Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Хелемский, Строение C^* -алгебры и ее запас проективных гильбертовых модулей, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 221–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:31:00

СТРОЕНИЕ C^* -АЛГЕБРЫ И ЕЕ ЗАПАС ПРОЕКТИВНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ МОДУЛЕЙ

А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ

Рассматриваются следующие вопросы гомологии операторных алгебр: как устроена C^* -алгебра, у которой 1) существует нетривиальный проективный гильбертов модуль; 2) существует верный (=точный) проективный гильбертов модуль; 3) все невырожденные гильбертовы модули проективны? Подобные вопросы уже были решены для алгебр фон Нойманна [1], [2], а первые два – для аппроксимативно-конечномерных алгебр [3]. Объявленные ниже теоремы 7–9 решают их для общих C^* -алгебр. В подготовке участвует теорема 5, описывающая все проективные гильбертовы модули над заданной C^* -алгеброй; она, в свою очередь, выводится из сходного результата в контексте алгебр фон Нойманна [1], [2].

Везде далее A есть C^* -алгебра, $A\text{-mod}$ – категория левых банаховых A -модулей, $\mathcal{B}(\cdot)$ – алгебра для всех ограниченных, а $\mathcal{K}(\cdot)$ – алгебра всех компактных операторов. Модуль $H \in A\text{-mod}$ с подлежащим гильбертовым пространством назовем *гильбертовым*, если выполнено тождество $\langle a \cdot x, y \rangle = \langle x, a^* \cdot y \rangle$. О *нормальных* модулях см. [2]; напомним, что всякий гильбертов модуль над A является нормальным гильбертовым модулем над A^{**} (ср. [4]). О *проективных* банаховых модулях см. [5], [6]. Проектор $p \in A$ назовем *элементарным*, если rap кратен p для всех $a \in A$. Множество элементарных проекторов в A обозначим через $\mathcal{P}$.

Начнем с некоторых связей между категориями $A\text{-mod}$ и $A^{**}\text{-mod}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть H – гильбертов A -модуль, X – нормальный A^{**} -модуль, $\varphi: H \rightarrow X$ – морфизм A -модулей. Тогда φ – морфизм A^{**} -модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Всякий проективный гильбертов A -модуль является проективным гильбертовым A^{**} -модулем.

Теперь опишем “кирпичики”, из которых строятся любые проективные гильбертовы модули. Для $p \in \mathcal{P}$ рассмотрим замкнутый левый идеал $H_p = \{ap : a \in A\}$ в A . Его норма, как известно (ср. [7]), задается скалярным произведением, корректно определенным равенством $\langle ap, bp \rangle_p = pb^*ap$; $a, b \in A$. Рассмотрим H_p как гильбертов A -модуль, ассоциированный с левым регулярным представлением. Модули H_p ; $p \in \mathcal{P}$, назовем *элементарными*. Легко проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Проекторы $p, q \in \mathcal{P}$ эквивалентны (по Мюррею-фон-Нойманну) $\Leftrightarrow rap \neq 0$ для некоторого $a \in A \Leftrightarrow H_p, H_q \in A\text{-mod}$ топологически изоморфны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H – неприводимый гильбертовый A -модуль. Тогда H проективен $\Leftrightarrow$ он топологически изоморфен элементарному модулю.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ. Если H проективен, то существует ненулевой морфизм A -модулей $\varphi: H \rightarrow A$. С помощью предложения 1 устанавливается, что $T\varphi: H \rightarrow \mathcal{B}(H)$, где T – ассоциированное с H представление, – морфизм $\mathcal{B}(H)$ -модулей, а значит [1], переводит $x \in H$ в оператор $y \mapsto \langle y, e \rangle x$ для фиксированного $e \in H$. Требуемым элементарным модулем оказывается H_p , где $p = \varphi(e)$.

Далее через Λ мы обозначим множество классов эквивалентности проекторов из $\mathcal{P}$, отождествляемое с некоторой максимальной системой попарно неэквивалентных проекторов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Сопоставление $p \mapsto H_p$ порождает биекцию между Λ и множеством классов изоморфизмов неприводимых проективных гильбертовых A -модулей.

Перейдем к описанию общих проективных гильбертовых A -модулей. Пусть $\overline{\mathbb{N}}$ – класс всех мощностей. Функцию $\alpha: \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$ назовем *существенно конечной*, если $\alpha(p) < \infty$ при $\dim H_p = \infty$. Для $\nu \in \overline{\mathbb{N}}$ и гильбертова $H \in A\text{-mod}$ гильбертову сумму ν копий H обозначим νH . Наконец, для каждой функции $\alpha: \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$ положим $H^\alpha = \bigoplus \{\alpha(p)H_p : p \in \Lambda\}$.

ТЕОРЕМА 2. Если α существенно конечна, то H^α проективен.

Доказательство проведено по типу доказательства теоремы 2 в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00182), и программы ИНТАС (грант № 93-1376).

ТЕОРЕМА 3. *Каждый невырожденный проективный гильбертов A -модуль изометрически изоморфен некоторому проективному A -модулю вида H^α .*

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ. Пусть Λ' индексирует прямые слагаемые вида $\mathcal{B}(H_\mu)$ в A^{**} . Объединяя предложение 2 с результатами [1], [2], мы получаем, что для некоторой $\beta: \Lambda' \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$, со свойством (внимание!) $\beta(\mu) < \infty$ при $\dim H_\mu = \infty$, наш H как A^{**} -модуль имеет вид $\bigoplus \{\beta(\mu)H_\mu : \mu \in \Lambda'\}$, где H_μ – естественный $\mathcal{B}(H_\mu)$ -модуль, рассмотренный как A^{**} -модуль. Поскольку H_μ неприводим и в $A\text{-mod}$, теорема 1 позволяет отождествить Λ' с Λ и соответствующие H_μ с H_μ . Остается положить $\alpha = \beta$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\alpha, \beta: \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$ – произвольные функции. Тогда если A -модули H^α и H^β топологически изоморфны, то $\alpha = \beta$.*

Объединим три последние теоремы:

ТЕОРЕМА 5. *Сопоставление $\alpha \mapsto H^\alpha$ порождает биекцию между классом существенно конечных мощностнозначных функций на Λ и классом классов изоморфизма невырожденных проективных гильбертовых A -модулей.*

Всегда ли для A -бимодуля $\mathcal{B}(H)$, порожденного $*$ -представлением, $\mathcal{K}^1(A, \mathcal{B}(H)) = 0$? Этот важный открытый вопрос эквивалентен известной проблеме подобия представлений [4]. Следующая перефразировка теоремы 5 показывает, что модули H , доставляющие положительный ответ на некоторый “усиленный вариант” данного вопроса, встречаются редко.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть H – гильбертов A -модуль. Тогда $\mathcal{K}^1(A, \mathcal{B}(H, X)) = 0$ для всех $X \in A\text{-mod} \Leftrightarrow H$ топологически (или, эквивалентно, изометрически) изоморфен некоторому стандартному A -модулю.*

Наконец, ответим на поставленные в начале сообщения вопросы 1)–3).

ТЕОРЕМА 7. *Следующие свойства алгебры A эквивалентны наличию хотя бы одного нетривиального проективного гильбертова A -модуля: (I) $\mathcal{P} \neq \emptyset$; (II) $I \neq \emptyset$; (III) для некоторых гильбертовых пространств H_1 и H_2 алгебра A реализуется как C^* -подалгебра в $\mathcal{B}(H_1) \oplus \mathcal{B}(H_2)$, содержащая $(0, \mathcal{K}(H_2))$.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (ср. [3, следствие 1]). *Простая C^* -алгебра, отличная от $\mathcal{K}(H)$, не обладает ни одним нетривиальным проективным гильбертовым модулем.*

ТЕОРЕМА 8. *Следующие свойства C^* -алгебры A эквивалентны наличию хотя бы одного верного проективного гильбертова A -модуля: (I) каждый замкнутый двусторонний идеал в A содержит элементарный проектор; (II) то же, с “идеал” вместо “проектор”; (III) для некоторого семейства гильбертовых пространств H_μ алгебра A реализуется как C^* -подалгебра в $\bigoplus \mathcal{B}(H_\mu)$, содержащая, для любого индекса ν , $\bigoplus \delta_\mu^\nu \mathcal{K}(H_\mu)$ (δ – символ Кронекера).*

ТЕОРЕМА 9. *Все невырожденные гильбертовы модули над C^* -алгеброй проективны $\Leftrightarrow$ эта алгебра $*$ -изоморфна прямой c_0 -сумме некоторого (произвольной мощности) семейства полных матричных C^* -алгебр.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Helemskii A. Ya. // J. Operator Theory. 1994. V. 32. P. 382–398. [2] Хелемский А. Я. // Докл. РАН. 1995. Т. 344. С. 454–456. [3] Хелемский А. Я. // Матем. сб. 1997 (в печати). [4] Kirchberg E. The derivation and the similarity problem are equivalent. Preprint, 1994. [5] Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры. М.: Наука, 1989. [6] Connes A. Noncommutative geometry. London: Academic Press, 1994. [7] Riccart C. E. General Theory of Banach Algebras. New York: Van Nostrand, 1960.