Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Феликсон, О сигнатурах Терстона, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm877>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:15:35

О СИГНАТУРАХ ТЕРСТОНА

А. А. ФЕЛИКСОН

В препринте [4] В. Терстон рассмотрел пространство $E(a_1, \dots, a_n)$ таких евклидовых метрик на сфере S^2 , у которых особенности являются коническими точками с заданными кривизнами $2\pi a_i$, $0 < a_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $n > 3$. Числа a_i назовем *сигнатурой евклидовой метрики с особенностями*.

Хорошо известно, что $\sum a_i = 2$. Нормируя метрики с данной сигнатурой условием равенства единице площади сферы, В. Терстон сформулировал условия на сигнатуру, при которых пространство $E(a_1, \dots, a_n)$ оказывается комплексным гиперболическим орбифолдом конечного объема, т.е. фактор-пространством B^{n-3}/Γ комплексного шара B^{n-3} по дискретной решетке его автоморфизмов. Эти условия таковы:

- (1) $a_i \in \mathbb{Q}$, $0 < a_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $(a_i = p_i/q_i, p_i < q_i \in \mathbb{N})$;
- (2) $\sum_{i=1}^n a_i = 2$;
- (3) $a_i + a_j < 1$, $a_i \neq a_j \Rightarrow \frac{1}{1-a_i-a_j} \in \mathbb{Z}$ (т.е. $a_i + a_j = 1 - \frac{1}{k_{ij}}$, $k_{ij} \in \mathbb{Z}$);
- (4) $a_i + a_j < 1$, $a_i = a_j$, $i \neq j \Rightarrow \frac{1}{1-a_i-a_j} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (т.е. $a_i + a_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{k_{ij}}$, $k_{ij} \in \mathbb{Z}$).

Возникает естественная задача нахождения всех таких сигнатур. Для $n = 4$ существует бесконечное число сигнатур Терстона (см. [2], [4]). Для $n \geq 5$ список таких сигнатур конечен. Он впервые появился у Мостова в [3], но был неполон. Потом он был уточнен Терстоном, сделавшим полный компьютерный перебор для наборов a_i , в которых наименьший общий знаменатель не превосходит 256. Но не было доказано, что нет таких сигнатур с общим знаменателем, большим 256. Основной результат данной работы – доказательство их отсутствия, основанное на элементарных теоретико-числовых соображениях.

Автор пользуется случаем выразить благодарность О. В. Шварцману.

Обозначения. Перепишем условие (2), сгруппировав равные слагаемые и расставив их по возрастанию:

$$l_1 a_1 + \dots + l_r a_r + a_{r+1} + \dots + a_{r+s} = 2,$$

где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$; $l_i > 1$, $l_i \in \mathbb{N}$; $a_1 < a_2 < \dots < a_r$; $a_{r+1} < \dots < a_{r+s}$.

Все буквы, кроме a_i , в дальнейшем означают натуральные числа.

Ограниченность числа слагаемых.

ЛЕММА 1. Пусть $a_1 < a_2 < a_3$ и набор a_i является решением задачи. Тогда либо $a_1 + a_2 + a_3 > 1$, либо $(a_1, a_2, a_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ и $q_i \leq 6$ (а значит, $n \leq 12$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a_1, a_2, a_3 – наименьшие различные числа в наборе. Пусть $a_1 + a_2 + a_3 \leq 1$. Тогда $a_i + a_j < 1$ (при $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$) $\Rightarrow a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{k_1}$, $a_1 + a_3 = 1 - \frac{1}{k_2}$, $a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{k_3}$.

Так как $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3$, то $k_1 < k_2 < k_3$.

Так как $(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_1) \leq 2$, то $3 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} \leq 2$, т.е. $1 \leq \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$.

Так как $k_1 < k_2 < k_3$, то тройка (k_1, k_2, k_3) имеет одно из следующих значений: а) $(2, 3, 4)$, б) $(2, 3, 5)$, в) $(2, 3, 6)$.

Выражая (a_1, a_2, a_3) через (k_1, k_2, k_3) , получаем

в случае а) $(\frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{11}{24})$, в случае б) $(\frac{11}{60}, \frac{19}{60}, \frac{29}{60})$, в случае в) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

В случаях а) и б) по условию (4) $l_1 = 1$ и $l_2 = 1$. Значит, $a_5 \geq a_4 \geq a_3$. В случае а) $a_5 < 2 - (a_1 + a_2 + 2a_3) = \frac{14}{24} < a_3$ – противоречие.

В случае б) проверкой условий (1)–(4) убеждаемся, что $a_4 \neq a_3$. Но тогда $a_1 + a_2 + a_4 > 1$ (поскольку иначе $a_1 + a_4 = \frac{2}{3} = a_1 + a_3$), т.е. $a_3 + a_5 = 1 - \frac{1}{m}$, $a_2 + a_5 = 1 - \frac{1}{k}$, $a_1 + a_5 = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow a_5 = \frac{31}{60} - \frac{1}{m} = \frac{41}{60} - \frac{1}{k} = \frac{49}{60} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{1}{p} - \frac{1}{k}, \frac{1}{6} = \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \Rightarrow k \leq 6 \Rightarrow k = 5$ (иначе не удовлетворится уравнение $\frac{2}{15} = \frac{1}{p} - \frac{1}{k} \Rightarrow a_5 = \frac{29}{60} = a_3$ – противоречие).

В случае в) надо только показать, что $r + s \leq 4$ (тогда $a_4 = 2 - \sum_{i=1}^3 l_i a_i$ и $q_4 \leq 6$). Действительно, если $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, то $a_4 + a_5 > 1$ и $\sum a_i > 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем можно считать, что $a_1 < a_2 < a_3 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 > 1$.

ЛЕММА 2. $r \leq 2$, $\sum_{i=1}^r l_i \leq 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \geq 3$. Тогда (2) $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \leq 1$, что невозможно по лемме 1 (с учетом замечания). Значит, $r < 3$.

Так как при $i \leq r$ либо $a_i \geq \frac{1}{2}$, либо $a_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, то $\sum_{i=1}^r l_i \leq 12$.

ЛЕММА 3. $r + s < 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r + s \geq 6$. По лемме 1 $a_1 + a_2 + a_3 > 1$ и $a_4 + a_5 + a_6 > 1$, что противоречит тому, что $\sum_{i=1}^n a_i = 2$.

Ограниченность знаменателей.

Для каждого из возможных значений $r + s$ надо показать, что $q_i < 200$. Метод доказательства продемонстрируем на наиболее простом случае $-r + s = 5$.

ЛЕММА 4 (вспомогательная). Пусть $\frac{1}{2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ или $\frac{1}{3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$.

- 1) Пусть $\frac{1}{2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$. Тогда с точностью до перестановки тройка (k, l, m) принимает одно из следующих значений: $(6, 6, 6)$, $(5, 5, 10)$, $(4, 8, 8)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 5, 20)$, $(3, 12, 12)$, $(3, 10, 15)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 7, 42)$.
- 2) Пусть $\frac{1}{3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ и $k < l < m$. Тогда тройка (k, l, m) принимает одно из следующих значений: $(6, 10, 15)$, $(6, 9, 18)$, $(6, 8, 24)$, $(6, 7, 42)$, $(5, 12, 20)$, $(5, 10, 30)$, $(5, 9, 45)$, $(5, 8, 120)$, $(4, 21, 28)$, $(4, 20, 30)$, $(4, 18, 36)$, $(4, 16, 48)$, $(4, 16, 60)$, $(4, 14, 84)$, $(4, 13, 156)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение леммы. Пусть $k \leq l \leq m$. Тогда $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{3}$.

При каждом допустимом значении k имеем $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{l} \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{k})$. Проверяя для всех допустимых пар (k, l) (их конечное число) условие $\frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} = \frac{1}{m}$, находим все решения.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

ЛЕММА 5. Пусть $r + s = 5$. Тогда $q_i \leq 84$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Пусть $r > 0$. Тогда по лемме 1 $a_1 + a_2 + a_3 > 1$ и $a_1 + a_4 + a_5 > 1$, что противоречит тому, что $\sum_{i=1}^n a_i = 2$. Значит, $r = 0$.

Так как сумма любых трех различных слагаемых больше единицы, то сумма двух оставшихся — меньше единицы. Пусть $a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{k}$, $a_3 + a_4 = 1 - \frac{1}{m}$, $a_3 + a_5 = 1 - \frac{1}{u}$, $a_4 + a_5 = 1 - \frac{1}{t}$, $a_1 + a_3 = 1 - \frac{1}{w}$, $a_2 + a_4 = 1 - \frac{1}{p}$, $a_2 + a_5 = 1 - \frac{1}{p}$, $a_4 + a_5 = 1 - \frac{1}{t}$. Тогда $\frac{1}{k} > \frac{1}{m} > \frac{1}{u} > \frac{1}{t}$ и $\frac{1}{k} > \frac{1}{w} > \frac{1}{t} > \frac{1}{p} > \frac{1}{t}$.

Так как $4 = 2(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_3 + a_5) + (a_4 + a_5)$, то $1 = \frac{2}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{u} + \frac{1}{t}$. Так как $\frac{1}{k}$ — наибольшее из строго убывающих слагаемых, то $\frac{1}{k} > \frac{1}{5}$, т.е. $k = 3$ или $k = 4$.

Аналогично, при разбиении $4 = 2(a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) + (a_2 + a_5) + (a_4 + a_5)$ получаем, что $w = 3$ или $w = 4$. Так как $k < w$, то $k = 3$, $w = 4$ и $\frac{1}{2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{t}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{m} + \frac{1}{u} + \frac{1}{t}$.

Пользуясь леммой 4 и тем, что наименьшее слагаемое в двух последних уравнениях равно $\frac{1}{t}$, получаем, что общий знаменатель чисел $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{u}$ не превосходит 42. Выражая a_3 , a_4 , a_5 и a_2 , a_4 , a_5 через эти числа и k и w , получаем, что общий знаменатель чисел a_2 , a_3 , a_4 и a_5 не превосходит 84. Но тогда и $q_1 \leq 84$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Deligne P., Mostow G. D. // Publ. Math. I.H.E.S. 1986. V. 63. P. 5–90. [2] Mostow G. D. // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. № 3. P. 555–586. [3] Mostow G. D. // Publ. Math. I.H.E.S. 1986. V. 63. P. 91–106. [4] Thurston W. P. Shapes of polyhedra // Preprint: Princeton I.A.S., 1987, June. [5] Weber M. Dissertation. Bonn. Math. Schriften, 1993.

Принято редколлегией
02.07.1997