Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, О нетривиально разложимых типах, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm870>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:03:51

О НЕТРИВИАЛЬНО РАЗЛОЖИМЫХ ТИПАХ

Ю. Ю. Кочетков

Введение. Пусть T – плоское связное дерево. Изотопически эквивалентные деревья не различаются. Раскрасим вершины T в два цвета: белый и черный – так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Наборы валентностей белых и черных вершин называются бинарной структурой на T . Типом называется конечное множество деревьев с одинаковой бинарной структурой.

Понятия группы вращений (монодромии) T , обобщенного многочлена Чебышёва и орбиты Галуа считаются известными (см. [1], [3], [4]). Комбинаторными характеристиками T называются его группа вращений и картографическая группа. Тип называется разложимым, если он есть объединение нескольких (больше одной) орбит Галуа. Разложимый тип называется тривиально разложимым, если деревья, принадлежащие разным орбитам, комбинаторно различны. В противном случае тип называется нетривиально разложимым.

Примеры нетривиально разложимых типов были построены для деревьев диаметра четыре. Центральная вершина такого дерева – белая, набор черных валентностей определяет тип, а циклический порядок черных вершин при обходе центра против часовой стрелки определяет дерево. В данной работе будет идти речь о деревьях диаметра четыре, центральной валентности пять. Пусть $k \leq l \leq m \leq n \leq p$ – черные валентности. Мы будем обозначать тип $\langle k, l, m, n, p \rangle$, а само дерево – $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$, где $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ – некоторая перестановка k, l, m, n, p (циклический порядок). Если $\gcd(k, l, m, n, p) = 1$, то группа вращений T есть S_t или A_t , где $t = k + l + m + n + p$ – количество ребер T . Аккуратное доказательство этого факта требует некоторых усилий (см. дополнение).

Первый пример нетривиально разложимого типа был построен Адриановым – это тип $\langle 5, 5, 5, 6, 6 \rangle$. Он содержит два дерева $(5, 5, 5, 6, 6)$ и $(5, 5, 6, 5, 6)$ и распадается на две одноэлементные орбиты, т.е. каждое из деревьев типа рационально. Второй пример – это знаменитый цветочек Лейбля [2] – тип $\langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$, который содержит 24 дерева и распадается на две 12-элементные орбиты. Если мы будем начинать обход с 6-валентной вершины, то дерево определяется перестановкой чисел 2, 3, 4, 5. В одну орбиту попадают четные такие перестановки, а в другую нечетные.

Перейдем к изложению полученных результатов. Изучались деревья диаметра 4 и центральной валентности 5 с отличными друг от друга черными валентностями, $k < l < m < n < p$. Обобщенный многочлен Чебышёва такого дерева имеет вид

$$p(w) = (w - x^{-1})^k (w - y^{-1})^l (w - z^{-1})^m (w - u^{-1})^n (w - 1)^p,$$

где $x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, u^{-1}$ и 1 – координаты черных вершин. Тогда $p(w) - (-1)^t x^{-k} y^{-l} z^{-m} u^{-n}$ делится на w^5 , что дает нам систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} kx + ly + mz + nu + p = 0, \\ kx^2 + ly^2 + mz^2 + nu^2 + p = 0, \\ kx^3 + ly^3 + mz^3 + nu^3 + p = 0, \\ kx^4 + ly^4 + mz^4 + nu^4 + p = 0. \end{cases}$$

Исключение трех переменных с помощью базиса Гребнера приводит к многочлену 24-й степени относительно четвертой переменной. Приводимость (неприводимость) этого многочлена эквивалентна разложимости (неразложимости) типа.

Систематическая проверка показала, что разложимых типов достаточно много. Например, следующие типы разложимы (каждый из них распадается на две орбиты Галуа по 12 элементов в каждой):

$$\begin{array}{cccc} \langle 1, 2, 3, 4, 6 \rangle & \langle 1, 2, 3, 7, 8 \rangle & \langle 1, 2, 4, 5, 8 \rangle & \langle 1, 2, 5, 6, 10 \rangle \\ \langle 1, 3, 5, 6, 10 \rangle & \langle 1, 3, 5, 8, 10 \rangle & \langle 1, 7, 8, 9, 10 \rangle & \langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \\ \langle 2, 4, 5, 7, 10 \rangle & \langle 2, 5, 6, 8, 9 \rangle & \langle 3, 4, 6, 7, 8 \rangle & \langle 3, 5, 6, 8, 10 \rangle \end{array}$$

Было найдено простое условие, определяющее разложимость типа. Это условие имеет статус гипотезы. Уверенность автора в ее справедливости основана на большом количестве проделанных вычислений.

ГИПОТЕЗА. Тип $\langle k, l, m, n, p \rangle$ разложим тогда и только тогда, когда $klmnp(k + l + m + n + p)$ есть полный квадрат.

Отметим, что это утверждение не вполне тривиально, т.е. просто “увидеть” этот факт затруднительно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как отмечалось выше, дерево определяется перестановкой чисел k, l, m, n . Деревья (p, i_1, i_2, i_3, i_4) и (p, i_4, i_3, i_2, i_1) комплексно сопряжены (здесь i_1, i_2, i_3, i_4 – некоторая перестановка k, l, m, n). Перестановки i_1, i_2, i_3, i_4 и i_4, i_3, i_2, i_1 имеют одинаковую четность. Но комплексно сопряженные деревья лежат в одной орбите. Этот факт позволяет с уверенностью полагать, что в разложимых типах “четные” деревья образуют одну орбиту, а “нечетные” – другую. Те же рассуждения, примененные к деревьям диаметра 4 с центральной валентностью 4, показывают, что тип $\langle k, l, m, n \rangle$ не может быть разложен на две трехэлементные орбиты, так как перестановки i_1, i_2, i_3 и i_3, i_2, i_1 чисел k, l, m имеют разную четность. Это рассуждение согласуется с тем фактом, что разложимых типов $\langle k, l, m, n \rangle$ при $k < l < m < n$ не найдено. В случае центральной валентности 6 перестановки i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 и i_5, i_4, i_3, i_2, i_1 имеют одинаковую четность. Поэтому здесь можно ожидать появления разложимых 120-элементных типов, распадающихся на две 60-элементные орбиты.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Причина выбора деревьев диаметра 4 в качестве области исследований состоит, в частности, в том, что существует простой алгоритм построения многочленов Чебышёва в этом случае. Поэтому крайне желательно научиться находить многочлены Чебышёва для каких-то других классов деревьев.

ДОПОЛНЕНИЕ. Дадим набросок доказательства утверждения о группе вращений. Напомним, что дерево называется общим, если его группа вращений есть S_t или A_t , где t – количество ребер дерева.

ТЕОРЕМА. Дерево, принадлежащее типу $\langle k, l, m, n, p \rangle$, где $k < l < m < n < p$ и $\gcd(k, l, m, n, p) = 1$, является общим.

Доказательство использует некоторый общий метод, который мы сейчас изложим. Пусть $G \subset S_t$ – транзитивная подгруппа. Сопоставим G 3-граф Γ с t вершинами. Ребро (i, j, k) принадлежит Γ , если 3-цикл $(i, j, k) \in G$.

ЛЕММА 1. Компоненты связности Γ есть полные 3-графы, изоморфные друг другу.

ЛЕММА 2. Если подгруппа G порождена t -циклом $(1, \dots, t)$ и 3-циклом (i, j, k) , $i < j < k$, то G – общая, если $\gcd(j - i, k - j, t - k + i) = 1$, и импримитивная в противном случае.

ЛЕММА 3. Если G содержит t -цикл $(1, \dots, t)$ и два 3-цикла (i, j, k) и (i_1, j_1, k_1) и $\gcd(j - i, k - j, t - k + i, j_1 - i_1, k_1 - j_1, t - k_1 + i_1) = 1$, то G – общая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. G – группа вращений T , порождена t -циклом ab и 5-циклом $a = (1, k + 1, k + l + 1, k + l + m + 1, k + l + m + n + 1)$. Если $g \in G$, то через α_g мы будем обозначать оператор сопряжения с помощью g , т.е. $\alpha_g(h) = g^{-1}hg$.

Тогда $\alpha_{ab}^k(a) = (k + 1, 2k + 1, 2k + l + 1, 2k + l + m + 1, 2k + l + m + n + 1) = c$, $\alpha_c(a) = (1, 2k + 1, k + l + 1, k + l + m + 1, k + l + m + n + 1) = d$, $da^{-1} = (1, k + 1, 2k + 1)$. Аналогично получаем, что G содержит 3-циклы $(1, l + 1, 2l + 1)$, $(1, m + 1, 2m + 1)$, $(1, n + 1, 2n + 1)$, $(1, p + 1, 2p + 1)$. Теперь утверждение теоремы вытекает из леммы 3.

Случай, когда среди черных валентностей есть одинаковые, рассматривается аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zvonkine A., Shabat G. // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 233–275. [2] Schneps L. // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 1994. V. 200. P. 47–78. [3] Кочетков Ю. Ю. // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 203–204. [4] Betrema J., Zvonkin A. Plane trees and their Shabat polynomials. Catalog. Bordeaux: Publication du LaBRI, 1992.