Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Полудистрибутивные наследственные кольца, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm876>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:40:31

ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫЕ НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль M называется *дистрибутивным* (*цепным*), если решетка $\text{Lat}(M)$ всех его подмодулей дистрибутивна (является цепью). Прямая сумма дистрибутивных (цепных) модулей называется *полудистрибутивным* (*полуцепным*) модулем. Слова типа “полудистрибутивное кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – наследственное справа полусовершенное полупервичное кольцо. Равносильны условия:

- (1) A – нётерово справа кольцо;
- (2) A – полуцепное справа кольцо;
- (3) A – полудистрибутивное справа кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В связи с теоремой 1 заметим, что в ней нельзя отбросить условие полупервичности. Действительно, пусть A – подалгебра алгебры всех верхнетреугольных матриц третьего порядка над полем F , у которой F -базисом служат матричные единицы $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{33}\}$. По замечанию 5 работы [1] A – наследственное артиново полудистрибутивное кольцо, не являющееся полуцепным справа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пример кольца A тех рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на 2 и 3, показывает, что в теореме 1 условие полусовершенности нельзя заменить на условие полулокальности. В данном случае A – нётерова дистрибутивная полулокальная область, не являющаяся полуцепным кольцом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если A – кольцо не дискретного нормирования в поле, то можно проверить, что кольцо A дает пример того, что в теореме 1 условие наследственности нельзя заменить на условие полунаследственности. В данном случае A – цепная (в частности, полусовершенная и дистрибутивная) область, не являющаяся нётеровой.

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд лемм. Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Подмодуль фактормодуля называется *подфактором*. Модуль M называется *счетно-дистрибутивным*, если M удовлетворяет следующим двум эквивалентным условиям: (1) никакой подфактор модуля M не содержит бесконечных прямых сумм изоморфных простых модулей; (2) никакой подфактор модуля M не содержит бесконечных прямых сумм изоморфных ненулевых модулей. Любой дистрибутивный модуль M не имеет подфакторов, являющихся прямыми суммами двух изоморфных ненулевых модулей, и, следовательно, M – счетно-дистрибутивный модуль. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Прямая сумма равномерных модулей называется *полуравномерным* модулем. Модуль называется *риккартовым*, если все его циклические подмодули проективны. Через $J(M)$ обозначается радикал Джекобсона модуля M . Циклический модуль M называется *локальным*, если M имеет ровно один максимальный подмодуль (т.е. если $M/J(M)$ – цепной модуль).

ЛЕММА 1. Пусть M – правый модуль над полулокальным кольцом A , причем M является конечной прямой суммой счетно-дистрибутивных модулей. Тогда:

- (1) все подфакторы модуля M конечномерны;
- (2) если M – полуартинов модуль, то M – артинов модуль;
- (3) если A – совершенное слева кольцо, то M – артинов модуль;
- (4) если A – совершенное справа кольцо, то M – нётеров модуль;
- (5) если A – совершенное кольцо, то M – модуль, обладающий композиционным рядом.

Лемма 1 следует из леммы 15 и замечаний 1, 3 и 4 работы [2].

ЛЕММА 2. Пусть A – полулокальное кольцо, являющееся (конечной) прямой суммой счетно-дистрибутивных правых идеалов. Тогда:

- (1) A – конечномерное справа кольцо;
- (2) если A – наследственное справа кольцо, то A – нётерово справа кольцо;
- (3) если A – совершенное слева или справа кольцо, то A – артиново справа кольцо.

(1) следует из леммы 1(1); (2) следует из (1) и того, что наследственное справа конечномерное справа кольцо является нётеровым справа [3, 5.20]. Докажем (2). Если A совершенно слева, то по лемме 1(3) A – артиново справа кольцо. Пусть A совершенно справа. По лемме 1(4) A – нётерово справа кольцо и, кроме того, радикал $J(A)$ совершенного справа кольца A является нильидеалом. Поэтому A – полупримальное нётерово справа кольцо. Тогда A – артиново справа кольцо.

ЛЕММА 3. Пусть A – полусовершенное кольцо, у которого все 2-порожденные правые идеалы проективны как правые A -модули.

Тогда A – полуравномерное справа кольцо $\iff A$ – полуцепное справа кольцо.

Надо доказывать только импликацию $\implies$. Пусть M – равномерное прямое слагаемое модуля A_A . Достаточно доказать, что M_A – цепной модуль. Допустим противное. Тогда существуют не сравнимые по включению циклические подмодули F и G модуля M . Тогда $F + G$ – 2-порожденный модуль, не являющийся локальным. Так как $F + G$ – неразложимый конечнопорожденный проективный модуль над полусовершенным кольцом A , то $F + G$ – локальный модуль (см. [4, 22.23]). Получено противоречие.

ЛЕММА 4. Любое риккартово справа конечномерное справа полупервичное кольцо A является полуравномерным справа.

Риккартово справа кольцо A является несингулярным справа. Конечномерное справа кольцо A имеет существенный правый идеал M , который является конечной прямой суммой равномерных правых идеалов $M_1, \dots, M_n$. Так как A – несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо, то A является правым порядком в полупростом артиновом кольце [5, 9.13]. Поэтому существенный правый идеал M кольца содержит некоторый регулярный элемент a . Так как A – риккартово справа конечномерное справа кольцо и $aA \subseteq M$, то проективный модуль aA изоморфен прямой сумме некоторых подмодулей из M_i , причем $aA \cong A_A$. Поэтому A – полуравномерное справа кольцо.

ЛЕММА 5. Любое полунаследственное справа конечномерное справа полусовершенное полупервичное кольцо A является полуцепным справа кольцом.

Лемма 5 следует из лемм 3 и 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Импликация (1) $\implies$ (2) следует из леммы 5. Импликация (2) $\implies$ (3) очевидна. Импликация (3) $\implies$ (1) следует из леммы 2(2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Туганбаев А. А. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 137–156. [2] Туганбаев А. А. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 736–761. [3] Goodearl K. R. Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules. New York: Marcel Dekker, 1976. [4] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979. [5] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.