Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Лыскова, О некоторых свойствах ортогональных многочленов нескольких переменных, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm872>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:25:03

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. С. ЛЫСКОВА

В работе [1] были определены многочлены нескольких переменных, ортогональные в некоторой области G с плотностью $\rho(x)$. В настоящей работе мы покажем, что производные этих многочленов $u_\alpha(x) = D^\alpha u(x)$ также будут ортогональными многочленами в области G с плотностью $\rho_\alpha(x)$ и выясним связь между $\rho_\alpha(x)$ и $\rho(x)$.

Рассмотрим специальный класс линейных дифференциальных уравнений в частных производных, который назовем основным классом:

$$(1) \quad \begin{aligned} du &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda u = 0, \\ a_{ij}(x) &= \alpha_{ij} x_i x_j + \beta_{ij} x_j + \gamma_{ij} x_i + \delta_{ij}, \quad i \neq j, \\ a_{ii}(x) &= A_i x_i^2 + B_i x_i + C_i, \\ (2) \quad \hat{b}_i(x) &= a_i x_i + b_i, \\ \alpha_{ij} &= \alpha_{ji}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точка n -мерного пространства, λ – спектральный параметр. Матрица $a_{ij}(x)$ – симметрическая.

Решения уравнения (1) обладают замечательным свойством, что производные любого порядка от этих решений также являются решениями уравнения из основного класса. Обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ мультииндекс порядка $l = |\alpha|$ и пусть $u^\alpha = D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если $u = u(x)$ – решение уравнения (1), то $u_\alpha(x)$ – решение уравнения (α) из основного класса следующего вида:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \mu_\alpha u_\alpha = 0, \\ (3) \quad & \hat{b}_i^\alpha = \hat{b}_i + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + \alpha_i \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i}, \\ (4) \quad & \mu_\alpha = \lambda + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{2} \cdot \frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial x_i^2} + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Умножим уравнения (1) и (α) на такие функции $\rho(x)$ и $\rho_\alpha(x)$, чтобы записать эти уравнения в самосопряженном виде:

$$(5) \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \lambda \rho u = 0,$$

$$(6) \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_\alpha a_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) + \mu_\alpha \rho_\alpha u = 0.$$

Тогда функции $\rho(x)$ и $\rho_\alpha(x)$ должны удовлетворять следующим системам дифференциальных уравнений (системам Пирсона):

$$(7) \quad \rho \hat{b}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(8) \quad \rho_\alpha b_i^\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_\alpha a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы весовые функции $\rho(x)$ и $\rho_\alpha(x)$ были решениями систем (7) и (8) в односвязной области G , необходимо и достаточно выполнения следующих условий совместности:

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Delta x_j}{\Delta} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta} \right),$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Delta x_j^\alpha}{\Delta} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\Delta x_i^\alpha}{\Delta} \right),$$

где $\Delta = \det(a_{ij})$; определитель Δ_{x_i} получается из определителя Δ заменой i -столбца на столбец $(b_j, j = 1, 2, \dots, n)$.

Доказательство теоремы 2 несложно вытекает из того факта, что $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$. Так что условия совместности (9) и (10) есть условия равенства вторых смешанных производных.

Из соотношений (3) нетрудно установить связь между ρ_α и ρ .

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия совместности (9) и (10), то плотности ρ_α и ρ связаны соотношением

$$(11) \quad \rho_\alpha = \rho \exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k p_k \right),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и функции p_k определяются как решения соответствующих систем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial x_i} a_{li} = 2 \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k}, \quad k \neq l,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial x_i} a_{ki} = \frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лыскова А. С. // ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 6. С. 1301–1306. [2] Суетин П. К. Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988. [3] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Принято редколлегией
23.07.1997