Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Х. Хаханян, Независимость частного случая аксиомы выбора в интуиционистской теории множеств, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 219–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm878>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:21:27

НЕЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ АКСИОМЫ ВЫБОРА В ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

В. Х. ХАХАНИЯ

В настоящей заметке доказывается независимость частного случая аксиомы выбора в интуиционистской двусортной теории множеств. Аналогичное доказательство может быть проведено и для односортной теории множеств.

1. Язык теории $ZFI2$. Язык теории включает: два сорта переменных (по натуральным числам $(m, n, p, k, \dots)$ и по множествам $(x, y, z, t, \dots)$), символы для предикатов принадлежности натурального числа множеству: $\in^0$, множества – множеству: $\in^1$, и равенства для натуральных чисел, числовой константы 0, логических связок и кванторов по переменным любого сорта и всех примитивно-рекурсивных функций. Далее верхние индексы у предикатов принадлежности опускаем, так как из текста всегда ясно, какой из предикатов имеется в виду.

2. Аксиомы теории $ZFI2$. Это все аксиомы арифметики, включая аксиомы логики предикатов для двух сортов переменных и принципа индукции по всем формулам языка, которые строятся из атомарных, как обычно. Вторую группу составляют теоретико-множественные аксиомы пары, суммы, степени, бесконечности, трансфинитной индукции по множествам, выделения, подстановки и экстенциональности, записанные для двусортного языка. Например, аксиомы выделения и подстановки имеют такой вид:

$$\begin{aligned} & \forall z \exists y [\forall m (m \in y \leftrightarrow m \in z \wedge \varphi(m)) \wedge \forall t (t \in y \leftrightarrow t \in z \wedge \psi(t))], \\ & \forall x \{ [\forall m \in x \exists! y \varphi(m, y) \wedge \forall t \in x \exists! y \psi(t, y)] \\ & \quad \rightarrow \exists z [\forall m \in x \downarrow \exists y \in z \varphi(m, y) \wedge \forall t \in x \exists y \in z \psi(t, y)] \}. \end{aligned}$$

Здесь на φ и ψ накладываются обычные ограничения и в них входят параметры любого сорта.

3. Рассматриваемый случай аксиомы выбора имеет вид:

$$\begin{aligned} AC^0 &= \forall n \exists m \varphi(n, m) \\ & \rightarrow \exists x [\text{Fn}(x) \wedge \text{Dom}(x) = \omega \wedge \text{Rng}(x) \subseteq \omega \wedge \forall n \exists m (\varphi(n, m) \wedge \langle n, m \rangle \in x)]. \end{aligned}$$

Здесь $\text{Fn}(x)$ – формула, утверждающая, что множество x – функция, ω – множество натуральных чисел. Аксиома утверждает возможность выбора из всех сущих m для n одного.

Отметим следующие обстоятельства.

1) Если ограничить посылку AC^0 требованием единственности для существования $\forall n \exists! m \varphi(n, m)$, то такая аксиома $AC^0!$ выводима в $ZFI2$.

ТЕОРЕМА 1. $ZFI2 \vdash \{ \forall n \exists! m \varphi(n, m) \rightarrow \exists x [\text{Fn}(x) \wedge \text{Dom}(x) = \omega \wedge \text{Rng}(x) \subseteq \omega \wedge \forall n \exists m (\varphi(n, m) \wedge \langle n, m \rangle \in x)] \}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем аксиомы подстановки и выделения.

2) Если добавить к $ZFI2$ аксиому “собирания” (которая отличается от аксиомы подстановки отсутствием требования единственности в посылке) и усилить таким образом $ZFI2$, см. [3], то аналогичное доказательство для вывода AC^0 все же не проходит; мы покажем, что доказательство нет.

3) В заключении аксиомы подстановки можно требовать, чтобы существовало не множество, а функция с нужным свойством: это не изменит силы аксиомы; аналогичная замена в аксиоме “собирания” даст неприемлемую интуиционистски аксиому (обозначим ее ACF), так как тогда выводится стандартная форма аксиомы выбора AC , а также полный закон исключенного третьего.

ТЕОРЕМА 2. *B ZFI2 выводимо:*

- а) $AC \leftrightarrow ACF$, где $AC \equiv \forall x \in B \exists y \in x \rightarrow \exists f [\text{Fn}(f) \wedge \text{Dom}(f) = B \wedge \forall x \in B f(x) \in x]$ – стандартная форма аксиомы выбора;
 б) $ACF \rightarrow \psi \vee \neg\psi$ для любой ψ языка ZFI2.

Доказательство б) дали в 1975 г. N. D. Goodman и F. Myhill. Приведем здесь краткое доказательство Г. Е. Минца из [4]. Пусть $B = \{a, b\}$, где $a = \emptyset$ и $b = \{x \mid x = 0 \wedge \psi\}$, $C = \{0, 1\}$, $\varphi(x, y) \equiv (x = a \wedge y = 0) \vee (x = b \wedge y = 1)$ и ψ – фиксированная формула. Используя аксиомы пары, экстенциональности и факт, что $0 \neq 1$, получим $a = b \vee a \neq b$ и затем $\psi \vee \neg\psi$.

4. Рассмотрим теперь AC^0 . Установить ее совместимость с ZFI2 можно даже интуитионистски и даже с ZFI2 + CT, где CT – тезис Чёрча и имеет вид $\forall n \exists m \varphi(n, m) \rightarrow \exists e \forall n \varphi(n, \{e\}(n))$; здесь e – гёделев номер общерекурсивной функции и $\{e\}(n)$ есть значение функции с номером e на аргументе n . Тезис Чёрча утверждает, что все всюду определенные функции натурального аргумента являются вычислимыми.

ТЕОРЕМА 3. $ZFI2 + CT \vdash AC^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем тезис Чёрча и аксиому выделения.

Обозначим теорию ZFI2+аксиома “собирания” через ZFC2.

ТЕОРЕМА 4. Теория ZFC2 + AC^0 непротиворечива относительно теории ZFC2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем теорему 3 и основную теорему из [1].

ТЕОРЕМА 5. $ZFC2 \not\vdash AC^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим $ZFC2 \vdash AC^0$. Тогда $ZFC2 + CT! \vdash AC^0$ и $ZFC2 + CT! \vdash CT$. Последнее доказываем так: пусть $\forall n \exists m \varphi(n, m)$; применяя AC^0 , имеем $\exists f \forall n \varphi(n, f(n))$, т.е. $\forall n \exists! m (\varphi(n, m) \wedge f(n) = m)$; применяем CT! (отличающийся от CT требованием единственности существования в посылке) и получаем заключение для CT. Однако следствие из [2] утверждает, что $ZFC2 + CT! \not\vdash CT$. Теперь получаем, $ZFC2 + CT! \not\vdash AC^0$ и $ZFC2 + AC^0! \not\vdash AC^0$ и $ZFC2 \not\vdash AC^0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хаханян В. Х. // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1980. № 5. С. 3–7. [2] Хаханян В. Х. // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 5. С. 1070–1074. [3] Friedman H., Ščedrov A. // Adv. Math. 1985. № 57. Р. 1–13. [4] РЖ “Математика”, 1979. № 5. 5А59.

Принято редколлегией
07.04.1997