эргодических унитарных потоков должна иметь место в общем случае.

2. Как доказала Ратнер [R78], орициклический поток u_t на пространстве $\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R})$ конечного объема эквивалентен по Какутани прямолинейному эргодическому потоку на торе. А именно, найдется такая положительная функция $\tau \in L^1(\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R}), \nu)$, что если $v(x, t)$ является решением уравнения $\int_0^{v(x, t)} \tau(xu_s) ds = t$, то поток u_t^τ на $\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R})$, действующий по правилу $u_t^\tau(x) = xu_{v(x, t)}$, относительно инвариантной меры $\tau\nu$ метрически изоморфен прямолинейному потоку на торе. Однако диагональный поток $u_t \times u_t$ на $\Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R}) \times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{R})$ таким свойством не обладает [R79]. В [R95b] поставлена задача найти все унитарные потоки, эквивалентные по Какутани прямолинейно-

му потоку. Там же задан вопрос: верно ли, что эргодические унитарные потоки на одном и том же однородном пространстве эквивалентны по Какутани?

С другой стороны, даже слабая гладкость замены времени сохраняет свойство жесткости: метрический изоморфизм $(\Gamma_1 \setminus SL(2, \mathbb{R}), u_t^{T_1})$ и $(\Gamma_2 \setminus SL(2, \mathbb{R}), u_t^{T_2})$ влечет сопряженность Γ_1 и Γ_2 в $SL(2, \mathbb{R})$ (см. [R86]). Это так, если обе функции τ_i ограничены вместе с $1/\tau_i$, измеримы и гёльдеровские в направлении подгруппы вращений $SO(2, \mathbb{R}) = \{r(t), t \in [-\pi, \pi]\} \subset SL(2, \mathbb{R})$, т.е. найдутся константы $C, \alpha > 0$ такие, что $|\tau_i(x) - \tau_i(xr(t))| < C|t|^\alpha$ для всех $x \in \Gamma_i \setminus SL(2, \mathbb{R}), t \in [-\pi, \pi]$. Возникает вопрос (см. [R95b]): верно ли, что метрический изоморфизм двух потоков, полученных с помощью гладкой замены времени из эргодических унитарных потоков, влечет аффинную эквивалентность исходных потоков?

3. Свойство перемешивания для однопараметрического потока $(\Gamma \setminus G, g_{\mathbb{R}})$ означает, что для функций $\varphi, \psi \in L^2(\Gamma \setminus G, \nu)$ с нулевым средним их коэффициент корреляции $c_t = \int_{\Gamma \setminus G} \varphi(xg_t)\psi(x) d\nu_x$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Часто весьма важной является информация о скорости убывания корреляций, и первые результаты в этом направлении с помощью теории представлений были получены еще Харриш-Чандрой. Скажем, что скорость убывания корреляций экспоненциальная, если $|c_t| \leq Ce^{-\alpha t}$, где $\alpha = \alpha(G, \Gamma, g_{\mathbb{R}}) > 0$ и $C = C(\varphi, \psi)$. Ратнер [R87] доказала экспоненциальность убывания корреляций для геодезического потока при условии, что функции φ, ψ гёльдеровские в направлении подгруппы вращений (аналогичные результаты были также получены Муром). Для полупростой группы G без простых факторов, локально изоморфных $SO(n, 1)$ или $SU(n, 1)$, экспоненциальность убывания корреляций относительно $\mathbb{R}$ -диагонализуемой подгруппы $g_{\mathbb{R}} \subset G$ для C^∞ -гладких функций недавно доказана Катком и Спатциером [KS94]. В работе Клейнбока и Маргулиса [KM96] этот результат был распространен на гёльдеровские функции φ, ψ . Неизвестно, имеет ли место экспоненциальность убывания корреляций относительно $\mathbb{R}$ -диагонализуемой подгруппы для произвольной полупростой группы G . Если это так, то скорость убывания корреляций для унитарного потока – полиномиальная (как указано в [KM96], это выводится из разложения $G = KAK$, где K – максимальная компактная подгруппа и A – максимальная $\mathbb{R}$ -диагонализуемая подгруппа в G). То, что для ориентированного потока скорость убывания корреляций полиномиальная, было доказано Ратнер [R87].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [An] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. 1967. Т. 90. № 5. С. 1–210.
- [AG] Auslander L., Green L. G -induced flows // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 43–60.
- [AGH] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф. Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1966.
- [AS] Аносов Д. В., Солодов В. В. Гиперболические множества // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. С. 12–99.
- [Au] Auslander L. An exposition of the structure of solvmanifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. P. 227–261.
- [B] Borel A. Values of indefinite quadratic forms at integral points and flows on spaces of lattices // Bull. Amer. Math. Soc. 1995. V. 32. № 2. P. 184–204.

- [BB] Bien F., Borel A. Sous-groupes épimorphiques de groupes algébriques linéaires, I // C. R. Acad. Sci. Paris. 1992. V. 315. P. 649–655.
- [Be] Berend D. Minimal sets on tori // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1984. V. 4. P. 499–507.
- [Ben] Benardete D. Topological equivalence of flows on homogeneous spaces, and divergence of one-parameter subgroups of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 306. №2. P. 499–527.
- [BM] Brezin J., Moore C. C. Flows on homogeneous spaces: a new look // Amer. J. Math. 1981. V. 103. №3. P. 571–613.
- [Bo71] Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414.
- [Bo75] Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [Bo76] Bowen R. Weak mixing and unique ergodicity on homogeneous spaces // Israel J. Math. 1976. V. 23. №3. P. 267–273.
- [BP] Borel A., Prasad G. Values of isotropic quadratic forms at S-integral points // Compositio Math. 1992. V. 83. P. 347–372.
- [BS] Burger M., Sarnak P. Ramanujan duals II // Invent. Math. 1991. V. 106. P. 1–11.
- [Bu] Burger M. Horocycle flow on geometrically finite surfaces // Duke Math. J. 1990. V. 61. P. 779–803.
- [Ca57] Cassels J. W. S. An Introduction to Diophantine Approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.
- [Ca78] Cassels J. W. S. Rational Quadratic Forms. London: Academic Press, 1978.
- [Cr] Croke C. Rigidity for surfaces of non-positive curvature // Comment. Math. Helv. 1990. V. 65. №1. P. 150–169.
- [CS] Cassels J. W. S., Swinnerton-Dyer H. P. F. On the product of three homogeneous forms and indefinite ternary quadratic forms // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1955. V. 248. P. 73–96.
- [Da76] Dani S. G. Kolmogorov automorphisms on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1976. V. 98. №1. P. 119–163.
- [Da77] Dani S. G. Spectrum of an affine transformations // Duke Math. J. 1977. V. 44. P. 125–156.
- [Da80] Dani S. G. A simple proof of Borel's density theorem // Math. Z. 1980. V. 174. P. 81–94.
- [Da81] Dani S. G. Invariant measures and minimal sets of horospherical flows // Invent. Math. 1981. V. 64. №2. P. 357–385.
- [Da82] Dani S. G. On uniformly distributed orbits of certain horocycle flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1982. V. 2. №2. P. 139–158.
- [Da84] Dani S. G. On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1984. V. 4. P. 25–34.
- [Da86a] Dani S. G. Orbits of horospherical flows // Duke Math. J. 1986. V. 53. №1. P. 177–188.
- [Da86b] Dani S. G. On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, II // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1986. V. 6. P. 167–182.
- [Da86c] Dani S. G. Bounded orbits of flows on homogeneous spaces // Comment. Math. Helv. 1986. V. 61. P. 636–660.
- [Da89] Dani S. G. Dense orbits of horospherical flows // Banach Center Publ. 1989. V. 23. P. 173–195.
- [Da95] Dani S. G. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation // Proc. of the ICM-94 (Zurich, Switzerland, 1995). P. 780–789.
- [DM89] Dani S. G., Margulis G. A. Values of quadratic forms at primitive integral points // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 405–424.

- [DM90a] Dani S. G., Margulis G. A. Orbit closures of generic unipotent flows on homogeneous spaces of $SL(3, R)$ // Math. Ann. 1990. V. 286. P. 101–128.
- [DM90b] Dani S. G., Margulis G. A. Values of quadratic forms at integral points: an elementary approach // Enseign. Math. 1990. V. 36. P. 143–174.
- [DM93] Dani S. G., Margulis G. A. Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms // Adv. Soviet Math. 1993. V. 16. P. 91–137.
- [DR] Davenport H., Ridout H. Undefinite quadratic forms // Proc. London Math. Soc. 1959. V. 9. P. 544–555.
- [DRS] Duke W., Rudnick Z., Sarnak P. Density of integer points on affine homogeneous varieties // Duke Math. J. 1993. V. 71. P. 143–180.
- [DS] Dani S. G., Smillie J. Uniform distribution of horocycle flows for Fuchsian groups // Duke Math. J. 1984. V. 51. P. 185–194.
- [DSMS] Dixon J. D., du Sautou M. P. F., Mann A., Segal D. Analytic Pro-p Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
- [EM] Eskin A., McMullen C. Mixing, counting and equidistribution in Lie groups // Duke Math. J. 1993. V. 71. P. 181–209.
- [EMM] Eskin A., Margulis G. A., Mozes S. Upper Bounds and Asymptotics in a Quantitative Version of the Oppenheim Conjecture // Preprint.
- [EMS96] Eskin A., Mozes S., Shah N. Unipotent flows and counting lattice points on homogeneous varieties // Ann. Math. 1996. V. 143. P. 253–299.
- [EMS97] Eskin A., Mozes S., Shah N. Non-divergence of translates of certain algebraic measures // Geom. Funct. Anal. 1997. V. 7. P. 48–80.
- [EP] Ellis R., Perrizo W. Unique ergodicity of flows on homogeneous spaces // Israel J. Math. 1978. V. 29. №2. P. 276–284.
- [F] Flaminio L. An extension of Ratner's rigidity theorem to n -dimensional hyperbolic space // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1987. V. 7. P. 73–92.
- [FO] Feldman J., Ornstein D. Semi-rigidity of horocycle flows over compact surfaces of variable negative curvature // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1987. V. 7. №1. P. 49–72.
- [FS] Flaminio L., Spatzier R. Geometrically finite groups, Patterson–Sullivan measures and Ratner's rigidity theorem // Invent. Math. 1990. V. 99. №3. P. 601–626.
- [Fu61] Furstenberg H. Strict ergodicity and transformations of the torus // Amer. J. Math. 1961. V. 83. P. 573–601.
- [Fu72] Furstenberg H. The unique ergodicity of the horocycle flow // Recent Advances in Topological Dynamics / ed. A. Besk. Berlin: Springer-Verlag, 1972. P. 95–115.
- [GF] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны // УМН. 1952. Т. 7. №1. С. 118–137.
- [Gh] Ghys E. Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes // Astérisque. 1992. V. 206. P. 93–136.
- [Gu] Гуревич Б. М. Энтропия потока орициклов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. №4. С. 768–770.
- [GW] Glasner S., Weiss B. Minimal transformations with no common factors need not be disjoint // Israel J. Math. 1983. V. 45. №1. P. 1–8.
- [H] Herman M. Construction of a minimal diffeomorphism with nonzero topological entropy // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. P. 65–76.
- [He36] Hedlund G. A. Fuchsian groups and transitive horocycles // Duke Math. J. 1936. V. 2. P. 530–542.
- [He39] Hedlund G. A. The dynamics of geodesic flows // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. V. 45. P. 241–260.
- [Ho] Hopf E. Fuchsian groups and ergodic theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 39. №2. P. 299–314.
- [Hu] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
- [Ja] Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

- [Jo] Johnson R. On almost periodic linear differential systems of Millionshchikov and Vinograd // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 85. № 2. P. 452–461.
- [K75] Каток А. Б. Замена времени, монотонная эквивалентность и стандартные динамические системы // Докл. АН СССР. 1975. V. 223. № 4. P. 789–792.
- [K82] Katok A. B. Entropy and closed geodesics // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1982. V. 2. № 3–4. P. 339–365.
- [Ka] Kalikow S. A. Twofold mixing implies threefold mixing for rank one transformations // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1984. V. 4. P. 237–259.
- [KM96] Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Bounded orbits of non-quasiunipotent flows on homogeneous spaces // Amer. Math. Soc. Transl. 1996. V. 171. P. 141–171.
- [KM97] Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on Homogeneous Spaces and Diophantine Approximation on Manifolds // Preprint.
- [KS94] Katok A., Spatzier R. J. First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity // IHES Publ. Math. 1994. V. 79. P. 131–156.
- [KS96] Katok A., Spatzier R. J. Invariant measures for higher rank hyperbolic abelian actions // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1996. V. 16. P. 751–778.
- [KSF] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [Ku] Кушниренко А. Г. Оценка сверху энтропии классических динамических систем // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 1. С. 37–38.
- [KW] Katznelson Y., Weiss B. When all points are recurrent/generic. // Ergodic Theory and Dynamical Systems / ed. A. Katok. V. I (Proceedings, Special year, Maryland, 1979–80). Boston: Birkhäuser, 1981.
- [L] Ledrappier F. Un champ markovien peut etre d'entropie nulle et mélangeant // C. R. Acad. Sci. Paris. 1978. V. 287. P. 561–563.
- [Le] Lesigne E. Théorèmes ergodiques pour une translation sur nilvariété // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1989. V. 9. P. 115–126.
- [LY] Ledrappier F., Young L.-S. The metric theory of diffeomorphisms // Ann. Math. 1985. V. 122. P. 503–539.
- [M] Мальцев А. И. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9. С. 329–352.
- [Ma70] Маргулис Г. А. О некоторых мерах, связанных с U -потоками на компактных многообразиях // Функц. анализ и его прил. 1970. Т. 4. № 1. С. 62–76.
- [Ma71] Маргулис Г. А. О действии унитарных подгрупп в пространстве решеток // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 4. С. 552–556.
- [Ma87] Margulis G. A. Formes quadratiques indefinies et flots unipotents sur les espaces homogènes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1987. V. 304. № 10. P. 249–253.
- [Ma88] Margulis G. A. Lie groups and ergodic theory // Proc. of Conference in Varna (1986). Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 130–146.
- [Ma89] Margulis G. A. Discrete subgroups and ergodic theory // Proc. of the conference in honour of A. Selberg (Oslo, 1987). New York: Academic Press, 1989. P. 377–398.
- [Ma90a] Margulis G. A. Discrete subgroups of semisimple groups. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [Ma90b] Margulis G. A. Orbits of group actions and values of quadratic forms at integral points // Israel Mathematical Conference Proceedings “Festschrift in honour of I. I. Piatetski-Shapiro”. The Weizmann Science Press of Israel. V. 3, 1990. P. 127–151.
- [Ma91a] Margulis G. A. Compactness of minimal closed invariant sets of actions of unipotent groups // Geom. Dedicata. 1991. V. 37. P. 1–7.
- [Ma91b] Margulis G. A. Dynamical and ergodic properties of subgroups actions on homogeneous spaces with applications to number theory // ICM-90 (Math. Soc. Japan, Kyoto), 1991. P. 193–215.
- [Ma96] Margulis G. A. Oppenheim Conjecture // Preprint.

- [Mar75] Marcus B. Unique ergodicity of the horocycle flow: the variable curvature case // Israel J. Math. 1975. V. 21. P. 131–144.
- [Mar78] Marcus B. The horocycle flow is mixing of all degrees // Invent. Math. 1978. V. 46. P. 201–209.
- [Mar83] Marcus B. Topological conjugacy of horocycle flows // Amer. J. Math. 1983. V. 105. P. 623–632.
- [Mi68] Миллионщиков В. М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.
- [Mi76] Миллионщиков В. М. Формула для энтропии гладкой динамической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 12. С. 2188–2192.
- [Mo66] Moore C. C. Ergodicity of flows on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 154–178.
- [Mo80] Moore C. C. The Mautner phenomenon for general unitary representations // Pacific J. Math. 1980. V. 86. № 1. P. 154–169.
- [Mor] Morse H. M. Recurrent geodesics on surface of negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc. 1921. V. 22. № 1. P. 84–100.
- [Moz92] Mozes S. Mixing of all orders of Lie group actions // Invent. Math. 1992. V. 107. P. 235–241.
- [Moz95a] Mozes S. Epimorphic subgroups and invariant measures // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1995. V. 15. P. 1207–1210.
- [Moz95b] Mozes S. Correction to the paper “Mixing of all orders of Lie group actions” // Invent. Math. 1995. V. 119. P. 399.
- [MS] Mozes S., Shah N. On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1995. V. 15. № 1. P. 149–159.
- [MT94] Margulis G. A., Tomanov G. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces // Invent. Math. 1994. V. 116. P. 347–392.
- [MT96] Margulis G. A., Tomanov G. Measure rigidity for almost linear groups and its applications // J. Anal. Math. 1996. V. 69. P. 25–54.
- [Ne] Немыцкий В. В. Топологические вопросы теории динамических систем // УМН. 1949. Т. 4. № 6. С. 91–153.
- [O] Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978.
- [Op] Oppenheim A. Values of quadratic forms I, II // Quart. J. Math. Oxford. 1953. V. 4. P. 54–59, 60–66.
- [Ot] Otal J.-P. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative // Ann. Math. 1990. V. 131. № 1. P. 151–162.
- [OW] Ornstein D., Weiss B. Geodesic flows are Bernoullian // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 184–198.
- [P69] Parry W. Ergodic properties of affine transformations and flows on nilmanifolds // Amer. J. Math. 1969. V. 91. № 3. P. 751–777.
- [P71] Parry W. Metric classification of ergodic nilflows and unipotent affines // Amer. J. Math. 1971. V. 93. P. 819–828.
- [P73] Parry W. Dynamical representation in nilmanifolds // Compos. Math. 1973. V. 26. P. 150–174.
- [Pa] Парасюк О. С. Поток горошиков на поверхностях постоянной отрицательной кривизны // УМН. 1953. Т. 8. № 3. С. 124–126.
- [Pe] Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 55–111.
- [Pi] Пинскер М. С. Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 5. С. 1025–1026.
- [PS] Pugh C., Shub M. Ergodic elements of ergodic actions // Compositio Math. 1971. V. 23. P. 115–122.

- [R78] Ratner M. Horocycle flows are loosely Bernoullian // Israel J. Math. 1978. V. 31. № 2. P. 122–132.
- [R79] Ratner M. The Cartesian square of the horocycle flow is not loosely Bernoullian // Israel J. Math. 1978. V. 34. № 1–2. P. 72–96.
- [R82a] Ratner M. Rigidity of horocycle flows // Ann. Math. 1982. V. 115. P. 597–614.
- [R82b] Ratner M. Factors of horocycle flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1982. V. 2. P. 465–489.
- [R83] Ratner M. Horocycle flows, joinings and rigidity of products // Ann. Math. 1983. V. 118. P. 277–313.
- [R84] Ratner M. Ergodic theory in hyperbolic space // Contemp. Math. 1984. V. 26. P. 309–334.
- [R86] Ratner M. Rigidity of time changes for horocycle flows // Acta Math. 1986. V. 156. P. 1–32.
- [R87] Ratner M. The rate of mixing for geodesic and horocycle flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1987. V. 7. P. 267–288.
- [R90a] Ratner M. Invariant measures for unipotent translations on homogeneous spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1990. V. 87. P. 4309–4311.
- [R90b] Ratner M. Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups // Invent. Math. 1990. V. 101. P. 449–482.
- [R90c] Ratner M. On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups // Acta Math. 1990. V. 165. P. 229–309.
- [R91a] Ratner M. On Raghunathan's measure conjecture // Ann. Math. 1991. V. 134. P. 545–607.
- [R91b] Ratner M. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows // Duke Math. J. 1991. V. 63. P. 235–280.
- [R92] Ratner M. Raghunathan's conjecture for $SL(2, \mathbb{R})$ // Israel J. Math. 1992. V. 80. P. 1–31.
- [R93] Ratner M. Raghunathan's conjectures for p -adic Lie groups // Internat. Math. Res. Notices. 1993. № 5. P. 141–146.
- [R94] Ratner M. Invariant measures and orbit closures for unipotent actions on homogeneous spaces // Geom. Funct. Anal. 1994. V. 4. P. 236–256.
- [R95a] Ratner M. Raghunathan's conjectures for cartesian products of real and p -adic Lie groups // Duke Math. J. 1995. V. 77. № 2. P. 275–382.
- [R95b] Ratner M. Interactions between ergodic theory, Lie groups, and number theory // ICM-94 (Zurich, Switzerland), 1995. P. 157–182.
- [Rag] Рагунатан М. Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
- [Re] Remage R. On minimal sets in the plane // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 41–47.
- [Ry91] Рыжиков В. В. Связь перемешивающих свойств потока с изоморфизмами входящих в него преобразований // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 6. С. 98–106.
- [Ry93] Рыжиков В. В. Джойнинги и кратное перемешивание для действий конечного ранга // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 2. С. 63–78.
- [Ry95] Рыжиков В. В. Функциональный взгляд на теорему Семереди. Замечание о кратном перемешивании потоков // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 213–214.
- [Sa] Sarnak P. Asymptotic behaviour of periodic orbits of the horocycle flow and Eisenstein series // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 719–739.
- [Saf] Сафонов А. В. О спектральном типе эргодических индуцированных потоков // Изв. вузов. Сер. матем. 1982. Т. 241. № 6. С. 242–247.
- [Sch] Schmidt W. M. On badly approximable numbers and certain games // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 178–199.
- [Se69] Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
- [Se82] Серр Ж.-П. Курс арифметики. М.: Мир, 1982.

- [Sh91] Shah N. Uniformly distributed orbits of certain flows on homogeneous spaces // Math. Ann. 1991. V. 289. P. 315–334.
- [Sh94] Shah N. Limit distributions of polynomial trajectories on homogeneous spaces // Duke Math. J. 1994. V. 75. № 3. P. 711–732.
- [Sh96] Shah N. Limit distributions of expanding translates of certain orbits on homogeneous spaces // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 1996. V. 106. № 2. P. 105–125.
- [Sh97] Shah N. Invariant measures and orbit closures on homogeneous spaces for actions of subgroups generated by unipotent elements // Conference on Lie Groups and Ergodic Theory Proceedings, TIFR, Bombay, 1996 (to appear).
- [Si60] Синай Я. Г. Геодезические потоки на многообразиях постоянной кривизны // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. № 4. С. 752–755.
- [Si72] Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН. 1972. Т. 27. № 4. С. 21–63.
- [Skr] Skriganov M. M. Ergodic theory on $SL(n)$, Diophantine approximations and anomalies in the lattice point problem // Steklov Math. Inst., St. Petersburg. Dept., Preprint, 1996.
- [Sp] Спринджук В. Г. Достижения и проблемы диофантовых приближений // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 3–68.
- [SSS] Сафонов А. В., Старков А. Н., Степин А. М. Динамические системы с транзитивной группой симметрий // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. С. 187–243.
- [St83] Старков А. Н. Эргодическое поведение потоков на однородных пространствах // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 3. С. 538–540.
- [St84] Старков А. Н. Потоки на компактных разрешимых многообразиях // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 4. С. 549–556.
- [St86] Старков А. Н. О пространствах конечного объема // Вестник МГУ. Сер. матем. 1986. № 5. С. 64–66.
- [St87a] Старков А. Н. О критерии эргодичности G -индуцированных потоков // УМН. 1987. Т. 42. № 3. С. 197–198.
- [St87b] Старков А. Н. Разрешимые однородные потоки // Матем. сб. 1987. Т. 134. № 2. С. 242–259.
- [St88] Старков А. Н. Редукция теории однородных потоков к случаю дискретной подгруппы изотропии // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 6. С. 1328–1331.
- [St89] Старков А. Н. Эргодическое разложение потоков на однородных пространствах конечного объема // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 12. С. 1614–1633.
- [St90] Старков А. Н. Структура орбит однородных потоков и гипотеза Рагунатана // УМН. 1990. Т. 45. С. 219–220.
- [St91] Старков А. Н. Орисферические потоки на пространствах конечного объема // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 5. С. 774–784.
- [St93] Старков А. Н. О кратном перемешивании однородных потоков // Докл. АН. 1993. Т. 333. № 4. С. 28–31.
- [St95a] Starkov A. N. Minimal sets of homogeneous flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1995. V. 15. P. 361–377.
- [St95b] Starkov A. N. Fuchsian groups from the dynamical viewpoint // J. Dynam. Contr. Syst. 1995. V. 3. P. 427–445.
- [St95c] Старков А. Н. О взаимных изоморфизмах трансляций однородного потока // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 1. С. 98–110.
- [Ste69] Степин А. М. Потоки на разрешимых многообразиях // УМН. 1969. Т. 24. № 2. С. 241–242.
- [Ste73] Степин А. М. Динамические системы на однородных пространствах полупростых групп Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 5. С. 1091–1107.
- [T] Tamagawa T. Arithmetic Algebraic Geometry. New York: Harper and Row, 1965.

- [Th] Thouvenot J.-P. Some Properties and Applications of Joinings in Ergodic Theory // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. V. 205, 1995.
- [V] Veech W. A. Unique ergodicity of horospherical flows // Amer. J. Math. 1977. V. 99. P. 827–859.
- [VdV] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
- [Ve] Verjovsky A. Arithmetic, geometry and dynamics in the unit tangent bundle of the modular orbifold // Preprint ICTP.
- [VGS] Винберг Э. Б., Горбачевич В. В., Шварцман О. В. Дискретные подгруппы групп Ли // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–120.
- [Vi] Виноград Р. Э. К проблеме Н. П. Еругина // Дифференц. уравнения. 1975. V. 11. P. 632–638.
- [VO] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
- [VS] Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движения пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 147–259.
- [Wi85] Witte D. Rigidity of some translations on homogeneous spaces // Invent. Math. 1985. V. 81. P. 1–27.
- [Wi87] Witte D. Zero-entropy affine maps on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1987. V. 109. P. 927–961.
- [Wi89] Witte D. Rigidity of horospherical foliations // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1989. V. 9. P. 191–205.
- [Wi94] Witte D. Measurable quotients of unipotent translations on homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 345. № 2. P. 577–594.
- [Wi96] Witte D. Correction to the paper “Zero-entropy affine maps on homogeneous spaces” // Amer. J. Math. (to appear).
- [Z] Zimmer R. Ergodic theory and semisimple groups. Boston: Birkhäuser, 1984.
- [Za] Zagier D. Eisenstein series and the Riemann zeta-function // Automorphic forms, Representation Theory and Arithmetic, TIFR, Bombay, 1981. P. 275–301.