Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Ягнятинский, Одна задача оптимального последовательного инвестирования, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:35:48

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Е. В. Ягнятинский

1. Будем предполагать, что все рассмотрения происходят на винеровском стохастическом базисе, т.е. каноническом фильтрованном винеровском пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$.

Относительно винеровской меры $\mathbf{P}$ канонический процесс $W = (W_t(\omega))_{t \geq 0}$ с $W_t(\omega) = \omega_t$ является стандартным винеровским процессом. Пусть наблюдается процесс $\xi_t = rt = \sigma W_t$ – винеровский процесс со сносом, для которого справедливо стохастическое дифференциальное уравнение $d\xi_t = r dt + \sigma dW_t$.

Мы наблюдаем процесс $(\xi_t)_{t \geq 0}$ в течение случайного времени τ , где τ – момент остановки относительно фильтрации $\mathbf{F}$ и $\tau \in M_T = \{\tau \mid \tau \leq T\}$, где T фиксировано. Исследуем процесс $v_t = v_0 + \int_0^t \alpha(s, \omega) d\xi_s$, $v_0 = v$, где $\alpha(s, \omega) = \alpha_s$ есть $\mathcal{F}_s$ -измеримые функции, удовлетворяющие условию “неотрицательности”, т.е.

$$\alpha(s, \omega) \in A(v) = \left\{ \alpha(s, \omega) \mid \forall t > 0, v + \int_0^t \alpha(s, \omega) d\xi_s \geq 0 \right\}.$$

Введем также процесс $Z_t(\omega) = \exp\{-(r/\sigma)W_t(\omega) - (r^2 t/(2\sigma^2))\}$. Поскольку $Z_t \geq 0$ и $\mathbf{E} Z_t = 1$, с помощью теоремы Каратеодори можно построить ([3, п. 1, п.п. 3]) меру $\mathbf{P}^*$ на $(\Omega, \mathcal{F})$, локально эквивалентную мере $\mathbf{P}$, причем для всякого конечного марковского момента $\tau = \tau(\omega) < \infty$, $\omega \in \Omega$ (относительно $\mathbf{F}$), имеем $\mathbf{P}_\tau^* \sim \mathbf{P}_\tau$ и производная Радона–Никодима $\frac{d\mathbf{P}_\tau^*}{d\mathbf{P}_\tau}(\omega) = Z_\tau(\omega)$.

Цель исследования процесса v_t : при введенных выше ограничениях найти

$$(1) \quad U(v) = \sup_{\tau \in M_T} \sup_{\alpha \in A(v)} \mathbf{P} \left\{ v + \int_0^\tau \alpha(s, \omega) d\xi_s \geq 1 \right\}, \quad v < 1,$$

оптимальный момент остановки τ и стратегию $\alpha \in A(v)$, для которых в (1) достигается верхняя грань.

2. ТЕОРЕМА. В данных условиях задачи оптимальный момент остановки, функция $U(v)$ и функция $\alpha(t, \omega)$ имеют вид:

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \mid Z_t \notin (A, B)\}, \quad v < A < 1 < B, \quad U(v) = \frac{1-A}{B-A},$$

$$\alpha(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau^*-t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x + (\sigma/r)\ln A - (r/2\sigma)\tau^*}{\sqrt{\tau^*-t}}\right)^2\right\},$$

где константы A и B однозначно определяются из следующей системы уравнений

$$\frac{A(B-1)}{B-A} = v, \quad \frac{2\sigma^2}{r^2} \left\{ \frac{(B-1)\ln(B/A)}{B-A} - \ln B \right\} = T.$$

3. Дадим экономическую постановку данной задачи: процесс ξ_s интерпретируем как процесс цены некоторой акции, который помимо детерминированного коэффициента роста r имеет коэффициент изменчивости (волатильность) σ , $\mathcal{F}_t$ – информация, основанная на ценах акции до момента t , v – начальный капитал портфеля, α – количество акций в нашем портфеле. Тогда условие “неотрицательности” можно проинтерпретировать следующим образом: в любой момент наблюдений наш капитал неотрицателен, т.е. мы не берем денег в долг. Мы наблюдаем изменение курса акции случайное время τ , но известно, что $E\tau = T$, т.е. средний период наблюдений равен T . Наша задача за это время построить стратегию $\alpha(t, \omega)$, которая дает 1\$ с максимальной вероятностью.

4. Из формулы Ито и теоремы Гирсанова следует ([3, п. 1, п.п. 3]), что процесс $W_t^* = W_t + (r/\sigma)t - P^*$ -винеровский и $\hat{\alpha}_s = \sigma\alpha_s - F_s$ -измеримые функции. Введем следующий класс множеств:

$$\mathfrak{J}(v, \tau) = \left\{ A \in F_\tau \mid A = \left\{ \omega \mid x + \int_0^\tau \hat{\alpha}_s dW_s^* \geq 1 \right\}, 0 \leq x \leq v, \forall t \ x + \int_0^t \hat{\alpha}_s dW_s^* \geq 0 \right\}.$$

ЛЕММА. $A \in \mathfrak{J}(v, \tau) \iff P^*(A) \leq v$.

Иными словами, $U(v)$ есть цена в следующей задаче Вальда:

$$(2) \quad U(v) = \max_{\tau \in M_T, P^*(A) \leq v} P(A),$$

при этом v – вероятность ошибки первого рода, а $P(A)$ – мощность критерия. Заметим, что при $\tau = T$ данная задача была решена (Kulldorf, Heath) сведением к задаче различения двух гипотез при помощи теста Неймана–Пирсона.

5. Задача (2) может быть сформулирована в виде задачи минимизации байесовского риска и (см. [1]) сведена к классической задаче об оптимальной остановке марковского процесса:

$$(3) \quad s(z) = \inf_{\tau \in M_1} E[\min(\pi Z_\tau, 1 - \pi) + c\tau], \quad Z_0 = z, \quad M_1 = \{\tau \mid E\tau < \infty\}.$$

Решая задачу об оптимальной остановке (см. [1]), можно явно выписать оптимальный момент остановки, цену $U(v)$ и критическое множество $A^* = \{\omega \mid Z_{\tau^*} \leq A\}$.

Стратегии $\hat{\alpha}_s(\omega)$ определяем из равенства $v + \int_0^{\tau^*} \hat{\alpha}_s(\omega) dW_s^* = I_{A^*}$, используя мартингальное свойство W^* по мере P^* и применяя далее формулу Ито.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. [3] Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 80–129. [4] Григелионис Б. И., Ширяев А. Н. // Теория вероятн. и ее примен. 1966. Т. 9. № 4. [5] Крылов Н. В. Введение в теорию случайных процессов. Часть 2. М.: Изд-во МГУ, 1987. [6] Kallianpur G. Stochastic filtering theory. New York: Springer-Verlag, 1980.