Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Голод, Некоммутативные полные пересечения и гомологии комплекса Шафаревича, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm869>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:01:03

НЕКОММУТАТИВНЫЕ ПОЛНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСА ШАФАРЕВИЧА

Е. С. Голод

Аналогом хорошо известного в коммутативной алгебре понятия регулярной последовательности в некоммутативной ситуации служит понятие сильно свободного, или инертного, множества элементов, которое определяется рядом эквивалентных (при некоторых ограничениях) условий [2], из которых наиболее удобно для дальнейшего следующего. Пусть R – ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом k , $x = \{x_\alpha\}$ – семейство элементов из R и $\text{Sh}(x, R)$ – соответствующий комплекс Шафаревича [1], [4]. Семейство $\{x_\alpha\}$ называется сильно свободным, если $H_i(\text{Sh}(x, R)) = 0$ при $i > 0$. Алгебры, представимые как факторалгебры свободной ассоциативной алгебры по идеалу, порожденному сильно свободным множеством, естественно рассматривать как некоммутативные аналоги полных пересечений в коммутативной алгебре. Известная теорема Тейта–Ассмуса [3], [5] характеризует коммутативные (локальные или градуированные) полные пересечения тем свойством, что алгебра гомологий их комплекса Козюля является внешней алгеброй над пространством одномерных гомологий. В настоящей статье анонсируется некоммутативный аналог (обобщенного варианта) этого результата (теорема 1). Теорема 2, не имеющая аналога в коммутативном случае, показывает, что алгебра гомологий комплекса Шафаревича для свободной алгебры обладает весьма специальными (если принять во внимание теорему 1) свойствами.

Пусть (A, ∂) – дифференциальная градуированная (DG) алгебра (с единицей) над коммутативным кольцом k с дифференциалом ∂ степени -1 (градуировка и дифференциал могут быть тривиальными), U – градуированный k -модуль и $\varphi: U \rightarrow A$ – однородный степени -1 k -линейный гомоморфизм, для которого $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\partial)$. Через $S = \text{Sh}(U, \varphi, A)$ будем обозначать k -алгебру, представляющую собой свободное произведение $A * T(U)$ над k алгебры A и тензорной алгебры $T(U)$. Градуировка на A и U естественно определяют градуировку на S , и на градуированной алгебре S имеется однозначно определенный дифференциал d , совпадающий с ∂ на A и с φ на U , который превращает S в DG-алгебру над k . Легко показать, что когда U – проективный k -модуль, структура DG-алгебры на S с точностью до изоморфизма зависит только от индуцированного φ отображения $U \rightarrow H_*(A)$. Конструкция комплекса $\text{Sh}(U, \varphi, A)$ является некоторым обобщением конструкции комплекса Шафаревича и одновременно некоммутативным аналогом конструкции резольвенты Тейта [5].

Если DG-алгебра (A, ∂) имеет тривиальный дифференциал ∂ , то, заменяя градуировку на A тривиальной и наделяя модуль U соответственно градуировкой, сосредоточенной в степени $+1$, мы получим на алгебре S градуировку, задаваемую прямым разложением

$$S = A \oplus A \otimes U \otimes A \oplus A \otimes U \otimes A \otimes U \otimes A \oplus \dots$$

(тензорное произведение над k), которую будем называть U -градуировкой. Модули гомологий комплекса (S, d) относительно U -градуировки будем обозначать через $H_{(p)}(S)$.

Далее мы будем рассматривать только случай, когда U – свободный k -модуль с некоторым базисом $u = \{u_\alpha\}$; тогда $x = \{x_\alpha\}$, где $x_\alpha = \varphi(u_\alpha)$, – семейство однородных циклов из A , заданием которого определяется отображение φ , и вместо $\text{Sh}(U, \varphi, A)$ будем использовать обозначение $\text{Sh}(u \mid x, A)$, уточняющее обозначение $\text{Sh}(x, A)$, применявшееся в [4].

Пусть теперь A – градуированная алгебра над полем k , $x = \{x_\alpha\}$ – некоторое семейство однородных элементов из A , $I = \langle \{x_\alpha\} \rangle$ – порожденный им идеал в A и $y = \{y_\beta\}$ – некоторое семейство однородных элементов из I . Рассмотрим какое-либо представление элементов y_β в виде

$$(1) \quad y_\beta = \sum_i a_{i,\beta} x_{\alpha_i} b_{i,\beta},$$

где $a_{i,\beta}, b_{i,\beta} \in A$ однородные. Пусть J – идеал в A , порожденный семейством y , и $B = A/J$. Канонический образ элемента $a \in A$ в B обозначаем через $\bar{a}$. В DG-алгебре $\text{Sh}(u \mid \bar{x}, B)$ рассмотрим семейство $z = \{z_\beta\}$ однородных циклов $z_\beta = \sum_i (-1)^{\deg a_{i,\beta}} \bar{a}_{i,\beta} u_{\alpha_i} \bar{b}_{i,\beta}$. Легко видеть,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00149).

что класс гомологий цикла z_β не зависит от выбора представления элемента y_β в виде (1). Пусть V – градуированное векторное пространство над k с базисом $v = \{v_\beta\}$, где $\deg v_\beta = \deg y_\beta + 1$. На алгебрах $H_*(\text{Sh}(u | x, A)) * T(V)$ и $H_*(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$ помимо уже имеющихся градуировок рассмотрим “ U -градуировки”, задаваемые разложениями

$$H_*(\text{Sh}(u | x, A)) = \bigoplus_p H_{(p)}(\text{Sh}(u | x, A)), \quad H_*(\text{Sh}(u | \bar{x}, B)) = \bigoplus_p H_{(p)}(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$$

и приписыванием элементам из V степени $+1$. Под степенью элемента будем понимать степень относительно исходных градуировок, а степень относительно U -градуировок будем называть размерностью. Рассмотрим однородный относительно обеих градуировок гомоморфизм k -алгебр $\pi_*: H_*(\text{Sh}(u | x, A)) * T(V) \rightarrow H_*(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$, индуцированный естественным отображением $H_*(\text{Sh}(u | x, A)) \rightarrow H_*(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$ и отображением $T(V) \rightarrow H_*(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$, при котором каждый v_β отображается в класс гомологий цикла z_β .

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим следующие условия:*

- 1) $y = \{y_\beta\}$ – сильно свободное множество в A ;
- 2) отображение π_* – изоморфизм;
- 3) естественное отображение $H_*(\text{Sh}(u | x, A)) \rightarrow H_*(\text{Sh}(t | z, \text{Sh}(u | \bar{x}, B)))$ является изоморфизмом;
- 4) отображение h_* инъективно на пространстве одномерных элементов и сюръективно на пространстве двумерных элементов.

Имеют место импликация: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4). Если элементы x_α имеют положительную степень, то все четыре условия эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $A = k\langle\{x_\alpha\}\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над полем k , свободным порождающим которой приписаны произвольные положительные степени, и B – факторалгебра алгебры A по некоторому однородному идеалу. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) B – некоммутативное полное пересечение;
- 2) $H_*(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$ – тензорная алгебра над пространством одномерных гомологий $H_{(1)}(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$;
- 3) пусть $z = \{z_\beta\}$ – семейство одномерных циклов в $\text{Sh}(u | \bar{x}, B)$, классы гомологий которых h_β образуют базис пространства $H_{(1)}(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))$ и $T = \text{Sh}(t | z, \text{Sh}(u | \bar{x}, B))$; тогда $H_{(p)}(T) = 0$ при $p > 0$;
- 4) $H_{(2)}(\text{Sh}(u | \bar{x}, B)) = H_{(1)}(\text{Sh}(u | \bar{x}, B))^2$.

Эквивалентность условий 2) и 3) из теоремы 1 обобщается следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A – DG-алгебра, $z = \{z_\beta\}$ – семейство однородных циклов положительной степени в A и N – идеал в $H_*(A)$, порожденный классами гомологий h_β циклов z_β . Естественное отображение $H_*(A)/N \rightarrow H_*(\text{Sh}(t | z, A))$ является изоморфизмом в том и только в том случае, когда $\{h_\beta\}$ – сильно свободное множество в $H_*(A)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – свободная ассоциативная алгебра над полем k и $f = \{f_\alpha\}$ – произвольное семейство элементов из A . Тогда $H_*(u | f, A)$ порождается как k -алгебра нульмерными и одномерными элементами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Голод Е. С., Шафаревич И. Р. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 2. С. 261–272. [2] Anick D. // J. Algebra. 1982. V. 78. P. 120–140. [3] Assmus E. F., Jr. // Illinois J. Math. 1959. V. 3. № 2. P. 187–199. [4] Golod E. S. // Lect. Notes in Math. 1988. V. 1352. P. 88–95. [5] Tate J. // Illinois J. Math. 1957. V. 1. № 1. P. 14–27.