Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Лобо, О. А. Олейник, М. Е. Перес, Т. А. Шапошникова, О граничных задачах в областях, перфорированных вдоль многообразий, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm871>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 10:48:40

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ В ОБЛАСТЯХ, ПЕРФОРИРОВАННЫХ ВДОЛЬ МНОГООБРАЗИЙ

М. Лобо, О. А. Олейник, М. Е. Перес, Т. А. Шапошникова

В работе изучены краевые задачи для уравнения Пуассона в областях, перфорированных вдоль многообразий, с граничными условиями типа Дирихле, Неймана или со смешанными граничными условиями на границе полостей, причем диаметр этих полостей a_ε и их число $N(\varepsilon)$ связаны соотношениями $a_\varepsilon \leq d\varepsilon$, $N(\varepsilon) \leq D\varepsilon^{1-n}$, где d и D – положительные постоянные, n – размерность области, $\varepsilon \geq 0$ – параметр и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, и γ – гладкая гиперповерхность в $\overline{\Omega}$. Пусть P_j ($j = 1, \dots, N(\varepsilon)$) – точки, принадлежащие γ ; $G^j(a_\varepsilon^j)$ – область в Ω диаметра $a_\varepsilon^j \leq d\varepsilon$, содержащая точку P_j . Предположим, что $\overline{G^j(a_\varepsilon^j)} \cap \overline{G^i(a_\varepsilon^i)} = \emptyset$ при $i \neq j$.

Введем обозначения: $G_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} G^j(a_\varepsilon^j)$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}$, $S_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} \partial G^j(a_\varepsilon^j)$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon$.

Предположим, что области $G^j(a_\varepsilon^j)$ таковы, что произвольную функцию $u \in H_1(\Omega_\varepsilon)$ можно продолжить на Ω как функцию $\tilde{u} \in H_1(\Omega)$ и $\|\tilde{u}\|_{H_1(\Omega)} \leq K_1\|u\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}$, $\|\nabla \tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq K_2\|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$, где постоянные K_j здесь и далее не зависят от ε . Такие продолжения для периодического расположения $G^j(a_\varepsilon^j)$ построены в [1], [2].

В области Ω_ε рассмотрим сначала краевую задачу

$$(1) \quad -\Delta u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \beta u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon,$$

где f – заданная в $\overline{\Omega}$ функция.

1. Граничные условия Неймана. Пусть $\beta = 0$ в (1). Определим v_0 как решение задачи

$$(2) \quad -\Delta v_0 = f \quad \text{в } \Omega, \quad v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть u_ε – решение задачи (1), $\beta = 0$, $a_\varepsilon^j \leq d\varepsilon$, v_0 – решение задачи (2). Тогда если $S_\varepsilon \cap \partial\Omega = \emptyset$, то справедлива оценка $\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K_3(\max_j a_\varepsilon^j)^n \varepsilon^{1-n}$, и если $S_\varepsilon \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, то $\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K_4(\max_j a_\varepsilon^j)^{n-1} \varepsilon^{2-n}$.

2. Граничные условия смешанного типа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть u_ε – решение задачи (1), v_0 – решение задачи (2), $\beta(x) \geq \beta_0 = \text{const} > 0$, $\eta \equiv (\max_j a_\varepsilon^j) \varepsilon^{-1} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $|\partial G^j(a_\varepsilon^j)| \leq K_5(a_\varepsilon^j)^{n-1}$, $|G|$ – мера G . Тогда $\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K_6 \eta^{n-1}$.

Предположим, что $\gamma = \Omega \cap \{x : x_1 = 0\}$, $a_\varepsilon^j = a_\varepsilon$, $\beta = \beta_0 = \text{const} > 0$, $Q = \{x : -1/2 < x_j < 1/2, j = 1, \dots, n\}$, $G_\varepsilon = \bigcup_{z \in Z} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon z)$, где G_0 – область, содержащаяся в Q , Z – множество n -мерных векторов с целочисленными координатами,

$$(3) \quad \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\overline{G_\varepsilon} \cap \{x : -\varepsilon/2 < x_1 < \varepsilon/2\}), \quad S_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega, \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть u_ε – решение задачи (1), $\beta = \beta_0 = \text{const} > 0$, v_0 – решение задачи

$$-\Delta v_0 = f \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad [v_0]|_\gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial v_0}{\partial x_1} \right] \Big|_\gamma = \mu v_0|_\gamma, \quad \mu = \beta_0 C_0^{n-1} |\partial G_0|,$$

где $a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \rightarrow C_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $C_0 \neq 0$, $|\partial G_0|$ – площадь границы G_0 , Ω_ε задана соотношением (3), $[\varphi]|_\gamma \equiv \varphi(x_1 + 0, x') - \varphi(x_1 - 0, x')$, $x = (x_1, x') \in \gamma$. Тогда $\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K_7(\varepsilon + |a_\varepsilon \varepsilon^{-1} - C_0|^2)$.

3. Граничные условия Дирихле.

ТЕОРЕМА 4. Пусть u_ε – решение задачи

$$(4) \quad -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon,$$

v_0 – решение задачи (2). Пусть $(\max_j a_\varepsilon^j)^{n-2} \varepsilon^{1-n} \rightarrow 0$ при $n \geq 3$ и $(\varepsilon \max_j |\ln a_\varepsilon^j|)^{-1} \rightarrow 0$ при $n = 2$, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq K_8 \left(\max_j a_\varepsilon^j \right)^{n-2} \varepsilon^{1-n}, \quad \text{если } n \geq 3, \\ \|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq K_9 \left(\varepsilon \max_j |\ln a_\varepsilon^j| \right)^{-1}, \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть Ω_ε задана соотношением (3), $G_0 = \{x : |x| < a\}$, $0 < a < 1/2$, $a_\varepsilon^j = a_\varepsilon$. Пусть $a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{1-n} \rightarrow C_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $n \geq 3$, и $(\varepsilon |\ln a_\varepsilon|)^{-1} \rightarrow C_1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $n = 2$, $C_0 \neq 0$, $C_1 \neq 0$, u_ε – решение задачи (4), v_0 – решение задачи $-\Delta v_0 = f$ в Ω , $[v_0]|_\gamma = 0$, $\left[\frac{\partial v_0}{\partial x_1} \right]_\gamma = \mu_1 v_0|_\gamma$, $v_0 = 0$ на $\partial\Omega$, $\mu_1 = (n-2)a^{n-2}\omega_n C_0$, если $n \geq 3$, и $\mu_1 = 2\pi C_1$, если $n = 2$, $\omega_n = |\{x : |x| = 1\}|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - v_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq K_{10} (\varepsilon + |C_0 - a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{1-n}|^2), \quad \text{если } n \geq 3, \\ \|u_\varepsilon - v_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq K_{11} (\varepsilon + |C_1 - (\varepsilon |\ln a_\varepsilon|)^{-1}|^2), \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть u_ε – решение задачи (4), $v^\pm(x)$ – решение задачи

$$\begin{aligned} -\Delta v^\pm &= f \quad \text{в } \Omega^\pm, \quad v^\pm = 0 \quad \text{на } \partial\Omega^\pm, \quad \Omega^+ = \Omega \cap \{x : x_1 > 0\}, \quad \Omega^- = \Omega \cap \{x : x_1 < 0\}, \\ a_\varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1} &\rightarrow 0 \quad \text{при } n \geq 3 \quad \text{и} \quad \varepsilon |\ln a_\varepsilon| \rightarrow 0 \quad \text{при } n = 2 \quad \text{и} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$ в Ω_ε и $\tilde{u}_\varepsilon = 0$ в $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon - v^\pm\|_{L_2(\Omega^\pm)}^2 &\leq K_{12} \{\varepsilon + a_\varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1}\}, \quad \text{если } n \geq 3, \\ \|\tilde{u}_\varepsilon - v^\pm\|_{L_2(\Omega^\pm)}^2 &\leq K_{13} \{\varepsilon + \varepsilon |\ln a_\varepsilon|\}, \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение Пуассона в теоремах 1–6 можно заменить на любой эллиптический самосопряженный оператор. Некоторые теоремы типа 1–6 рассматривались в [1], [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев, 1974. [2] Oleinik O. A., Shaposhnikova T. A. // Rend. Lincei. Mat. e Appl. Ser. 9. 1996. V. 7. P. 129–146. [3] Олейник О. А., Шапошникова Т. А. // Дифф. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 830–842.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
University of Cantabria, Spain

Принято редколлегией
10.06.1997