Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Пришляк, О вложенных в поверхность графах, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm874>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:00:02

О ВЛОЖЕННЫХ В ПОВЕРХНОСТЬ ГРАФАХ

А. О. Пришляк

Пусть G – ориентированный граф, вложенный в поверхность Φ , а G' в Φ' . В настоящей работе решается задача о том, когда существует гомеоморфизм между поверхностями, сужение которого на графы есть изоморфизм графов. Вопрос о существовании такого гомеоморфизма равносильно вопросу о возможности продолжения изоморфизма графов до гомеоморфизма поверхностей. Эта задача возникает при топологической классификации векторных полей Морса–Смейла на 2- и 3-мерных многообразиях [1], [2]. Описание подхода к решению этой задачи, основанного на выписывании циклического порядка ребер в каждой вершине графа, и связанные с ним проблемы см. в [3]. Наш подход основан на задании циклического порядка ребер в границах областей, на которые граф разбивает поверхность.

1. Пусть G и G' – ориентированные графы, $g: G \rightarrow G'$ – изоморфизм графов, который переводит вершины A_i графа G в вершины A'_i , а ребра B_j в B'_j . Разрезая поверхность F по графу G , получим поверхности F_i с краями. Каждая окружность, входящая в край поверхности F_i , разбивается на дуги, которые соответствуют ребрам графа G . При этом дуги ориентированы так же, как и соответствующие ребра графа; каждой дуге припишем ту же букву, что и у соответствующего ребра графа.

На каждой поверхности F_i зададим ориентацию (согласованную с ориентацией F , если поверхность F ориентированна, и произвольным образом в противном случае). Для каждой окружности из границы поверхности, обходя ее по ориентации, согласованной с ориентацией поверхности F_i , выпишем слово, состоящее из букв $B_j^{\pm 1}$, в соответствии со встречающимися ребрами. Буква имеет степень $+1$, если ориентация соответствующей ей дуги совпадает с этой ориентацией окружности, и -1 в противном случае. Два слова называются эквивалентными, если одно из другого можно получить циклической перестановкой букв. Это соответствует другому выбору начала обхода окружности. Слова называются обратными, если одно из другого получается в результате выписывания букв в обратном порядке и с обращением степеней и, возможно, циклической перестановки. Это соответствует обходу окружности против ориентации.

Для каждой поверхности F_i составим список, который состоит из: 1) числа n_i , равного роду поверхности F_i , если поверхность ориентированна, и $-n_i$ в противном случае; 2) слов, выписанных при обходе границы поверхности вдоль ориентации. Два таких списка назовем эквивалентными, если у них совпадают числа n_i и между словами можно установить биекцию так, что соответствующие слова эквивалентны или обратны.

Таким образом, для поверхности Φ и графа G мы построили набор списков слов (НСС) так, что каждый список соответствует одной поверхности F_i . Два таких набора назовем эквивалентными, если существует биективное соответствие между списками такое, что соответствующие списки эквивалентны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – ориентированный граф, вложенный в поверхность Φ , а G' в Φ' , $g: G \rightarrow G'$ – изоморфизм графов, который переводит вершины A_i графа G в вершины A'_i , а ребра B_j в B'_j . Тогда изоморфизм графов продолжается до гомеоморфизма поверхностей тогда и только тогда, когда при замене B_j на B'_j в наборе списков для пары (Φ, G) получится набор, эквивалентный набору списков пары (Φ', G') . При этом гомеоморфизм сохраняет ориентацию, если все соответствующие слова эквивалентны.

Необходимость условий теоремы следует из построения. Достаточность следует из того, что эквивалентность списков позволяет построить гомеоморфизмы между поверхностями F_i и F'_i , ограничение которых на краях совпадает с изоморфизмом между графами.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Граф вместе с набором списков слов (НСС), у которых буквы соответствуют ребрам графа, назовем НСС-графом. Два НСС-графа назовем изоморфными, если существует изоморфизм графов такой, что при замене букв второго НСС соответствующими им при изоморфизме буквами из первого НСС получится НСС, эквивалентный первому НСС.

Исследуем вопрос, когда НСС-граф задает поверхность. Пусть K – комплекс, полученный в результате приклейки к графу поверхностей, соответствующих спискам. Так как каждый список слов задает поверхность с краем, то структура поверхности (локальная гомеоморфность плоскости) комплекса K может быть нарушена лишь в местах склейки, т.е. на ребрах и в вершинах графа.

1) Условие того, что комплекс K – локально плоский во внутренних точках ребер, равносильно тому, что к каждому ребру приклеивается по две части краев поверхностей. Это означает, что каждая буква или ей обратная во всем НСС встречается ровно два раза.

2) Пусть первое условие выполнено. Для каждой вершины рассмотрим множество ребер, инцидентных с ней. Два ребра назовем соседними, если они входят в край одной из приклеивающихся поверхностей. Это условие равносильно тому, что существует слово, в котором буквы, соответствующие ребрам, или им обратные (в зависимости от ориентации ребер и поверхностей) стоят рядом или являются первой и последней буквами слова. Два ребра назовем эквивалентными, если существует цепочка соседних ребер, их соединяющая. Тогда условие того, что комплекс K локально плоский в вершинах графа, равносильно тому, что для каждой вершины все инцидентные с ней ребра эквивалентны. Если это условие не выполнено, то окрестность такой вершины гомеоморфна букету плоскостей, в котором число плоскостей букета равно числу классов эквивалентности.

3. Рассмотрим вопрос о том, когда вложенный граф разбивает поверхность на области, гомеоморфные открытым дискам, т.е. является 1-остовом соответствующего клеточного разбиения. Так как поверхность связна и замкнута, то и ее 1-остов связан. Рассмотрим циклы графа, которые проходят через фиксированную точку и в которых каждое ребро проходится не более чем два раза. Назовем их α -циклами. Гомотопические классы таких циклов порождают фундаментальную группу поверхности. Таким образом, выполнены необходимые условия теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Вложенный в поверхность F граф будет 1-остовом клеточного разбиения поверхности тогда и только тогда, когда он связан и гомотопические классы α -циклов этого графа порождают $\pi_1(F)$.*

Докажем достаточность. От противного, пусть какая-нибудь область, на которую граф разбивает поверхность, имеет две компоненты края. Тогда в силу связности графа для двух вершин из разных компонент границы этой области существует путь в графе, который их соединяет. Соединив вершины вторым путем в области, получим замкнутую кривую, гомотопический класс которой не может быть выражен через непересекающиеся циклы графа. Далее, если область имеет одну компоненту края и не гомеоморфна диску, то в ней найдется цикл, не выражающийся через цикла графа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Клеточное разбиение из теоремы 2 будет комбинаторным [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Peixoto M. // Dynamical Systems / ed. by M. Peixoto. London–New York: Academic Press, 1973. P. 389–419. [2] Prishlyak A. O. // International Conference on Contemporary Problems in Theory of Dynamical Systems. Nizhny Novgorod, 1996. P. 45. [3] Stahl S. The embeddings of a Graph. A survey // J. Graph Theory. 1978. V. 2. № 2. P. 275–298. [4] Reidemeister K. Einführung in die kombinatorische topologie. Wiesbaden: Vieweg, 1932.