Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Сысоев, Единственность восстановления суммируемой в полосе функции по ее интегралам по окружностям с центрами на фиксированной прямой, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 213–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:21:00

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СУММИРУЕМОЙ
В ПОЛОСЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ИНТЕГРАЛАМ ПО
ОКРУЖНОСТЯМ С ЦЕНТРАМИ НА ФИКСИРОВАННОЙ ПРЯМОЙ**

С. Е. СЫСОВЕВ

В полосе $\Omega = \{(\xi, \eta) : \xi \in \mathbb{R}, 0 < \eta < h\}$ рассмотрим семейство дуг окружностей $\gamma(x, y)$: $\eta = \sqrt{(y+c)^2 - (\xi-x)^2} - c$, $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, с концами ξ_1, ξ_2 на прямой $\eta = 0$ ($c = \text{const} > 0$). Для непрерывной финитной функции $u \in C_0(\Omega)$ положим $(Pu)(x, y) = \int_{\gamma(x, y)} u(\xi, \eta) ds = g(x, y)$, где ds – евклидов элемент длины кривой γ . Требуется по функции Pu , заданной в Ω , восстановить функцию u . В [1] приведено доказательство единственности решения уравнения $Pu = g$ в классе непрерывных функций с носителем в верхней полуплоскости. По непрерывности распространим оператор P на пространство $L_1(\Omega)$ суммируемых в полосе Ω функций. Следуя методу, изложенному в [2], докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Решение уравнения $Pu = g$ единственно в $L_1(\Omega)$.*

Рассмотрим семейство дуг гипербол $\gamma^*(\xi, \eta)$: $y = \sqrt{(\eta+c)^2 + (\xi-x)^2} - c$, $x \in (x_1, x_2)$, где x_1, x_2 – точки пересечения гиперболы $(y+c)^2 - (x-\xi)^2 = (\eta+c)^2$ в плоскости (x, y) с прямой $y = h$. Для $v \in C_0(\Omega)$ положим $(P^*v)(\xi, \eta) = \int_{x_1}^{x_2} v(x, \sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta+c)^2} - c) dx$; тогда для любых $u, v \in C_0(\Omega)$ имеет место $\langle Pu, v \rangle = \langle u, P^*v \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. По непрерывности эта формула распространяется на $u \in L_1(\Omega)$, $v \in C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Рассмотрим отображения $\varphi_j: \Omega \rightarrow \Omega_j$, $j = 1, 2$, задаваемые формулами $\varphi_j(\xi, \eta) = (x_j(\xi, \eta), t_j(\xi, \eta))$, где $\Omega_1 = \mathbb{R} \times (-1, 0)$, $\Omega_2 = \mathbb{R} \times (0, 1)$, $x_j(\xi, \eta) = \xi + (-1)^j \sqrt{(h+c)^2 - (\eta+c)^2}$, $t_j(\xi, \eta) = (-1)^j \frac{\sqrt{(h+c)^2 - (\eta+c)^2}}{h+c}$. Отображение φ_j сопоставляет вершине (ξ, η) дуги гиперболы $\gamma^*(\xi, \eta)$ один из ее концов x_j и тангенс угла наклона γ^* в этой точке. Пусть $w(x, y, t)$ – решение задачи Коши

$$(1) \quad Lw \equiv t \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta+c)^2}{(y+c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} = v(x, y), \quad w(x, h, t) = f(x, t).$$

Вдоль кривой $\gamma^*(\xi, \eta)$ $(Lw)(x, y(x), y'(x)) = \frac{d}{dx} w(x, y(x), y'(x))$, поэтому $(P^*v)(\xi, \eta) = w(x_2, y(x_2), y'(x_2)) - w(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = f(x_2(\xi, \eta), t_2(\xi, \eta)) - f(x_1(\xi, \eta), t_1(\xi, \eta))$, где $Qf(\xi, \eta) = f(\varphi_2(\xi, \eta)) - f(\varphi_1(\xi, \eta))$. Значит, $\langle Pu, v \rangle = \langle u, Qf \rangle$, где v связана с f посредством (1). Найдем сопряженный оператор Q^* . Пусть $u \in C_0(\Omega)$, χ_j – характеристическая функция множества Ω_j ; тогда

$$\begin{aligned} \langle u, Qf \rangle_{L_2(\Omega)} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_{\Omega} u(\xi, \eta) f(\varphi_j(\xi, \eta)) d\xi d\eta \\ &= (h+c) \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \chi_j(x, t) u(\varphi_j^{-1}(x, t)) f(x, t) \frac{|t|}{\sqrt{1-t^2}} dx dt = \langle Q^*u, f \rangle_{L_2(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \end{aligned}$$

где

$$(2) \quad Q^*u(x, t) = (h+c) \sum_{j=1}^2 (-1)^j \chi_j(x, t) u(\varphi_j^{-1}(x, t)) \frac{|t|}{\sqrt{1-t^2}},$$

причем $\|Q^*u\|_{L_1(\Omega_1 \cup \Omega_2)} = 2\|u\|_{L_1(\Omega)}$, следовательно, $Q^*/2$ – изометрический оператор, действующий из $L_1(\Omega)$ в $L_1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Следовательно, верна

ЛЕММА. *Для любых $u \in L_1(\Omega)$, $f \in C(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$ справедливо равенство $\langle Pu, v \rangle = \langle Q^*u, f \rangle$, где функция $v \in C(\overline{\Omega})$ связана с f соотношениями (1), а оператор Q^* определен формулой (2). При этом $\|Q^*u\|_1 = 2\|u\|_1$, где $\|\cdot\|_1$ – норма в $L_1(\Omega)$.*

Полагая в (1) $t = 0$, получим $v(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, 0) + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0)$, следовательно,

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t) = -D \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right)(x, y, t), \text{ где}$$

$$D \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right)(x, y, t) := \frac{1}{t} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right)(x, y, t) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right)(x, y, 0) \right).$$

Интегрируя $\frac{\partial w}{\partial y}$ по y от y до h , получим

$$w(x, h, t) - w(x, y, t) = f(x, t) - w(x, y, t) = - \int_y^h D \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right)(x, y, t) dy = -Vw,$$

т.е. $w = Vw + f$. Функцию $f(x, t)$ можно считать заданной в полосе $\mathbb{R} \times (-1, 1)$. Обозначим $E_s = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} x| < \varepsilon(1 + s), |t| < 1 + \varepsilon(1 + s)\}$, где $s \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное. В качестве банахова пространства X_s возьмем пространство функций $f(x, t)$, аналитических в области E_s и ограниченных в ее замыкании. Положим $\|f\|_s = \sup_{E_s} |f(x, t)|$. При $s' < s$ $X_s \subseteq X_{s'}$, $\|f\|_{s'} \leq \|f\|_s$ для всех $f \in X_s$. Таким образом, линейное пространство $\Xi = \bigcup X_s, s \in [0, 1]$, — шкала банаховых пространств. По банахову пространству $C[0, h]$ и шкале Ξ естественным образом строится шкала

$$C([0, h]; \Xi) = \bigcup_{s \in [0, 1]} C([0, h]; X_s), \quad \|w\|_{C([0, h]; X_s)} = \sup_{y \in [0, h]} \|w(\cdot, y, \cdot)\|_s,$$

где $C([0, h]; X_s)$ — банахово пространство функций $w: [0, h] \rightarrow X_s$, непрерывных на $[0, h]$. Для $s' < s$ справедлива оценка

$$\left\| D \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right\|_{s'} \leq \frac{2}{\varepsilon(s - s')} \left(1 + \frac{(h + c)^2}{c^3} \right) \|w\|_s,$$

следовательно, $\|Vw\|_{s'} \leq \frac{c_1}{s - s'} \int_y^h \|w(\cdot, y, \cdot)\|_s dy$, где $c_1 = \frac{2}{\varepsilon} \left(1 + \frac{(h + c)^2}{c^3} \right)$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A: C[0, h] \rightarrow C[0, h]$, действующий по формуле $(A\varphi)(y) = c_1 \int_y^h \varphi(\eta) d\eta$, $\varphi \in C[0, h]$. У целой функции $f_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, порядок $\rho = 1$, тип $\sigma = c_1 h$, поэтому если $\varepsilon c_1 h < 1$, то при $f \in X_1$ существует решение $w \in C([0, h]; X_0)$ уравнения $w = Vw + f$ [2, теорема 1.1 для шкалы $C([0, h]; X_s)$, с. 79]. Пропедевывая выкладки, приведшие к этому уравнению, в обратном порядке и полагая $v(x, y) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\eta + c)^2}{(y + c)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right)(x, y, 0)$, приходим к (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Выбирая $\varepsilon > 0$ и уменьшая, если нужно, h , добьемся выполнения неравенства $\varepsilon c_1 h < 1$. Тогда для $f \in X_1$ существует $v \in C(\overline{\Omega})$ такая, что $\langle Pu, v \rangle = \langle Q^*u, f \rangle$. При $Pu = 0$ получаем $\langle Q^*u, f \rangle = 0$ для всех $f \in X_1$, следовательно, $Q^*u = 0$ в силу плотности аналитических функций в пространстве $C(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$. По лемме $\|Q^*u\|_1 = 2\|u\|_1$, следовательно, $u = 0$ почти всюду в полосе $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq h\}$. Повторяя эти рассуждения для $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$ и т. д., получаем теорему единственности для любого конечного h .

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В. П. Паламову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. [2] Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, 1988.

Ульяновский государственный университет
E-mail: sysoev@mmf.univ.simbirsk.su

Принято редколлегией
18.04.1997