Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Адрианов, Правильные карты с группой автоморфизмов $PSL_2(q)$, УМН, 1997, том 52, выпуск 4, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm866>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:19:17

ПРАВИЛЬНЫЕ КАРТЫ С ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ $PSL_2(q)$

Н. М. Адрианов

0. Под *картами* мы будем понимать конечные клеточные разбиения компактных ориентированных поверхностей. Карта *двукрашена*, если ее вершины раскрашены в два цвета (черный и белый) таким образом, что каждое ребро соединяет вершины разных цветов. Двукрашенная карта называется *правильной*, если группа автоморфизмов действует на ее ребрах транзитивно. Работа посвящена перечислению правильных двукрашенных карт с группой автоморфизмов $PSL_2(q)$. Перечислены также правильные карты с циклическими группами автоморфизмов.

1. Относительно всех фактов, касающихся карт и используемых в настоящей заметке, мы отсылаем, например, к [1], [2]. Будем говорить, что правильная двукрашенная карта принадлежит типу (k, l, m) , если из каждой вершины белого цвета выходит k ребер, из каждой вершины черного цвета – l ребер, а каждая грань ограничена $2m$ ребрами.

Платоновы тела приводят к правильным сферическим двукрашенным картам типов $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$. Кватернион Клейна дает пример правильной двукрашенной карты типа $(2, 3, 7)$ с группой автоморфизмов $PSL_2(7)$.

2. Известно, что группа G автоморфизмов правильной двукрашенной карты типа (k, l, m) порождается элементами x и y такими, что

$$(1) \quad \text{ord}(x) = k, \quad \text{ord}(y) = l, \quad \text{ord}(xy) = m.$$

Обозначим через $\text{map}_{(k,l,m)}(G)$ число различных правильных двукрашенных карт типа (k, l, m) с группой автоморфизмов, изоморфной G . Пусть также $\sigma_{(k,l,m)}(G)$ есть число пар $x, y \in G$, удовлетворяющих условию (1), а $\eta_{(k,l,m)}(G)$ – число пар $x, y \in G$, удовлетворяющих условию (1) и порождающих G . Тогда

$$(2) \quad \text{map}_{(k,l,m)}(G) = \eta_{(k,l,m)}(G) / |\text{Aut } G|,$$

а σ и η связаны соотношением

$$(3) \quad \sigma_{(k,l,m)}(G) = \sum_{H \subseteq G} \eta_{(k,l,m)}(H).$$

3. Пусть C_n обозначает циклическую группу порядка n ; $[k, l, m]$ – наименьшее общее кратное чисел k, l, m ; $\varphi(n)$ – теоретико-числовая функция Эйлера; $v_p(n)$ – максимальная степень α такая, что p^α делит n .

ТЕОРЕМА 1. Пусть каждое из чисел k, l, m делит n . Если существует некоторая степень простого числа, которая делит в точности одно из чисел k, l, m , то $\sigma_{(k,l,m)}(C_n) = 0$. Иначе

$$\sigma_{(k,l,m)}(C_n) = \frac{\varphi(k)\varphi(l)\varphi(m)}{\varphi([k, l, m])} \prod \left(1 - \frac{1}{p-1}\right),$$

где произведение берется по всем простым p таким, что $v_p(k) = v_p(l) = v_p(m) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяем утверждение теоремы, когда n – степень простого числа, пользуемся мультипликативностью рассматриваемых величин.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что $\eta_{(k,l,m)}(C_n) = \sigma_{(k,l,m)}(C_n)$, если $n = [k, l, m]$, и $\eta_{(k,l,m)}(C_n) = 0$ в противном случае. С учетом (2) это дает значение $\text{map}_{(k,l,m)}(C_n)$.

4. Для конечной группы G обозначим через $\text{Ord}(G)$ множество порядков элементов группы G . Через $\text{Div}(n)$ обозначим множество натуральных делителей числа n .

ЛЕММА (см. [3]). Пусть $q = p^e$, p – простое, и $\delta = \text{НОД}(q-1, 2)$. Тогда

$$\text{Ord}(PSL_2(q)) = \text{Div}((q-1)/\delta) \cup \text{Div}((q+1)/\delta) \cup \{p\};$$

$$\text{Ord}(PGL_2(q)) = \text{Div}(q-1) \cup \text{Div}(q+1) \cup \{p\}.$$

5. Пусть $1/k + 1/l + 1/m < 1$ и $q = p^e > 5$. Положим

$$\varphi_p^*(n) = \begin{cases} \varphi(n), & n \neq p, \\ 2, & n = p, \end{cases} \quad \text{и} \quad d(n) = \begin{cases} \delta, & n - \text{нечетно}, \\ 1, & n - \text{четно}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k, l, m \in \text{Ord}(PSL_2(q))$ и h — минимальный делитель e такой, что $k, l, m \in \text{Div}((p^n - 1)/d(\frac{e}{n})) \cup \text{Div}((p^n + 1)/d(\frac{e}{n})) \cup \{p\}$. Если $h < e$, то

$$\text{map}_{(k,l,m)}(PSL_2(q)) = 0.$$

Иначе,

$$\begin{aligned} \text{map}_{(k,l,m)}(PSL_2(q)) = \frac{1}{e} & \left(\frac{\varphi_p^*(k)\varphi_p^*(l)\varphi_p^*(m)}{8} \delta - \frac{1}{2} \sigma_{(k,l,m)}(C_{(q-1)/\delta}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sigma_{(k,l,m)}(C_{(q+1)/\delta}) - R_1 - R_2 - R_3 - R_4 \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi_p^*(n), & \text{если } (k, l, m) = (p, n, n) \text{ для некоторого } n, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ R_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } (k, l, m) = (3, 4, 4) \text{ и } p \equiv 1 \pmod{8}, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ R_3 &= \begin{cases} 2, & \text{если } (k, l, m) = (2, 5, 5), (3, 3, 5) \text{ или } (5, 5, 5); \ p > 2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ R_4 &= \begin{cases} 4, & \text{если } (k, l, m) = (3, 5, 5), \ p > 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [4] для произвольной группы G была введена функция Мёбиуса $\mu_G(H)$, определенная на решетке подгрупп G и позволяющая обращать соотношения типа (3):

$$(4) \quad \eta_{(k,l,m)}(G) = \sum_{H \subseteq G} \mu_G(H) \sigma_{(k,l,m)}(H).$$

Там же были вычислены значения μ_G для $G = PSL_2(p)$, $p > 5$. В работе [5] были вычислены значения μ_G для $G = PSL_2(q)$, $q = p^e$, p — любое простое, $e \geq 2$.

Вычисляя значения $\sigma_{(k,l,m)}(H)$ и применяя формулу обращения (4), а также учитывая, что $|\text{Aut } PSL_2(p^e)| = ep^e(p^e - 1)(p^e + 1)$, получаем утверждение теоремы 2.

6. Подставляя $k = 2$, $l = 3$, $m = 7$, мы получаем в качестве следствия результат Макбеа [6], который утверждает, что риманова поверхность рода g с группой автоморфизмов порядка $84(g - 1)$, изоморфной $PSL_2(q)$, существует лишь в следующих случаях:

- а) $q = 7$;
- б) $q = p$, где $p \equiv \pm 1 \pmod{7}$;
- в) $q = p^3$, где $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$.

Причем в случаях а) и в) существует единственная такая поверхность, а в случае б) существуют три такие поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. [2] Cori R., Machi A. // Exposition. Math. 1992. V. 10. P. 403–427, 429–447, 449–467. [3] Dickson L. E. Linear Groups. Leipzig: Teubner, 1901; New York: Dover, 1958. [4] Hall P. // Quart. J. Math. Oxford. 1936. V. 7. P. 134–151. [5] Downs M. L. N. // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1991. V. 43. № 1. P. 61–75. [6] Macbeath A. M. Generator of the linear fractional groups // Proc. of Sympos. in Pure Math. V. 12. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1969. P. 14–32.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: adrianov@nw.math.msu.su

Принято редколлегией
15.03.1997