Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Гапеев, Расчет верхних и нижних цен опционов Европейского типа, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm868>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:17:03

РАСЧЕТ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ЦЕН ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА

П. В. ГАПЕЕВ

В работе А. Н. Ширяева, Ю. М. Кабанова, Д. О. Крамкова и А. В. Мельникова [1] была рассмотрена модель Кокса–Росса–Рубинштейна, где (B, S) -рынок предполагался полным. Было дано определение рациональной стоимости опциона Европейского типа.

Мы рассмотрим вопрос о том, как надо определять понятия цены покупки и цены продажи опциона в схеме, где активный трейдер может не только продавать, но и покупать опционы Европейского типа, при этом совершая хеджирование того и другого. Рассматривается модель неполного рынка, где множество мартингалльных мер состоит более чем из одной меры.

Пусть имеется дискретный (B, S) -рынок. Стоимость акции $S = (S_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ в момент k : $S_k = S_0(1 + \rho_1)(1 + \rho_2) \cdots (1 + \rho_k)$, $S_0 > 0$, где $\rho_k = \rho_k(\omega)$, $k \in \mathbb{N}$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, зависящие от случая $\omega \in \Omega$.

Поскольку в этой модели вся случайность входит через значения ρ_k , $k \in \mathbb{N}$, то можно оперировать лишь с распределением вероятности $P = P(d\rho) = P(d\rho_1 \times d\rho_2 \times \cdots \times d\rho_N)$ на множестве $\mathbb{R}^N$ с борелевской системой $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, где N – maturity time (время предъявления) опциона Европейского типа. Будем также предполагать, что носитель меры $P(d\rho)$ сосредоточен на бруссе $[a, b]^N$, $-1 < a < b < +\infty$.

Мы предположим, что банковский счет $B = (B_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ имеет ставку $r \geq 0$, $-1 < a < r < b$, и $B_k = B_0(1 + r)^k$, $B_0 = 1$.

Введем класс $\mathcal{P}(P) = \{\tilde{P} = \tilde{P}(d\rho)\}$ распределений на $[a, b]^N$, обладающих следующими свойствами:

- 1°. $\tilde{P} \sim P$ (т.е. меры P и $\tilde{P}$ взаимно абсолютно непрерывны: $\tilde{P} \ll P$, $P \ll \tilde{P}$);
- 2°. $\int_a^b \rho \tilde{P}(d\rho) = r$; $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$.

Будем предполагать, что $\mathcal{P}(P) \neq \emptyset$.

Отметим следующее обстоятельство: если мера $\tilde{P} \sim P$, то условие “ P -п.н.” может быть заменено на условие “ $\tilde{P}$ -п.н.”.

Положим $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \mathbb{R}^N\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\rho_1)$, $\dots$, $\mathcal{F}_N = \sigma(\rho_1, \dots, \rho_N)$; $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N \subseteq \mathcal{F}$ – поток вложенных σ -алгебр.

Таким образом, свойство 2° имеет место тогда и только тогда, когда $E_{\tilde{P}}\left(\frac{1+\rho_k}{1+r} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = 1$ ($\tilde{P}$ -п.н.); $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, и, значит,

$$E_{\tilde{P}}\left(\frac{S_k}{B_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = E_{\tilde{P}}\left(\frac{S_{k-1}(1+\rho_k)}{B_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \quad (\tilde{P}\text{-п.н.}); \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \leq N.$$

Следовательно, относительно меры $\tilde{P}$ последовательность $\left(\frac{S_k}{B_k}\right)_{k \in \mathbb{N}, k \leq N}$ является мартингалом.

Сделаем два предположения относительно множества мартингалльных мер $\mathcal{P}(P)$.

(A*): существует подпоследовательность мер $\tilde{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, из $\mathcal{P}(P)$, слабо сходящаяся к мере P^* , носитель которой расположен на двух брусках размерности $N - 1$: $\rho_N = a$ и $\rho_N = b$, где $a \leq \rho_k \leq b$, $k = 1, \dots, N - 1$.

Если это предположение выполнено, то тогда из равенств $E_{\tilde{P}_n}\left(\frac{1+\rho_N}{1+r}\right) = 1$ ($\tilde{P}_n$ -п.н.), $n \in \mathbb{N}$, получим $E_{P^*}\left(\frac{1+\rho_N}{1+r}\right) = 1$ (P^* -п.н.). Отсюда находим, что

$$p^* = P^*(\rho_N = b) = \frac{r-a}{b-a}; \quad 1-p^* = P^*(\rho_N = a) = \frac{b-r}{b-a}.$$

(A*): существует подпоследовательность мер $\bar{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, из $\mathcal{P}(P)$, слабо сходящаяся к мере P_* , носитель которой расположен на бруске размерности $N - 1$: $\rho_N = r$, $a \leq \rho_k \leq b$, $k = 1, \dots, N - 1$.

Верхней ценой (ценой продажи опциона активным трейдером, которую могут принять обе стороны) можно считать верхнюю грань тех цен, которые гарантировали бы покупателю выполнение продавцом оговариваемых условий. С другой стороны, эти цены (стоимости, премии) не должны давать продавцу “free lunch”:

$$\mathbb{C}^*(P) = \inf_{\pi=(\beta, \gamma) \in \mathcal{H}^*(P)} (\beta_0 + \gamma_0 S_0);$$

$$\mathcal{H}^*(P) = \{\pi = (\beta, \gamma) : \beta_N(1+r)^N + \gamma_N S_N \geq f(S_N) \text{ (P-п.н.)}\},$$

т.е. стратегия $\pi = (\beta, \gamma)$ является хеджирующей.

Определим понятие нижней цены (цены покупки опциона активным трейдером). Доход $f(S_N)$ от опциона должен быть не меньше величины $\beta_N(1+r)^N + \gamma_N S_N$. Таким образом, цена покупки

$$\mathbb{C}_*(P) = \sup_{\pi=(\beta, \gamma) \in \mathcal{H}_*(P)} (\beta_0 + \gamma_0 S_0);$$

$$\mathcal{H}_*(P) = \{\pi = (\beta, \gamma) : \beta_N(1+r)^N + \gamma_N S_N \leq f(S_N) \text{ (P-п.н.)}\}.$$

Далее, предположим, что стратегия $\pi = (\beta, \gamma)$ обладает свойством самофинансируемости, т.е. $\beta_n(1+r)^n + \gamma_n S_n = \beta_{n-1}(1+r)^n + \gamma_{n-1} S_n \iff (1+r)^n \Delta \beta_n + S_n \Delta \gamma_n = 0$; $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция платежного обязательства $f(S_0(1+\rho_1)(1+\rho_2) \cdots (1+\rho_N))$ является непрерывной и выпуклой вниз по ρ_N , $a \leq \rho_N \leq b$, и выполнено условие слабой компактности (A^*). Тогда верхняя цена

$$\mathbb{C}^*(P) = \sup_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(P)} E_{\tilde{P}} \frac{f(S_N)}{(1+r)^N}$$

$$= p^* \frac{E_{P^*} f(S_{N-1}(1+b))}{(1+r)^N} + (1-p^*) \frac{E_{P^*} f(S_{N-1}(1+a))}{(1+r)^N} \quad (P^* \text{-п.н.}).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция платежного обязательства $f(S_0(1+\rho_1)(1+\rho_2) \cdots (1+\rho_N))$ является непрерывной и выпуклой вниз по ρ_N , $a \leq \rho_N \leq b$, и выполнено условие слабой компактности (A_*). Тогда нижняя цена

$$\mathbb{C}_*(P) = \inf_{\bar{P} \in \mathcal{P}(P)} E_{\bar{P}} \frac{f(S_N)}{(1+r)^N} = \frac{E_{P_*} f(S_{N-1}(1+r))}{(1+r)^N} \quad (P_* \text{-п.н.}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 23–79.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
18.04.1997