Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, Внешняя геометрия параболических и седловых многомерных подмногообразий, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 3–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 09:08:12

УДК 514.763

ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И
СЕДЛОВЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

А. А. БОРИСЕНКО

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Параболические подмногообразия	4
1. Точечная структура пространства вторых квадратичных форм k -параболической поверхности	5
2. Нормальное расслоение многообразия	8
3. Локальное строение k -параболических подмногообразий в римановом пространстве	10
4. Полные параболические подмногообразия в римановом пространстве ...	16
5. Характеристические классы Понтрягина параболических подмногообразий в сферическом пространстве	26
2. k -седловые и k -выпуклые подмногообразия	28
1. Топологическое строение седловых подмногообразий	28
2. Пересечение седловых подмногообразий в римановом пространстве	32
3. k -асимптотические и k -выпуклые подмногообразия	34
3. Подмногообразия неположительной внешней кривизны	36
2. Слоения на римановых многообразиях	44
3. Аффинно устойчивые погружения римановых метрик	46
Список литературы	50

Введение

В многомерном случае существуют классы подмногообразий, аналогичные классам развертывающихся, седловых, выпуклых поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. В [3] описано локальное и глобальное метрическое строение сильно параболических подмногообразий в римановом пространстве. В настоящем обзоре изучается локальное и глобальное строение параболических подмногообразий и топологические свойства седловых подмногообразий.

1. Параболические подмногообразия

Обобщением класса сильно k -параболических подмногообразий является класс k -параболических подмногообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Внешний нуль-индекс $\mu(Q)$ точки $Q \in F^l \subset M^n$ есть максимальная размерность подпространства $L(Q)$ касательного пространства $T_Q F^l$ такого, что

$$A_\xi y = 0$$

для любого вектора $y \in L(Q)$ и для любой нормали $\xi \in N_Q F^l$ в этой точке.

Подмногообразие называется сильно k -параболическим, если внешний нуль-индекс $\mu \geq k$ для каждой точки подмногообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность F^l в римановом пространстве M^n называется k -параболической, если вторая квадратичная форма поверхности относительно каждой нормали после приведения к диагональному виду имеет не менее k нулевых коэффициентов. Другими словами, ранг второй квадратичной формы поверхности

$$r(Q) = \max_{\xi \in N_Q} r(Q, \xi),$$

где N_Q – нормальное пространство в точке Q , $r(Q, \xi)$ – ранг второй квадратичной формы поверхности относительно нормали ξ в точке Q , удовлетворяет в каждой точке неравенству $r(Q) \leq l - k$ [14].

В случае k -параболических подмногообразий для каждой нормали ξ существует k -мерное подпространство $L^k(Q, \xi) \subset T_Q F^l$ такое, что

$$A(Q, \xi)Y = 0$$

для $Y \in L^k(Q, \xi)$, где $A(Q, \xi)$ – линейный оператор второй квадратичной формы, соответствующей нормали ξ . Различным нормальям в общем случае отвечают различные подпространства.

Поверхность $F^5 \subset E^7$, заданная в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \\ z_2 &= x_5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \end{aligned}$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_5, z_1, z_2)$ – прямоугольные декартовы координаты в E^7 , является 1-параболической, но не является сильно параболической. Это же относится к поверхности $F^6 \subset E^9$, заданной в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \\ z_2 &= x_5(x_1 + x_3) + x_6(x_2 + x_4), \\ z_3 &= x_5(x_2 - x_4) + x_6(x_1 - x_3). \end{aligned}$$

1. Точечная структура пространства вторых квадратичных форм k -параболической поверхности. Ее достаточно описать, когда объемлющим пространством является евклидово пространство [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть вторая квадратичная форма $A(Q, \xi)$ после приведения к диагональному виду имеет k_1 положительных, k_2 отрицательных членов. Положим

$$j(Q, \xi) = \min(k_1, k_2).$$

Типом точки Q называется число

$$j(Q) = \min j(Q, \xi),$$

где минимум берется по всем нормальям в точке Q , для которых $r(Q, \xi) = r(Q)$ [8].

Если $j(Q) = 0$, то существует нормаль в точке Q , относительно которой вторая квадратичная форма является неотрицательно определенной. При этом, если ранг $r(Q) = l$, то относительно некоторой нормали вторая квадратичная форма – строго определенная. Если $r(Q) = l - k$, то относительно некоторой нормали ограничение второй квадратичной формы на $(l - k)$ -мерную плоскость, ортогональную нуль-пространству, будет положительно определенной формой.

Поверхности с нулевым типом являются в некотором смысле обобщением выпуклых гиперповерхностей на подмногообразия произвольной коразмерности.

Пусть F^l есть k -параболическая поверхность в E^n , $Q \in F^l$. Предположим, что точка Q является началом ортогональной декартовой системы координат, касательное пространство $T_Q F^l$ – плоскость переменных $x^1, \dots, x^l$, ось z^1 – направление нормали ξ_1 такой, что $r(Q, \xi_1) = r(Q)$, $j(Q, \xi_1) = j(Q)$. Оси $x^{r+1}, \dots, x^l$ образуют нулевое подпространство $L^k(Q, \xi_1)$ второй квадратичной формы относительно нормали ξ_1 , оси $x^1, \dots, x^r$ являются главными направлениями F^l относительно нормали ξ_1 , оси $z^2, \dots, z^{n-l}$ направлены вдоль нормалей F^l . Тогда матрица

$$A(Q, \xi_1) = \begin{pmatrix} C^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где C^1 – квадратная диагональная матрица порядка r , все диагональные элементы которой $c_i \neq 0$.

ЛЕММА 1.1.1. *Матрицы вторых квадратичных форм для нормалей ξ_α , направленных по осям z_α ($\alpha = 2, \dots, n - l$), имеют вид:*

$$A(Q, \xi_\alpha) = \begin{pmatrix} C^\alpha & B^\alpha \\ (B^\alpha)' & 0 \end{pmatrix}.$$

Допустим противное. Пусть для определенности матрица, соответствующая нормали ξ_2 , имеет вид

$$A(Q, \xi_2) = \begin{pmatrix} C^2 & B^2 \\ (B^2)' & D^2 \end{pmatrix},$$

где D^2 – матрица порядка $(l - r) \times (l - r)$, отличная от нулевой. Для нормали $\xi = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2$:

$$A(Q, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2 & \lambda_2 B^2 \\ \lambda_2 (B^2)' & \lambda_2 D^2 \end{pmatrix}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $d_{11}^2 \neq 0$ в матрице D^2 . Рассмотрим минор M , лежащий на пересечении $r + 1$ первых строк и $r + 1$ первых столбцов:

$$M = \lambda_2 \det \begin{pmatrix} \lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2 & b_1^2 \\ \lambda_2 (b_1^2)' & d_{11}^2 \end{pmatrix},$$

где b_m^α ($m = 1, \dots, l - r$) – столбцы матрицы B^α . При $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2 & b_1^2 \\ \lambda_2 (b_1^2)' & d_{11}^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поэтому $M \neq 0$ при достаточно малых $\lambda_2 \neq 0$ и $r(Q, \xi) \geq r + 1$, а $r(Q) \geq r(Q, \xi) \geq r + 1$, что противоречит предположению.

ЛЕММА 1.1.2. *Векторы b_m^α удовлетворяют уравнению*

$$(1.1.1) \quad \sum_{i=1}^r \frac{x_i^2}{c_i} = 0.$$

Плоскость, натянутая на векторы b_m^α ($m = 1, \dots, l - r$), лежит на конусе (1.1.1), ее размерность не превышает j .

Для доказательства леммы 1.1.2 нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 1.1.3 [4].

$$\det \begin{pmatrix} C^1 & b \\ (b)' & 0 \end{pmatrix} = \det C^1 \left(\sum_{k=1}^r \frac{b_k^2}{c_k} \right),$$

$$\det \begin{pmatrix} C^1 & a & b \\ (a)' & 0 & 0 \\ (b)' & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \det C^1 \sum_{i=1, i < s}^r \frac{(a_i b_s - a_s b_i)^2}{c_i c_s},$$

где a, b – r -мерные векторы, C^1 – диагональная матрица, c_i – ее диагональные элементы.

Пусть в конусе (1.1.1) j первых коэффициентов положительны, $r - j$ остальных отрицательны, причем $j \leq r - j$.

ЛЕММА 1.1.4 [4]. *Наибольшая размерность плоскости, которая лежит на конусе (1.1.1), равна j .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1.2. Допустим, что один из векторов не удовлетворяет уравнению (1.1.1). Не ограничивая общности, считаем, что это вектор b_1^2 . Для нормали $\xi = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2$ минор $(r+1)$ -порядка, который лежит на пересечении $r+1$ первых строк и $r+1$ первых столбцов матрицы $A(Q, \xi)$, имеет вид:

$$M = \lambda_2^2 \det \begin{pmatrix} \lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2 & b_1^2 \\ (b_1^2)' & 0 \end{pmatrix}.$$

Из предположения и леммы 1.1.3 следует, что множитель при λ_2^2 отличен от нуля. Поэтому при достаточно малых $\lambda_2 \neq 0$ минор $M \neq 0$, откуда следует, что $r(Q) \geq r+1$, что противоречит предположению.

Рассуждая аналогичным образом, из леммы 1.1.3 получаем, что любой вектор из пространства, натянутого на векторы $b_{m_1}^\alpha, b_{m_2}^\alpha$, лежит на конусе (1.1.1). Из леммы 1.1.4 следует, что размерность плоскости, натянутой на векторы b_m^α ($m = 1, \dots, l-r$), меньше или равна j . Отсюда

$$\text{rang } B^\alpha \leq j.$$

Вектор $b_m^{\alpha_1} + b_m^{\alpha_2}$ также лежит на конусе (1.1.1), так как это столбец матрицы $B(\xi)$, отвечающий нормали $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Так как

$$(1.1.2) \quad \sum_{i=1}^r \frac{(b_{mi}^{\alpha_1})^2}{c_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^r \frac{(b_{mi}^{\alpha_2})^2}{c_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^r \frac{(b_{mi}^{\alpha_1} + b_{mi}^{\alpha_2})^2}{c_i} = 0,$$

то

$$(1.1.3) \quad \sum_{i=1}^r \frac{b_{mi}^{\alpha_1} b_{mi}^{\alpha_2}}{c_i} = 0.$$

Из равенств (1.1.2), (1.1.3) следует, что двумерная плоскость, натянутая на векторы $b_m^{\alpha_1}, b_m^{\alpha_2}$, лежит на конусе (1.1.1). На конусе лежит также плоскость, натянутая на векторы b_m^α ($\alpha = 2, \dots, n-l=p$). Ее размерность по лемме 1.1.4 также меньше или равна j .

ЛЕММА 1.1.5. $\mu \geq l-r-j(n-l-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению нуль-индекс μ есть размерность пространства решений системы линейных уравнений

$$(1.1.4) \quad A(Q, \xi_\alpha)X = 0,$$

где ξ_α – базис нормалей в точке $Q \in F^l$. Так как системе уравнений

$$A(Q, \xi_1)X = 0$$

удовлетворяют все векторы $X = (0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_l) = (0, X')$, то система (1.1.4) эквивалентна системе

$$(1.1.5) \quad B^\alpha X' = 0.$$

Как следует из леммы 1.1.2, ранг системы (1.1.5) меньше или равен $j(n - l - 1)$. Так как размерность пространства решений системы (1.1.5) совпадает с нуль-индексом μ , то

$$\mu \geq l - r - j(n - l - 1).$$

Ясно, что это неравенство содержательно при малой коразмерности поверхности.

Когда параболическое подмногообразие является гиперповерхностью или двумерной поверхностью, то

$$\mu = l - r = k,$$

и параболичность совпадает с сильной параболичностью. Если тип точки $j(Q) = 0$, то происходит то же самое. Поэтому в теоремах 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1 из [3] условие сильной k -параболичности $\mu \geq k$ можно заменить условием k -параболичности [12], [47].

Если индекс асимптотичности $a(Q) = l - r(Q) = k$ и $j(Q) \leq 1$, то k -параболическая поверхность является сильно k -параболической и $\mu(Q) = k$ [12].

2. Нормальное расслоение многообразия. Рассмотрим нормальное расслоение поверхности F^l в римановом пространстве M^{l+p} . В каждой точке $Q \in F^l$ имеет место разложение касательного к M^{l+p} пространства $T_Q M^{l+p}$ в прямую сумму двух подпространств $T_Q F^l$ и $N_Q F^l$, первое из которых касательно к F^l , а второе ортогонально к $T_Q F^l$ в метрике пространства M^{l+p} .

Пространством нормального расслоения называется дизъюнктивное объединение $N_Q F^l$ по всем $Q \in F^l$. Если $Q \in F^l$, а ξ – нормаль к F^l в точке Q , то пара $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ есть точка нормального расслоения NF^l . Обозначим через $(x^1, \dots, x^l)$ локальные координаты F^l , а через $(\xi^1, \dots, \xi^p)$ – координаты нормали ξ в некотором базисе нормалей $n_1, \dots, n_p$, который в дальнейшем будем считать ортонормированным. Тогда набор координат $(x^1, \dots, x^l; \xi^1, \dots, \xi^p)$ задает локальные координаты на NF^l , которые называются, по аналогии с касательным расслоением, *естественными индуцированными координатами*.

Пусть $\bar{g}$ и $\bar{\nabla}$ – метрика и ковариантная производная на M^{l+p} , а g – индуцированная на F^l метрика. Если X – касательное к F^l , а ξ – нормальное к F^l векторные поля, то *ковариантной производной в нормальной связности* $\nabla_X^\perp \xi$ векторного поля ξ по направлению векторного поля X называется проекция векторного поля $\nabla_X \xi$ на нормальное подпространство к F^l .

В локальных координатах

$$\nabla_i^\perp n_\alpha = \mu_{\alpha|i}^\tau n_\tau \quad (i = 1, \dots, l; \alpha = 1, \dots, p),$$

где $\mu_{\alpha|i}^\tau (= \mu_{\tau\alpha|i})$ – коэффициенты кручения. Поэтому для векторных полей

$$\nabla_X^\perp \xi = X^i \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} + \mu_{\tau|i}^\alpha \xi^\tau \right) n_\alpha.$$

Ковариантным дифференциалом $D^\perp$ нормального векторного поля ξ называется нормальная ковариантная производная поля ξ по направлению векторного поля $dX = \{dx^1, \dots, dx^l\}$

$$D^\perp \xi = (d\xi^\alpha + \mu_{\tau|i}^\alpha \xi^\tau dx^i) n_\alpha.$$

Определим в естественных индуцированных координатах (x^i, ξ^α) линейный элемент $d\sigma$ метрики Сасаки NF^l равенством [21]:

$$d\sigma^2 = g_{ij} dx^i dx^j + \delta_{\alpha\beta} D^\perp \xi^\alpha D^\perp \xi^\beta,$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера (соответствующий послойной евклидовой метрике).

Естественным образом определяются для NF^l отображение π_* и отображение связности K (см. [45]). Если $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ касаются NF^l в точке $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ и в естественном базисе $(\partial/\partial x^i; \partial/\partial \xi^\alpha)$ векторы $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ имеют координаты $\{\tilde{X}^i; \tilde{X}^{l+\alpha}\}$, $\{\tilde{Y}^i; \tilde{Y}^{l+\alpha}\}$, то, обозначив через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярные произведения векторов в метрике Сасаки, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_\perp$ – скалярные произведения векторов в метрике g и послойной (евклидовой) метрике соответственно, найдем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle &= g_{ij} \tilde{X}^i \tilde{Y}^j + \delta_{\alpha\beta} (\tilde{X}^{l+\alpha} + \mu_{\tau|i}^\alpha \tilde{X}^i \xi^\tau) (\tilde{Y}^{l+\beta} + \mu_{\delta|j}^\beta \tilde{Y}^j \xi^\delta) \\ &= \langle \pi_* \tilde{X}, \pi_* \tilde{Y} \rangle + \langle K \tilde{X}, K \tilde{Y} \rangle_\perp, \end{aligned}$$

т.е. π_* и K в локальных координатах представляются в виде

$$\pi_* \tilde{X} = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad K \tilde{X} = (\tilde{X}^{l+\alpha} + \mu_{\tau|i}^\alpha \tilde{X}^i \xi^\tau) n_\alpha.$$

Вертикальное подпространство $\mathcal{V}_{\tilde{Q}} NF^l = \text{Ker } \pi_*$, горизонтальное $\mathcal{H}_{\tilde{Q}} NF^l = \text{Ker } K$.

Естественным образом определяются горизонтальный и вертикальный лифты касательного X и нормального η векторов в TNF^l в точку (Q, ξ) . А именно [45],

$$X^H = \{X^i; -\mu_{r|k}^\alpha X^k \xi^\tau\}, \quad \eta^V = \{0; \eta^\alpha\}.$$

ЛЕММА 1.2.1 [21]. Символы Кристоффеля второго рода римановой связности метрики Сасаки N_g на нормальном расслоении NF^l в точке $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ с локальными координатами $v = (u^i, \xi^\alpha)$ равны:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} \sum_\alpha (N_{ki|\nu\alpha} \mu_{\alpha\sigma|j} + N_{kj|\nu\alpha} \mu_{\alpha\sigma|i}) \xi^\sigma \xi^\nu; \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^{l+\sigma} &= \frac{1}{2} \mu_{\sigma\lambda|t} \sum_\beta (N_{ti|\beta\nu} \mu_{\beta\sigma|j} + N_{tj|\beta\nu} \mu_{\beta\sigma|i}) \xi^\sigma \xi^\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{\sigma\lambda|i}}{\partial u^j} + \frac{\partial \mu_{\sigma\lambda|j}}{\partial u^i} + \sum_\alpha (\mu_{\sigma\alpha|i} \mu_{\alpha\lambda|j} + \mu_{\sigma\alpha|j} \mu_{\alpha\lambda|i}) - 2\Gamma_{ij}^t \mu_{\sigma\lambda|t} \right] \xi^\lambda; \\ \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, j}^k &= \frac{1}{2} N_{kj|\sigma\alpha} \xi^\sigma; \\ \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, j}^{l+\sigma} &= \mu_{\alpha\sigma|j} + \frac{1}{2} \mu_{\sigma\tau|t} N_{tj|\alpha\nu} \xi^\nu \xi^\tau; \quad \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, l+\beta}^k = 0; \quad \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, l+\beta}^{l+\sigma} = 0, \end{aligned}$$

где $N_{\alpha\beta, ij}$ – компоненты тензора кривизны нормальной связности поверхности F^l , Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля метрики g поверхности F^l .

На поверхности F^l так выберем локальные координаты u^i , чтобы в точке Q_0

$$(1.2.1) \quad \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Осуществим параллельный перенос в нормальной связности базиса нормалей $n^\alpha(Q_0)$ из точки Q_0 в близкие точки $Q \in F^l$ по единственным геодезическим поверхности, соединяющим эти точки и лежащим в малой окрестности. Полученные векторные поля выберем в качестве полей n_α . Тогда

$$(1.2.2) \quad \mu_{\alpha\beta|i}(Q) = 0.$$

ЛЕММА 1.2.2 [21]. В точке $\tilde{Q}_0 = (Q_0, \xi)$ символы Кристоффеля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= 0; \quad \Gamma_{ij}^{l+\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\sigma\lambda|i}}{\partial u^j} + \frac{\partial \mu_{\sigma\lambda|j}}{\partial u^i} \right) \xi^\lambda; \\ \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, j}^k &= \frac{1}{2} N_{kj|\lambda\alpha} \xi^\lambda, \quad \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, j}^{l+\sigma} = \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, l+\beta}^k = \tilde{\Gamma}_{l+\alpha, l+\beta}^{l+\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Лемма 1.2.2 непосредственно получается из леммы 1.2.1 после использования условий (1.2.1), (1.2.2).

3. Локальное строение k -параболических подмногообразий в римановом пространстве. Для параболических подмногообразий в римановом пространстве имеет место лемма, аналогичная лемме 3.1.1 [3]. Пусть вдоль подмногообразия F^l в римановом пространстве M^n выполняется условие

$$(1.3.1) \quad R(X, Y)\xi = 0,$$

где $X, Y \in T_Q F^l$, ξ – нормаль к подмногообразию, $R(X, Y)$ – оператор кривизны многообразия M^n . Вдоль подмногообразий в пространствах постоянной секционной кривизны условие (1.3.1) выполняется. Будем считать, что поверхность принадлежит классу C^3 , риманово пространство – классу регулярности C^4 . Справедлива

ЛЕММА 1.3.1. Пусть F^l есть l -мерная поверхность в римановом пространстве M^n , в окрестности точки $Q \in F^l$ ранг второй квадратичной формы постоянен: $r(Q) = r(Q_0) = l - k$, ξ – нормаль в точке Q_0 , для которой $r(Q_0, \xi) = r(Q_0) = l - k$. Если в точках поверхности выполняется условие (1.3.1), то через точку Q_0 проходит вполне геодезическое k -мерное подмногообразие $R^k(Q_0, \xi)$ объемлющего пространства, которое принадлежит поверхности. Вдоль подмногообразия $R^k(Q_0, \xi)$ нормаль ξ стационарна, $r(Q, \xi) = r(Q_0, \xi)$ для точек $Q \in R^k(Q_0, \xi)$. Если поверхность полная и

$$r(Q_0, \xi) = r_0 = \max_{Q \in F^l} r(Q),$$

то $R^k(Q_0, \xi)$ является полным римановым многообразием.

Рассмотрим расслоение нормальных векторов поверхности F^l в римановом пространстве M^n и введем на нем метрику Сасаки.

Условимся, что в дальнейшем изложении индексы пробегает следующие значения: $i, j, k, m, s, t = 1, \dots, l$; $a, b, c, d = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \tau, \mu, \nu, \sigma, \lambda = 1, \dots, p = n - l$.

Пусть ξ – нормаль в точке Q , для которой ранг $r(Q, \xi) = r(Q) = l - k$. Тогда он постоянен для нормалей, близких к ξ . Для нормали ξ рассмотрим нулевое подпространство ее второй квадратичной формы. Оно удовлетворяет уравнениям

$$(1.3.2) \quad \sum \xi^\alpha A_{ij}^\alpha(u) x^i = 0,$$

где A_{ij}^α – коэффициенты вторых квадратичных форм относительно базисных нормалей n_α . Так как ранг системы (1.3.2) постоянен, то пространство решений $L^k(Q, \xi)$ регулярно зависит от точки и от нормали. Осуществим горизонтальное поднятие k -мерных плоскостей $L^k(Q, \xi)$ в точки $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ нормального расслоения. Горизонтальное поднятие плоскостей $L^k(Q, \xi)$ в окрестности точки $\tilde{Q}$ есть дифференцируемое распределение $L^k(\tilde{Q})$.

Доказательство леммы 1.3.1 сводится к изучению распределения $L^k(\tilde{Q})$. Справедлива

ЛЕММА 1.3.2. *Дифференцируемое горизонтальное распределение $L^k(\tilde{Q})$ на нормальном расслоении k -параболической поверхности F^l в римановом пространстве M^n голономно, если в точках поверхности тензор кривизны M^n удовлетворяет условию (1.3.1).*

Слой $R^k(\tilde{Q}_0)$, касающийся $L^k(\tilde{Q}_0)$, является вполне геодезическим подмногообразием нормального расслоения с метрикой Сасаки. Если поверхность полная и $r(Q_0, \xi) = r_0 = \max_{Q \in F^l} r(Q)$, то $R^k(\tilde{Q}_0)$ является полным римановым многообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 1.3.1, 1.3.2. а) Докажем голономность введенного нами ранее дифференцируемого распределения $L^k(\tilde{Q})$ на нормальном расслоении NF^l . Пусть X, Y – регулярные векторные поля на NF^l такие, что

$$X(\tilde{Q}), Y(\tilde{Q}) \in L^k(\tilde{Q}).$$

В силу горизонтальности распределения $L^k(\tilde{Q})$ векторные поля X, Y – горизонтальные. Поэтому $X = (\pi_* X)^H, Y = (\pi_* Y)^H$. Так как $X = x^i \frac{\partial}{\partial u^i} + x^{l+\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$, то

$$(1.3.3) \quad \pi_* X = x^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Горизонтальное поднятие вектора $a \in T_Q F^l$ с координатами a^i есть вектор [21]:

$$(1.3.4) \quad a^H = (a^1, \dots, a^l, -\mu_{1\tau|i} \xi^\tau a^i, \dots, -\mu_{p\tau|i} \xi^\tau a^i).$$

Из (1.3.3), (1.3.4) следует, что

$$(1.3.5) \quad \begin{aligned} X &= (x^1(u, \xi), \dots, x^l(u, \xi), -\mu_{1\tau|i}\xi^\tau x^i, \dots, -\mu_{\rho\tau|i}\xi^\tau x^i), \\ Y &= (y^1(u, \xi), \dots, y^l(u, \xi), -\mu_{1\tau|i}\xi^\tau y^i, \dots, -\mu_{\rho\tau|i}\xi^\tau y^i). \end{aligned}$$

Скобка Ли векторных полей X, Y равна

$$(1.3.6) \quad [X, Y] = \left(\frac{\partial x^a}{\partial v^b} y^b - \frac{\partial y^a}{\partial v^b} x^b \right) \frac{\partial}{\partial v^a},$$

где $\frac{\partial}{\partial v^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^{l+\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$. Подставив (1.3.5) в (1.3.6), получим

$$(1.3.7) \quad [X, Y]^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} y^j - \frac{\partial y^i}{\partial u^j} x^j - \mu_{\alpha\tau|j} \left(y^j \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} - x^j \frac{\partial y^i}{\partial \xi^\alpha} \right) \xi^\tau,$$

$$(1.3.8) \quad \begin{aligned} [X, Y]^{l+\beta} &= -y^k \frac{\partial}{\partial u^k} (\mu_{\beta\tau|j} \xi^\tau x^j) + x^k \frac{\partial}{\partial u^k} (\mu_{\beta\tau|j} \xi^\tau y^j) \\ &\quad + (\mu_{\alpha\tau|k} \xi^\tau y^k) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\mu_{\beta\tau|j} \xi^\tau x^j) - (\mu_{\alpha\tau|k} \xi^\tau x^k) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\mu_{\beta\tau|j} \xi^\tau y^j). \end{aligned}$$

Так как в точке Q_0 $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$, то в точке Q_0 (1.3.7), (1.3.8) примут вид:

$$(1.3.9) \quad [X, Y]^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} y^j - \frac{\partial y^i}{\partial u^j} x^j,$$

$$(1.3.10) \quad [X, Y]^{l+\beta} = (y^i x^k - x^j y^k) \xi^\tau \frac{\partial \mu_{\beta\tau|j}}{\partial u^k}.$$

На поверхности F^l локальные координаты выбраны так, что в точке Q_0 подпространство $L^k(Q_0, \xi)$ натянуто на первые k базисных векторов и векторы

$$\pi_*(X(\tilde{Q}_0)) = (1, 0, \dots, 0); \quad \pi_*(Y(\tilde{Q}_0)) = (0, 1, \dots, 0).$$

Из (1.3.4) следует, что $X(\tilde{Q}_0) = (1, 0, \dots, 0); Y(\tilde{Q}_0) = (0, 1, \dots, 0)$. Пусть нормальный вектор ξ совпадает с базисным вектором n_1 . Тогда $\xi = (1, 0, \dots, 0)$. С учетом конкретизации координат равенство (1.3.10) имеет вид:

$$(1.3.11) \quad [X, Y]^{l+\beta} = \frac{\partial \mu_{\beta 1|2}}{\partial u^1} - \frac{\partial \mu_{\beta 1|1}}{\partial u^2}.$$

Уравнения Риччи для погружения поверхности в риманово пространство M^n в локальных координатах $v^a = v^a(u^1, \dots, u^l)$ имеют вид [25]:

$$(1.3.12) \quad \begin{aligned} &\mu_{\tau\sigma|j,k} - \mu_{\tau\sigma|k,j} + \sum_{\rho} (\mu_{\rho\tau|j} \mu_{\rho\sigma|k} - \mu_{\rho\tau|k} \mu_{\rho\sigma|j}) \\ &\quad + g^{lh} (A_{lj}^\tau A_{hk}^\sigma - A_{lk}^\tau A_{hj}^\sigma) + R_{abc}^d v_j^b v_k^c n_\sigma^a n_{\tau|d} = 0. \end{aligned}$$

Так как вдоль поверхности $g_{\alpha\beta}^\perp = \delta_{\alpha\beta}$, в точке Q_0 $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$, $\Gamma_{ij}^k = 0$ и по условию леммы в точках поверхности выполняется равенство (1.3.1), то для $\sigma = 1$, $\tau = \beta$, $j = 2$, $k = 1$ уравнения Риччи в точке Q_0 переписутся следующим образом:

$$(1.3.13) \quad \frac{\partial \mu_{\beta 1, 2}}{\partial u^1} - \frac{\partial \mu_{\beta 1, 1}}{\partial u^2} + g^{sh} (A_{s2}^\beta A_{h1}^1 - A_{s2}^\beta A_{h2}^1) = 0.$$

В силу специального выбора системы координат в точке Q_0 и параболичности поверхности $A_{s1}^1 = A_{s2}^1 = 0$. Поэтому уравнения (1.3.13) приведутся к виду

$$(1.3.14) \quad \frac{\partial \mu_{\beta 1, 2}}{\partial u^1} - \frac{\partial \mu_{\beta 2, 1}}{\partial u^2} = 0.$$

Из (1.3.11), (1.3.14) следует, что

$$(1.3.15) \quad [X, Y]^{l+\beta} = 0.$$

Уравнения Кодацци для поверхностей риманова пространства имеют вид [25]:

$$(1.3.16) \quad A_{ij,k}^\sigma - A_{ik|j}^\sigma = \sum_\tau (\mu_{\tau\sigma,k} A_{ij}^\tau - \mu_{\tau\sigma,j} A_{ik}^\tau) + R_{abcd} v_i^a v_j^c v_k^d n_\sigma^b = 0.$$

В точке Q_0 в силу условия (1.3.1) и равенства $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$ уравнения Кодацци переписутся следующим образом:

$$(1.3.17) \quad \frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^k} - \frac{\partial A_{ik}^\alpha}{\partial u^j} = 0.$$

Условие (1.3.1) дает такой же вид уравнений Риччи и уравнений Кодацци, как для поверхностей в евклидовом пространстве.

По определению распределения $L^k(\tilde{Q})$ проекции векторных полей X, Y на базу F^l удовлетворяют условию:

$$(1.3.18) \quad \sum_\alpha \xi^\alpha A_{ij}^\alpha x^i = 0; \quad \sum_\alpha \xi^\alpha A_{ij}^\alpha y^i = 0.$$

Продифференцируем (1.3.18) по u^k , умножим на y^k и просуммируем по k . Тогда получим, что в точке Q_0 :

$$(1.3.19) \quad \sum_\alpha \xi^\alpha A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^k} y^k = - \sum_\alpha \xi^\alpha \frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^k} x^i y^k.$$

Из уравнений (1.3.17), (1.3.18) и (1.3.19) следует, что

$$(1.3.20) \quad \sum_\alpha \xi^\alpha A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^k} y^k = \sum_\alpha \xi^\alpha A_{ij}^\alpha y^k \frac{\partial x^i}{\partial u^j} y^k = 0.$$

Аналогично,

$$(1.3.21) \quad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A_{ij}^{\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial u^k} x^k = 0.$$

Поэтому

$$(1.3.22) \quad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A_{ij}^{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k} y^k - \frac{\partial y^i}{\partial u^k} x^k \right) = 0.$$

Это означает, что $\pi_*[X, Y] \subset L^k(Q_0, \xi)$. Из (1.3.15) следует, что $[X, Y]$ – горизонтальный вектор. Поэтому из (1.3.9) следует, что $[X, Y] \subset L^k(\tilde{Q}_0)$. Но так как Q_0 – произвольная точка поверхности, то $[X, Y] \subset L^k(\tilde{Q})$. Так как выполняется условие теоремы Фробениуса, то распределение $L^k(\tilde{Q})$ голономно, т.е. через каждую точку $\tilde{Q} \in F^l$ проходит единственное k -мерное многообразие $R^k(\tilde{Q})$, касательные пространства к которому совпадают с плоскостями распределения $L^k(\tilde{Q})$.

б) Проекция слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$ на базу F^l есть регулярное подмногообразие $R^k(Q_0, \xi)$ поверхности F^l . Докажем вполне геодезичность слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$ в нормальном расслоении с метрикой Сасакии $R^k(Q_0, \xi)$ в объемлющем римановом пространстве M^n . Выберем на F^l локальные координаты так, чтобы подмногообразие $R^k(Q_0, \xi)$ было координатной поверхностью $u^1, \dots, u^k$. Тогда слой $R^k(\tilde{Q}_0)$ имеет следующее параметрическое задание: $v^1 = u^1, \dots, v^k = u^k$; $v^{k+1} = 0, \dots, v^l = 0$, $v^{l+\alpha} = \xi^{\alpha}(u^1, \dots, u^k)$. Касательное пространство к $R^k(\tilde{Q}_0)$ натянуто на векторы:

$$(1.3.23) \quad V_s = \left(0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial u^s} \right) \quad (s = 1, \dots, k).$$

С другой стороны, эти векторы являются горизонтальным поднятием касательных векторов $\frac{\partial}{\partial u^s}$ к подмногообразию $R^k(\tilde{Q}_0, \xi)$

$$\frac{\partial}{\partial u^s} = (0, \dots, 1, \dots, 0).$$

Из (1.3.4) следует, что

$$(1.3.24) \quad \left(\frac{\partial}{\partial u^s} \right)^H = (0, \dots, 1, \dots, 0, -\mu_{1\tau, s} \xi^{\tau}, \dots, -\mu_{p\tau, s} \xi^{\tau}).$$

Из (1.3.23), (1.3.24) следует, что вдоль слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$

$$(1.3.25) \quad \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial u^s} + \mu_{\alpha\tau, s} \xi^{\tau} = 0.$$

То есть нормальное векторное поле $\xi(u^1, \dots, u^k)$, которое соответствует слою $R^k(\tilde{Q}_0)$, параллельно в нормальной связности поверхности F^l вдоль подмногообразия

$R^k(Q_0, \xi)$. Выберем нормальное векторное поле n_1 так, чтобы в точках $R^k(Q_0, \xi)$ оно совпадало с полем $\xi(u^1, \dots, u^k)$. Тогда вдоль $R^k(Q_0, \xi)$

$$(1.3.26) \quad \mu_{\alpha 1|s} = 0 \quad (s = 1, \dots, k).$$

В новых координатах $R^k(\tilde{Q}_0)$ имеет следующее параметрическое задание:

$$v^s = u^s \quad (s = 1, \dots, k); \quad v^{k+1} = \dots = v^l = 0; \quad \xi^1 = 1, \dots, \xi^p = 0.$$

При этом векторные поля X, Y имеют отличными от нуля только первые k координат. Пусть $\tilde{\nabla}$ – ковариантная производная в метрике нормального расслоения. Тогда в точке Q_0

$$[\tilde{\nabla}_X Y]^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^k} x^k + \tilde{\Gamma}_{js}^i x^j y^s; \quad [\tilde{\nabla}_X Y]^{l+\alpha} = \tilde{\Gamma}_{js}^{l+\alpha} x^j y^s.$$

Из леммы 1.2.2 следует

$$(1.3.27) \quad \begin{aligned} [\tilde{\nabla}_X Y]^i &= \frac{\partial y^i}{\partial u^k} x^k; \\ [\tilde{\nabla}_X Y]^{l+\alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha 1|j}}{\partial u^s} + \frac{\partial \mu_{\alpha 1|s}}{\partial u^j} \right) x^j y^s. \end{aligned}$$

Из (1.3.26), (1.3.27) следует

$$(1.3.28) \quad [\tilde{\nabla}_X Y]^{l+\alpha} = 0,$$

и векторное поле $\tilde{\nabla}_X Y$ – горизонтальное. Из (1.3.21), (1.3.27), (1.3.28) получаем, что

$$(1.3.29) \quad \tilde{\nabla}_X Y \subset L^k(\tilde{Q}_0).$$

Но $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A(X, Y)$, где ∇ – ковариантная производная в метрике слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$, $A(X, Y)$ – вектор второй квадратичной формы слоя, который перпендикулярен к касательному пространству слоя. Из (1.3.29) следует, что $\tilde{\nabla}_X Y$ – вектор, касательный к слою. Поэтому $A(X, Y) = 0$ и слой $R^k(\tilde{Q}_0)$ – вполне геодезическое подмногообразие.

Аналогично доказывается вполне геодезичность слоя $R^k(Q_0, \xi)$ в метрике поверхности F^l . По лемме 1.1.1 вторые квадратичные формы поверхности F^l в точках $R^k(Q_0, \xi)$ обращаются в нуль. Поэтому слой $R^k(Q_0, \xi)$ является вполне геодезической поверхностью в объемлющем римановом многообразии M^n .

с) Пусть Q – внутренняя точка слоя, γ – геодезическая в слое. Пусть Q_0 – граничная точка слоя, $Q_0 \in \gamma$. Вдоль геодезической γ направим координатную линию u^1 и введем на поверхности координаты так, чтобы вдоль γ $\Gamma_{ij}^k = 0$, и выберем нормальные векторные поля n_α так, чтобы $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$. При этом слой остается координатной поверхностью $u^1, \dots, u^k$. Пусть A_{ij}^1 – вторая квадратичная форма поверхности F^l , отвечающая нормали $n_1 = \xi$. Тогда из параболичности поверхности следует, что $A_{ij}^1 = 0$ ($i, j = 1, \dots, k$). Поэтому из (1.3.16), (1.3.17) следует, что вдоль геодезической уравнения Кодаши для формы A_{ij}^1 имеют вид: $\nabla_1 A_{ij}^1 = 0$. Пусть X – вектор в

точке Q_0 такой, что $X \subset L(Q, \xi)$, т.е. $A_{ij}^1 x^i = 0$. Параллельно перенесем вектор X вдоль геодезической в точку Q , вдоль геодезической получим векторное поле $X(u_1)$. Тогда

$$\nabla_1 A_{ij}^1 X^i(u^1) = 0,$$

т.е. $X(Q) \subset L^k(Q, \xi)$. Отсюда следует, что ранг второй квадратичной формы поверхности относительно нормального поля ξ в точках границы слоя $R^k(Q_0, \xi)$ не может уменьшаться. Пусть $r(Q, \xi) = r_0 = \max_{Q \in F^l} r(Q)$ и поверхность F^l — полная. Тогда $r(Q_0, \xi) = r_0$. Через точку Q также проходит слой, для которого Q является внутренней точкой. В силу единственности слоя он является продолжением слоя $R^k(Q, \xi)$. То есть геодезические слоя $R^k(Q, \xi)$ неограниченно продолжаются. Из теоремы Хопфа–Ринова [35] следует полнота слоя как риманова многообразия.

Из определения метрики N_g на нормальном расслоении и параллельности в нормальной связности поверхности нормального векторного поля ξ вдоль $R^k(Q, \xi)$ следует, что отображение проекции $\pi: R^k(\tilde{Q}) \rightarrow R^k(Q, \xi)$ является изометрией. Поэтому граничные точки $R^k(\tilde{Q})$ и $R^k(Q_0, \xi)$ соответствуют друг другу и из полноты $R^k(Q, \xi)$ следует полнота $R^k(\tilde{Q})$.

Без условия (1.3.1) в общем случае мы не можем даже утверждать, что распределение на нормальном расслоении интегрируемо.

Аналогичный результат получен для кэлеровых параболических подмногообразий в кэлеровых многообразиях, если вдоль подмногообразия выполняется условие

$$(1.3.30) \quad R(X, Y)\xi = \lambda(Q, X, Y)J\xi,$$

где X, Y — векторы, касательные к слою, ξ — нормаль к слою, J — комплексная структура, λ — функция. В этом случае слои будут вполне геодезическими кэлеровыми подмногообразиями.

Вдоль кэлеровых подмногообразий в кэлеровом многообразии постоянной голоморфной кривизны условие (1.3.30) выполняется.

При доказательстве используется вместо нормального расслоения расслоение комплексных нормальных векторов, где слой — комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{p-1}$, p — комплексная коразмерность подмногообразия. Дифференцируемое горизонтальное распределение мы получаем на этом многообразии [17].

Некоторые утверждения леммы 1.3.1 имеют место для k -омбилических поверхностей в римановом пространстве. В пространствах постоянной кривизны их изучал Г. Рекшгелль [45]. Здесь вместо вполне геодезических слоев возникают вполне омбилические слои.

4. Полные параболические подмногообразия в римановом пространстве. Пусть $\rho(l) - 1$ есть максимальное число линейно независимых векторных полей на сфере S^{l-1} ,

$$\rho((2k+1)2^{c+4d}) = 2^c + 8d, \quad \text{где } 0 \leq c \leq 3.$$

Тогда $\nu(l)$ есть максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\rho(l - \nu(l)) \geq \nu(l) - 1.$$

Число $\nu(l)$ имеет порядок $\log_2 l$. Мы имеем $\nu(l) = l -$ (наивысшая степень $2 \leq l$) для $l \leq 24$, и $\nu(l) = 0$ для $l = 2^k$, или $l = 16q$, где $q \leq 16^3$ и $q \not\equiv 1 \pmod{16}$.

Кроме того, $\nu(l) \leq \frac{1}{2}(l-1)$ и $\nu(l) \leq 8d-1$ для $l \leq 16^d$, где d – любое положительное целое число.

Найдем условия вполне геодезичности полных параболических подмногообразий. Справедлива

ТЕОРЕМА 1.4.1. *Пусть F^l – компактная k -параболическая поверхность в римановом пространстве M^{l+p} . Если в точках поверхности выполняется условие (1.3.1) и одно из следующих требований:*

- 1) *двумерная секционная кривизна объемлющего пространства $\gamma_{2|M} > 0$, порядок параболичности $k \geq (l+p)/2$;*
- 2) *двумерная секционная кривизна поверхности $\gamma_{2|F} > 0$, $k \geq \frac{l}{2}$;*
- 3) *$\gamma_{2|F} > 0$, $k > \nu(l)$, в точках поверхности выполняется условие: $R(X, Y)X = cY$, где $c = \text{const} > 0$, а $X, Y \in T_Q F^l$,*

то $k = l$ и поверхность является вполне геодезическим подмногообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1. При выполнении условия 1) вместо компактности подмногообразия можно требовать полноту подмногообразия и компактность объемлющего пространства.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.2. Требование положительности секционной кривизны можно ослабить в 1), 2) и заменить условием положительности s -Риччи кривизны. Тогда в предположении 1) условие на порядок параболичности будет следующим: $k \geq \frac{l+p+s-1}{2}$; в предположении 2) $k \geq \frac{l+s-1}{2}$. Определение s -Риччи кривизны и соответствующую теорему мы приведем в главе 2, посвященной седловым подмногообразиям.

ЛЕММА 1.4.1 [30]. *Пусть F_1^l, F_2^l – компактные вполне геодезические подмногообразия в полном римановом пространстве положительной секционной кривизны M^n . Если $l \geq \frac{n}{2}$, то подмногообразия пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4.1. 1), 2). Пусть Q_0 – точка на поверхности F^l с минимальным порядком параболичности, т.е. $r(Q_0) = r_0 = l - k$, ξ_0 – единичная нормаль в этой точке, для которой $r(Q_0, \xi_0) = r_0 = l - k$. По лемме 1.3.1 через точку Q_0 проходит полное вполне геодезическое подмногообразие $R^k(Q_0, \xi_0)$, вдоль которого нормаль ξ_0 стационарна. Проведем через точку Q_0 на поверхности F^l геодезические, перпендикулярные слою $R^k(Q_0, \xi_0)$. Они образуют поверхность F^{l-k} . Возьмем точку $Q \in F^{l-k}$, которая лежит в такой малой окрестности Q_0 , что выполняется условие $r(Q) = r_0 = l - k$, n_α – косоугольный базис нормалей в точке Q , для которого $r(Q, n_\alpha) = r_0$. Для каждой нормали ξ в точке Q , для которой $r(Q, \xi) = r_0$, по лемме 1.3.1 существует единственное полное вполне геодезическое подмногообразие $R^k(Q, \xi)$. Из требования на порядок параболичности в пунктах 1), 2) и леммы 1.4.1 следует, что $R^k(Q, \xi)$ пересекают $R^k(Q_0, \xi_0)$. Пусть $Q(\xi)$ – точка пересечения слоев $R^k(Q_0, \xi_0), R^k(Q, \xi)$.

Пусть $QQ_0Q(\xi)$ – треугольник на поверхности F^l , составленный из кратчайших. Если точка Q достаточно близка к точке Q_0 , а нормаль ξ близка к $\xi_0(Q)$, где $\xi_0(Q)$

– результат параллельного переноса в нормальном расслоении поверхности вдоль геодезической Q_0Q нормали ξ_0 , то слой $R^k(Q, \xi)$ лежит в малой окрестности слоя $R^k(Q_0, \xi_0)$. Если бы это не выполнялось, то после предельного перехода $Q \rightarrow Q_0$, $\xi \rightarrow \xi_0$ через точку Q_0 проходили бы два вполне геодезических слоя размерности k , вдоль которых нормаль ξ_0 была бы параллельна в нормальном расслоении. Это противоречило бы предположению, что $r(Q_0, \xi_0) = l - k$. Поэтому кратчайшие $Q_0Q(\xi)$ и $Q_0Q(\xi)$ можно выбрать так, чтобы они были близки. Натянем на треугольник поверхность F , соединяя единственной геодезической, лежащей в малой окрестности, такие точки $P_1 \in Q_0Q(\xi)$, $P_2 \in QQ(\xi)$, что

$$\frac{P_1Q(\xi)}{P_2Q(\xi)} = \frac{Q_0Q(\xi)}{QQ(\xi)}.$$

Поверхность F регулярна. Пусть $\tau' = Q_0Q(\xi)$, $s' = Q_0Q$, τ – длина дуги Q_0P_1 , s – естественный параметр на геодезической Q_0Q и s – параметр на кратчайшей P_1P_2 , отсчитываемый от точки P_1 и пропорциональный длине кратчайшей P_1P_2 с коэффициентом пропорциональности Q_0Q/P_1P_2 , $F(\tau, s)$ – регулярная параметризация поверхности, где $0 \leq \tau \leq \tau'$, $0 \leq s \leq s'$, $F(0, 0) = Q_0$, $F(0, s') = Q$, $F(\tau', s') = F(\tau', 0) = Q(\xi)$. Пусть I – оператор параллельного переноса вдоль координатных линий поверхности $F(\tau, s)$, $\tau = \text{const}$, $s = \text{const}$, в объемлющем пространстве. Выберем $\xi_1 = \xi(0, 0)$ так, чтобы его образ при параллельном переносе вдоль кратчайшей Q_0Q в точку Q совпадал с вектором ξ . На поверхности $F(\tau, s)$ определим векторное поле $\xi(\tau, s)$ [40]:

$$\begin{aligned}\xi(0, s) &= I_{Q_0F(0, s)}\xi_1; \\ \xi(\tau, s') &= I_{QF(\tau, s')}\xi(0, s'); \\ \xi(\tau, s) &= I_{F(\tau, s')F(\tau, s)}\xi(\tau, s').\end{aligned}$$

Другими словами, вектор $\xi(\tau, s)$ получается из вектора ξ_1 параллельным переносом вдоль ломаной $F(0, 0)F(\tau, s')F(\tau, s)$, составленной из кратчайших поверхности F^l Q_0Q , $QF(\tau, s')$, $F(\tau, s')F(\tau, s)$.

Параллельно перенесем вектор кривизны пространства M^n $R\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\xi(\tau, s)$ вдоль ломаной $F(\tau, s)F(\tau, s')F(0, s')F(0, 0)$ в точку Q_0 . Полученное в касательном пространстве $T_{Q_0}M^n$ векторное поле обозначим $R\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\xi(\tau, s)$. Обозначим через $w = \partial F(\tau, s)$ границу поверхности, на которой направление обхода выберем так, чтобы $I_w\xi_1 = I_{F(\tau', 0)Q_0}\xi(\tau', 0)$. Тогда [40]

$$(1.4.1) \quad I_w\xi_1 - \xi_1 = - \int_0^{\tau'} \int_0^{s'} R\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\xi(\tau, s) ds d\tau.$$

Так как $\xi(0, s') = \xi$ – нормаль к поверхности, то по лемме 1.3.1 $\xi(\tau, s')$ – нормаль к поверхности в точках кратчайшей $QQ(\xi)$. Поэтому $\xi(\tau, s) = \tilde{\xi}(\tau, s) + sa(\tau, s)$, где $\tilde{\xi}(\tau, s)$ – нормаль к поверхности F^l , $a(\tau, s)$ – касательный, ограниченный по модулю, вектор к поверхности F^l . Так как по условию (1.3.1)

$$R\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\tilde{\xi}(\tau, s) = 0,$$

то из формулы (1.4.1) следует, что вектор $I_w \xi_1 - \xi_1$ имеет длину порядка s'^2 . При этом используется ограниченность τ в силу компактности поверхности.

Если непосредственно следить за параллельным переносом по контуру w вектора ξ_1 , то в точке $Q(\xi)$ по лемме 1.3.1 $I\xi_1$ – нормаль к поверхности. Так как кратчайшая $Q(\xi)Q_0$ лежит на вполне геодезическом подмногообразии $R^k(Q_0, \xi_0)$, то вектор $I_w \xi_1$ в точке Q_0 перпендикулярен слою $R^k(Q_0, \xi_0)$. Поэтому проекция $I_w \xi_1 - \xi_1$ на плоскость $L^k(Q_0, \xi_0)$, касательную к слою $R^k(Q_0, \xi_0)$, определяется вектором ξ_1 .

Выберем координаты в пространстве M^n следующим образом: поверхность F^l – координатная поверхность $u^1, \dots, u^l$, слой $R^k(Q_0, \xi_0)$ – координатная поверхность $u^{l-k+1}, \dots, u^l$, n_α – параллельные в нормальной связности поверхности F^l вдоль геодезических, которые выходят из точки Q_0 , ортогональные единичные нормальные векторные поля. Выпустим в направлении нормали $\xi = \xi^\alpha n_\alpha$ геодезическую $\exp \xi$, u^i – координаты Ферми [54] на поверхности F^l вдоль геодезической QQ_0 , на которой параметр $u^1 = s$ есть длина дуги, (u^i, ξ^α) – координаты в пространстве M^n в окрестности поверхности F^l . Вдоль поверхности F^l коэффициенты метрического тензора объемлющего пространства M^n

$$(1.4.2) \quad \sigma_{il+\alpha} = 0 \quad (i = 1, \dots, l; \alpha = 1, \dots, n-l = p).$$

Перенесем параллельно в связности многообразия M^n нормаль ξ из точки Q в точку Q_0 . Тогда векторное поле $\xi(s)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial s} + \tilde{\Gamma}_{1b}^a \xi^b = 0.$$

В точке Q $\frac{\partial \xi^i}{\partial s} = -\tilde{\Gamma}_{1l+\alpha}^i \xi^\alpha$, где $\tilde{\Gamma}_{bc}^a$ – символы Кристоффеля метрики σ многообразия M^n .

Тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка компонента вектора ξ_1 , касательная к слою $R^k(Q_0, \xi_0)$, имеет координаты:

$$(1.4.3) \quad \xi_1^j \approx -\tilde{\Gamma}_{1,l+\alpha}^j \xi^\alpha s' \quad (j = l-k+1, \dots, l).$$

Так как вдоль геодезической QQ_0 $\sigma_{ab} = \delta_{ab}$, то

$$\tilde{\Gamma}_{1,l+\alpha}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \sigma_{l+\alpha j}}{\partial u^1} - \frac{\partial \sigma_{1l+\alpha}}{\partial u^j} \right).$$

Из (1.4.2) следует, что

$$(1.4.4) \quad \tilde{\Gamma}_{1,l+\alpha}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial \xi^\alpha}.$$

С другой стороны, вторые квадратичные формы поверхности F^l [25]:

$$(1.4.5) \quad A_{ij}^\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi^\alpha}.$$

Из (1.4.3)–(1.4.5) следует, что

$$\xi_1^j \approx -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} A_{1j}^{\alpha} \xi^{\alpha} s'.$$

Так как компонента $I_w \xi_1 - \xi_1$, касательная к слою, имеет по крайней мере порядок $(s')^2$, то при стремлении Q к Q_0 получим, что в точке Q_0 $A_{1j}^{\alpha} \xi^{\alpha} = 0$; так как вектор ξ – произвольный из некоторой области на сфере в нормальном пространстве и геодезическая $Q_0 Q$ – любая из поверхности F^{l-k} , перпендикулярной в точке Q_0 к слою $R^k(Q_0, \xi_0)$, то

$$A_{sj}^{\alpha} = 0 \quad (s = 1, \dots, l-k; j = l-k+1, \dots, l).$$

Но $A_{ij}^{\alpha} = 0$ ($i, j = l-k+1, \dots, l$) по лемме 1.1.1, т.е. если $X \in L^k(Q_0, \xi_0)$, то

$$(1.4.6) \quad A_{ij}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-l; j = 1, \dots, l).$$

Напомним, что максимальная размерность подпространства $L(Q) \subset T_Q F^l$, которое является решением системы уравнений (1.4.6), называется внешним нуль-индексом точки поверхности и обозначается $\mu(Q)$. Из (1.4.6) следует, что в окрестности слоя $R^k(Q_0, \xi_0)$ $\mu(Q) \geq k$. Из максимальной ранга $r(Q_0) = r_0 = l-k$ следует, что $\mu(Q) = k$. Плоскости $L^k(Q)$ на поверхности F^l образуют дифференцируемое распределение. Оно голономно и слои $R^k(Q)$ являются вполне геодезическими многообразиями, которые совпадают со слоями $R^k(Q, \xi)$, при условии, что $r(Q, \xi) = r_0 = l-k$. Слои $R^k(Q)$, с одной стороны, не пересекаются в силу единственности слоя, который проходит через каждую точку из окрестности $R^k(Q_0, \xi_0)$. С другой стороны, из условий теоремы 1.4.1 и леммы 1.4.1 следует, что они пересекаются, если $k \neq l$. Поэтому $k = l$ и слой совпадает с поверхностью F^l , которая является вполне геодезическим подмногообразием риманова пространства M^n .

3) Из условий теоремы следует, что вдоль слоя $R^k(Q_0, \xi_0)$ поверхность F^l будет однозначно проектируемой [46], т.е. нормали к F^l в точке Q_0 после параллельного переноса по любой геодезической $R^k(Q_0, \xi_0)$ остаются трансверсальными к поверхности F^l . Нормаль ξ_0 перенесем параллельно в нормальной связности вдоль геодезических $Q_0 Q$ в точки $Q \in F^{l-k}$ и проведем слои $R^k(Q_0, \xi_0(Q))$. Указанные слои задают линейчатое строение F^l в окрестности $R^k(Q_0, \xi_0)$. Тогда из требований 3) следует, что $k = l$ и выполняется утверждение теоремы [46].

Для кэлеровых подмногообразий вместо секционной кривизны рассматривают бисекционную кривизну.

Голоморфной бисекционной кривизной для векторов X и Y , касательных к кэлерову многообразию, называют величину

$$B(X, Y) = \frac{\langle R(X, JX)Y, JY \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle},$$

где R – тензор кривизны этого многообразия.

В случае, когда объемлющее пространство является стандартной сферой или комплексным проективным пространством, В. Ровенский доказал более сильный результат. Имеет место

ТЕОРЕМА 1.4.2 [46]. а) Пусть F^l – полная k -параболическая поверхность положительной секционной кривизны в сферическом пространстве S^n . Тогда если $k > \nu(l)$, то F^l является вполне геодезической стандартной сферой $S^l \subset S^n$.

б) Пусть F^l – полное кэлериово k -параболическое подмногообразие положительной бисекционной кривизны в комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$. Тогда если $k > 0$, то F^l является вполне геодезическим стандартным проективным пространством $\mathbb{CP}^{l/2} \subset \mathbb{CP}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для k -параболических поверхностей в S^n , $\mathbb{CP}^n$ эта теорема обобщает теоремы Феруса и Эйба 3.4.3, 3.4.4 из [3], доказанные ими для сильно параболических подмногообразий.

Для доказательства теоремы 1.4.2 докажем ряд лемм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Открытое C^2 -гладкое подмногообразие $M^{n+\nu}$ ($n > 0$) риманова пространства $\overline{M}^m$ вместе с C^1 -слоением $\{L\}$ на ν -мерные вполне геодезические в $\overline{M}^m$ слои назовем линейчатой поверхностью.

ЛЕММА 1.4.2. а) Пусть $M^{n+\nu} \subset \overline{M}^m$ – линейчатая поверхность и вдоль полной образующей $L_0 \in \{L\}$ кривизна

$$(1.4.7) \quad \overline{R}(X, Y)X = -kY \quad (k = \text{const} > 0, X \in TL_0, Y \in TL_0^\perp, \|X\| = 1),$$

$$(1.4.8) \quad K(X, Y) > 0.$$

Тогда размерность образующих $\nu < \rho(n)$.

б) Пусть в условиях п. а) в окрестности некоторой точки $a \in M$ имеется почти комплексная структура $J: TM \rightarrow TM$ со свойством

$$(1.4.9) \quad J(TL) = TL, \quad \nabla J = 0.$$

Тогда вещественная размерность образующих $\nu \leq 2$; если $\nu = 2$, то $n = 4b$, где $b = 1, 2, 3, \dots$.

Прежде чем доказывать лемму 1.4.2, приведем некоторые факты из вариационной теории геодезических.

Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ – естественно параметризованная геодезическая в римановом многообразии. Векторное поле $Y(t)$ на M вдоль γ называется якобиевым, если оно удовлетворяет системе уравнений $\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) + R(Y(t), \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$ ($t \in I$). Непрерывное отображение $V(-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$ называется геодезической вариацией, если для любого числа $|s| < \varepsilon$ кривая $V_s(t) = V(s, t)$ является геодезической.

Пусть $Y, \omega \in T_{\gamma(0)}M$ – произвольные векторы; $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ – гладкая кривая с условием $\dot{c}(0) = Y$; $z(s)$ – гладкое векторное поле на M вдоль $c(s)$ с условием $z(0) = \dot{\gamma}(0)$, $\dot{z}(0) = \omega$. Тогда отображение $V: (s, t) \rightarrow \exp_{c(s)}(tz(s))$, которое можно считать заданным на области $(-\varepsilon, \varepsilon) \times I \subset \mathbb{R}^2$, является геодезической вариацией. Обозначим e_1, e_2 канонические векторные поля на $\mathbb{R}^2$.

ЛЕММА 1.4.3. *Векторное поле вдоль γ*

$$Y(t) = dV(e_2)|_{[0,t)} \quad (t \in I)$$

есть единственное поле Якоби с начальными условиями $Y(0) = Y$, $\nabla_{\dot{\gamma}} Y|_{t=0} = \omega$. При этом выполнено равенство

$$\nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) = \nabla_{e_2}(dV(e_1))|_{[0,t)} \quad (t \in I).$$

Образующие $\{L\}$ линейчатой поверхности $M^{n+\nu} \subset \overline{M}^m$ составляют вполне геодезическое слоение $M^{n+\nu}$.

Векторные поля вдоль геодезической $\gamma \subset L_0$, индуцированные $\{L\}$, $\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) + R(Y(t), \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$, $Y(0) = Y \in TL_0^\perp$, $\nabla_{\dot{\gamma}} Y|_{t=0} = C_{\dot{\gamma}}(Y)$, называются L -параллельными полями Якоби [46]. Такие поля ввиду леммы 1.4.3 характеризуются уравнением первого порядка

$$(1.4.10) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) = C_{\dot{\gamma}}(Y(t)).$$

ЛЕММА 1.4.4 [46]. *Пусть линейчатая поверхность $M^{n+\nu} \subset \overline{M}^m$ удовлетворяет условиям леммы 1.4.2 а). Тогда линейный конулевой оператор C_X ($X \neq 0$) не имеет вещественных собственных векторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.4.4. Предположим противное, т.е. что для некоторой точки $a \in L_0$ найдутся единичные векторы $X \in T_a L_0$, $Y \in T_a L_0^\perp$ и число $\lambda \leq 0$ с условием

$$(1.4.11) \quad C_X(Y) = \lambda Y$$

(если $\lambda > 0$, то заменим X вектором $-X$ и получим $\lambda < 0$). Пусть $\gamma: R \rightarrow L_0(0)$, $\gamma(0) = a$, $\dot{\gamma}(0) = X$ — естественно параметризованная геодезическая и $Y(t)$ ($Y(0) = Y$) — L -параллельное поле Якоби вдоль γ . С учетом (1.4.10), (1.4.11) найдем производную в $\overline{M}^m$: $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}} Y|_{t=0} = \lambda Y + v$ ($v \in N_a M$). Так как $Y(t)$ есть также поле Якоби в $\overline{M}^m$ вдоль γ , то ввиду условия (1.4.7) оно удовлетворяет уравнению $\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) + kY(t) = 0$. Поэтому $Y(t) = \cos(\sqrt{k}t)\overline{Y} + \sin(\sqrt{k}t)(\lambda\overline{Y} + \overline{v})$, где $\overline{Y}$, $\overline{v}$ получены из векторов Y , v путем параллельного переноса в $\overline{M}^m$ вдоль γ . При некотором $0 < t_0 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ будет выполнено равенство $\cos(\sqrt{k}t_0) + \lambda \sin(\sqrt{k}t_0) = 0$ и, следовательно, ненулевой вектор $Y(t_0)$, лежащий в $T_{\gamma(t_0)} L_0^\perp \subset T_{\gamma(t_0)} M$, совпадает с $\sin(\sqrt{k}t_0)\overline{v}$. Иными словами, единичный вектор $v \in N_a M$ при $\overline{\nabla}$ -параллельном переносе вдоль γ в момент t_0 коснется поверхности M , т.е. $\overline{v} \in T_{\gamma(t_0)} L_0^\perp$.

Пусть $v(t) \in N_{\gamma(t)} M$ — параллельное поле вдоль γ , содержащее вектор v . Отождествим евклидовы пространства $\overline{T_{\gamma(t_0)} L_0^\perp}$ (все нормали к L_0 в $\overline{M}^m$) с $R^{m-\nu}$ на основании $\overline{\nabla}$ -параллельного переноса вдоль γ . Тогда полю $v(t)$ соответствует гладкая кривая на единичной сфере $S^{m-\nu-1} \subset R^{m-\nu}$, и расстояние между точками $v(0)$ и

$v(t_0)$ на сфере равно $\frac{\pi}{2}$, поскольку векторы $v(0)$ и $v(t_0)$ ортогональны. В частности, длина кривой

$$(1.4.12) \quad l = \int_0^{t_0} \|\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t)\| dt \geq \frac{\pi}{2}.$$

Из определения поля $v(t)$ следует

$$(1.4.13) \quad \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t) = -A_{v(t)}(\dot{\gamma}) \quad (t \in R).$$

Из условий (1.4.7), (1.4.8) с помощью формул Гаусса получаем

$$(1.4.14) \quad h^2(X, Y) = k - K(X, Y) \leq k \\ (X \in TL_0, Y \in TL_0^\perp, \|X\| = \|Y\| = 1).$$

Из (1.4.13), (1.4.14) следует $\|\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t)\| < \sqrt{k}$. Но тогда возникает противоречие с оценкой (1.4.12)

$$l \leq \int_0^{\pi/2\sqrt{k}} \|\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t)\| dt < \frac{\pi}{2\sqrt{k}} \cdot \sqrt{k} = \frac{\pi}{2},$$

что доказывает лемму 1.4.4.

Доказательство п. а) леммы 1.4.2. Пусть $a \in L_0$ — произвольная точка, $S^{n-1} \subset T_a L_0^\perp$ — единичная сфера и $\{e_1, \dots, e_\nu\}$ — базис в $T_a L_0$. Так как оператор C_X по лемме 1.4.4 не имеет вещественных собственных векторов, то, следуя Ферусу [27], построим ν линейно независимых векторных полей $\{\omega_i\}$, касающихся S^{n-1} : $\omega_i(Y) = C_{e_i} Y - \langle C_{e_i} Y, Y \rangle Y$ ($Y \in S^{n-1}$, $1 \leq i \leq \nu$). Действительно, в случае линейной независимости в некоторой $Y \in S^{n-1}$, $\sum_{i=1}^\nu \alpha_i \omega_i(Y) = 0$, вектор Y будет собственным для оператора C_X при $X = \sum_{i=1}^\nu \alpha_i e_i$, $\lambda = \langle C_X Y, Y \rangle$. Значит, $\nu < \rho(n)$, что доказывает п. а) леммы 1.4.2.

Доказательство п. б) леммы 1.4.2 опирается на лемму 1.4.4 и следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1.4.5. Пусть J — комплексная структура на евклидовых пространствах $R^{2\nu}$, R^{2n} ($n > 0$) и $D: R^{2\nu} \times R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ — билинейный оператор со свойством

$$(1.4.15) \quad D(JX, \cdot) = JD(X, \cdot) \quad (X \in R^{2\nu}).$$

Тогда если линейные операторы $D(X, \cdot)$ ($X \neq 0$) не имеют вещественных собственных векторов, то $\nu = 0$ либо $\nu = 1$ и $n = 2b$ ($b \in \mathbb{N}$).

Перед доказательством леммы 1.4.5 приведем известное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.1 [46]. Пусть $\mathbb{CP}^\nu \subset \mathbb{CP}^m$ комплексное проективное подпространство. Тогда при $1 < \nu < m$ нормальное векторное расслоение $N(\mathbb{CP}^\nu)$ не тривиальное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.4.5. Предположим противное, т.е. $\nu > 1$ (в случае $\nu = 1$, $n = 2b + 1$ всегда есть вещественный собственный вектор [27]). В пространстве $\mathbb{CP}^{n+\nu}$ зафиксируем подпространство $\mathbb{CP}_0^\nu = L_0$ и точку $a \in L_0$ и отождествим $R^{2\nu} = T_a L_0$, $R^{2n} = T_a L_0^\perp$. Ортонормированный базис $\{e_i, J\bar{e}_i\}$, $1 \leq i \leq \nu$, пространства $R^{2\nu}$ продолжим локально до гладких полей $\{e_i, J\bar{e}_i\}_{i \leq \nu}$ на многообразии $U = \exp_a(R^{2n})$ так, чтобы выполнялись равенства

$$(1.4.16) \quad \nabla_Y(\bar{e}_i) = D(e_i, Y), \quad (Y \in R^{2n}, 1 \leq i \leq \nu),$$

где D – оператор из условия леммы. Учитывая кэлеровость $\mathbb{CP}^{n+\nu}$ ($\nabla J = 0$) и свойство (1.4.15), из (1.4.16) получим

$$(1.4.17) \quad \nabla_Y(J\bar{e}_i) = D(Je_i, Y) \quad (Y \in R^{2n}, 1 \leq i \leq \nu).$$

В силу линейности ковариантного дифференцирования ∇ и оператора D из (1.4.16), (1.4.17) следует, что

$$\nabla_Y(\bar{X}) = D(X, Y) \quad (X \in R^{2n}, Y \in R^{2n}).$$

Рассмотрим $2n$ -параметрическое семейство комплексных подпространств $\{L = \mathbb{CP}^\nu\}$, касающихся над U J -инвариантного поля $\text{aff}\{\bar{e}_i, J\bar{e}_i\}_{i \leq \frac{\nu}{2}}$. Этим семейством вполне геодезических подмногообразий индуцируются сечения $\{Y\}$ нормального векторного расслоения $TL_0^\perp$, которые вдоль геодезических $\gamma \subset L_0$ являются полями Якоби в $\mathbb{CP}^{n+\nu}$. В силу предложения 1.4.1 семейство $\{L\}$ не может образовывать регулярного расслоения окрестности L_0 в $\mathbb{CP}^{n+\nu}$. Поэтому найдется сечение $Y_1 \in \{Y\}$ с нулем в некоторой точке $b \in L_0$. Ограничение $Y(t)$ этого сечения на геодезическую $\gamma \subset L_0$ ($\gamma(0) = a$), проходящую через точку b , тоже имеет нуль и удовлетворяет уравнению $\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) + Y(t) = 0$ ($Y(0) = Y \in R^{2n}$, $\|Y\|^2 = 1$). Следовательно, $Y(t) = (\cos t)\bar{Y} + (\lambda \sin t)\bar{Y}$ ($\bar{Y}(0) = Y$, $\nabla_{\dot{\gamma}} \bar{Y} = 0$). В силу леммы 1.4.3 и свойства (1.4.10) получаем собственный вектор $D(\dot{\gamma}(0), Y) = \lambda Y$, что противоречит условию. Лемма 1.4.5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. б) леммы 1.4.2. Конулевые операторы C_X ($X \neq 0$) по лемме 1.4.4 не имеют вещественных собственных векторов. Из (1.4.9) вытекает свойство (1.4.15):

$$B(JX, Y) = P(\nabla_Y(Y\bar{X})) = P((\nabla_Y J)X) + JP(\nabla_Y \bar{X}) = JC_X(Y).$$

Поэтому в силу леммы 1.4.5 $\nu = 0$ либо $\nu = 2$ и $n = 4b$ ($b \in \mathbb{N}$).

Если M однозначно проектируема, то некоторая область $G \subset M$ имеет строение линейчатой поверхности с образующей указанного вида.

ЛЕММА 1.4.6. Пусть M^l – полная поверхность положительной секционной кривизны а) в S^m , б) являющаяся кэлеровой в $\mathbb{CP}^m$, у которой ранг вторых квадратичных форм $0 < r < l$. Тогда некоторая область $G \subset M$ имеет строение линейчатой поверхности с $(l - r)$ -мерной образующей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $M^l \subset S^m$. Пусть $\xi_0 \in T_a M^\perp$ – единичная нормаль ранга r , $L_0 \subset M$ – образующая для ξ_0 из леммы 1.3.1. Покажем, что окрестность $G \subset M$ образующей L_0 однозначно проектируется на большую сферу $S^{l+1} \subset S^m$, которая содержит L_0 и касается ξ_0 .

Действительно, направления проектирования над L_0 получаются при параллельном разнесении в S^m векторов из $T_a M^\perp$ вдоль геодезических $\gamma \subset L_0$. Как показано в доказательстве леммы 1.4.4, такие единичные векторы не касаются M на L_0 . Поэтому некоторая окрестность L_0 в M однозначно проектируется на сферу S^{l+1} .

В силу леммы 1.4.4 область G имеет линейчатое строение с образующими $\{L\} \in L_0$, что и требовалось показать.

Случай кэлеровой поверхности M^l в $\mathbb{CP}^m$ рассматривается аналогично, причем можно ослабить условие, потребовав положительность бисекционной кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4.2. а) Если $S^l \subset S^m$, то в силу леммы 1.4.6 а) на области $G \subset M$ моделируется линейчатая поверхность, удовлетворяющая условиям леммы 1.4.2 а). Поэтому $l - r \leq \rho(r)$ и, тем более, $r \geq l - \nu(l)$, что и требовалось.

б) Предположим противное, т.е. $0 < r < l$. Тогда по комплексному аналогу леммы 1.3.1 [17] на M^l лежит полная образующая L_0 вида $\mathbb{CP}^{(l-r)/2}$.

Из доказательства леммы 1.4.6 следует, что окрестность $G \subset M$ образующей L_0 однозначно проектируется на подпространство $\mathbb{CP}^{l/2+1} \subset \mathbb{CP}^m$. Проекция $\bar{G}$ области G является кэлеровой сильно параболической гиперповерхностью [10] и содержит образующую L_0 . В этом случае $\bar{G}$ – вполне геодезическая [1]. Но тогда и область G – вполне геодезическая в $\mathbb{CP}^m$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

В. Ю. Ровенский нашел условия на кривизну, при которых линейчатая или параболическая поверхность в сфере S^m или комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$ разлагается в метрическое произведение.

В сфере эталоном линейчатой поверхности, являющейся метрическим произведением, служит многообразие Сегре

$$M^{n+\nu} = f(S^\nu \times S^n);$$

$$f: (u_0, \dots, u_\nu, v_0, \dots, v_n) \rightarrow (u_0 v_0, \dots, u_i v_j, \dots, u_\nu v_n),$$

где $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ – координаты точек единичных сфер $S^\nu \subset R^{\nu+1}$, $S^n \subset R^{n+1}$. Аналогично определяется комплексное многообразие Сегре в проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$. Многообразие Сегре в сфере при $\nu \neq n$ является параболической поверхностью ранга $r = 2 \min\{\nu, n\}$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1.4.3 [48]. Пусть F^l – полное k -параболическое подмногообразие в римановом пространстве M^{l+p} , в точках которого выполнены условия:

$$(1.4.18) \quad \bar{R}(Y, X)X = \langle X, X \rangle Y, \quad X, Y \in TF^l, \quad \langle X, Y \rangle = 0;$$

$$(1.4.19) \quad \bar{R}(X, Y)\xi = 0, \quad X, Y \in TF^l, \quad \xi \perp X \wedge Y,$$

где $\bar{R}$ – тензор кривизны объемлющего пространства.

Если при этом секционная кривизна

- 1) $\gamma_{2/F} \geq 0$;
- 2) $k \geq \nu(l)$,

то F^l локально изометрична $M_1^{r/2} \times S^{l-r/2}$ и коразмерность $p \geq \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$. В случае $M^{l+p} = S^{l+p}$ и $p = \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$ поверхность конгруэнтна многообразию Сегре.

Если $M^{l+p} = S^{l+p}$, то условия (1.4.18) и (1.4.19) выполняются вдоль каждого подмногообразия.

Аналогичные теоремы доказаны при других условиях 1), 2). Аналогичная теорема имеет место для линейчатых поверхностей [48]. Для параболических кэлеровых подмногообразий имеет место

ТЕОРЕМА 1.4.4 [48]. Пусть F^l – полное кэлерово k -параболическое подмногообразие в кэлеровом многообразии M^{l+p} с комплексной структурой J . В точках M^l выполнены условия:

$$(1.4.20) \quad \bar{R}(Y, X)X = \langle X, X \rangle Y + 3\langle Y, JX \rangle JX, \quad X, Y \in TF^l, \quad \langle X, Y \rangle = 0;$$

$$(1.4.21) \quad \bar{R}(X, Y)\xi = \lambda J\xi, \quad X, Y \in TF^l, \quad \xi \perp X \wedge Y.$$

Если

- 1) бисекционная голоморфная кривизна F^l неотрицательна;
- 2) порядок параболичности $k > 0$,

то F^l изометрично $M_1^{r/2} \times \mathbb{CP}^{l/2-r/4}$ и коразмерность $p \geq \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$. В случае $M = \mathbb{CP}^{l+p/2}$ и $p = \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$ поверхность конгруэнтна многообразию Сегре.

Если $M^{l+p} = \mathbb{CP}^{l+p/2}$, то условия (1.4.20), (1.4.21) выполняются вдоль кэлеровых подмногообразий. Доказаны аналоги теоремы 1.4.4 при других условиях 1), 2). Требование параболичности можно заменить условием линейчатости [48].

5. Характеристические классы Понтрягина параболических подмногообразий в сферическом пространстве. Характеристические классы Понтрягина компактного дифференцируемого многообразия M^l – это классы когомологий $p_k(M^l) \in H^{4k}(M^l, \mathbb{Z})$. Если на многообразии M^l задана связность и $\Omega = (\Omega_{ij})$ – кососимметрическая матрица кривизны этой связности, то замкнутая внешняя дифференциальная форма, отвечающая характеристическому классу Понтрягина, имеет вид

$$p_k(M^l) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}(2k)!} \sum \delta_{i_1, \dots, i_{2k}}^{j_1, \dots, j_{2k}} \Omega_{j_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{2k}}^{i_{2k}},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным подмножествам $(i_1, \dots, i_{2k})$ из $(1, \dots, l)$ и всем перестановкам $(j_1, \dots, j_{2k})$ из $(i_1, \dots, i_{2k})$, $\delta_{i_1, \dots, i_{2k}}^{j_1, \dots, j_{2k}}$ – знак подстановки $\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_{2k} \\ j_1, \dots, j_{2k} \end{pmatrix}$ [38]. Классы Понтрягина с действительными коэффициентами компактного ориентируемого многообразия постоянной двумерной кривизны равны нулю [22]. Для многообразий постоянной s -мерной кривизны $p_k(M^l) = 0$ для всех $k \geq s/2$ [52].

Для k -параболических поверхностей в сферическом пространстве имеется аналогичное утверждение.

ТЕОРЕМА 1.5.1. Если ранг второй квадратичной формы компактной поверхности F^l в сферическом пространстве S^{l+p} удовлетворяет неравенству $r_0 < l/4$, то $p_k(F^l) = 0$ при $k > r_0$.

Для поверхностей F^l в S^{l+p} компоненты тензора кривизны поверхности F^l имеют вид

$$(1.5.1) \quad R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_{r=1}^p (A_{ik}^r A_{jl}^r - A_{il}^r A_{jk}^r);$$

$$(1.5.2) \quad \Omega_{ij} = R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

где ω^k – базисные линейные формы в касательном пространстве F_q^l ;

$$(1.5.3) \quad \bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk});$$

$$(1.5.4) \quad \bar{\Omega}_{ij} = \bar{R}_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l - \omega^i \wedge \omega^j;$$

(1.5.4) – внешняя форма кривизны. Введем формы

$$(1.5.5) \quad \Theta_{i_1 \dots i_q}^q = \frac{1}{q!} \sum_j \delta_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_q} \Omega_{j_1 j_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{q-1} j_q};$$

$$(1.5.6) \quad \bar{\Theta}_{i_1 \dots i_q}^q = \frac{1}{q!} \sum_i \delta_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_q} \bar{\Omega}_{j_1 j_2} \wedge \dots \wedge \bar{\Omega}_{j_{q-1} j_q}.$$

Форма (1.5.5) рассматривалась в работе [52]. Пусть $A_s = (A_{1s}, A_{2s})$ – разбиение $(i_1, \dots, i_q)$ на два множества $A_{1s} = (l_1, \dots, l_{q-2s})$, $A_{2s} = (m_1, \dots, m_{2s})$. Тогда, учитывая формулы (1.5.4), (1.5.5), (1.5.6), мы получим, что

$$(1.5.7) \quad \Theta_{i_1 \dots i_q}^q = \frac{1}{q!} \sum_{s=0}^{q/2} \sum_{A_s} (q-2s)! \omega^{l_1} \wedge \dots \wedge \omega^{l_{q-2s}} \wedge \bar{\Theta}_{m_1 \dots m_{2s}}^{2s},$$

где $\sum_{A_s}$ – сумма по всем разбиениям $(m_1, \dots, m_q)$ на множества A_{1s}, A_{2s} .

В работе [7] было дано определение k -мерной внешней кривизны для l -мерных поверхностей в римановом пространстве R^{l+p} . Для плоскости $P \subset F_q^l$, натянутой на взаимно перпендикулярные единичные векторы $e_1, \dots, e_k$, k -мерная внешняя кривизна определяется по формуле:

$$\bar{\gamma}_k(P, q) = \frac{1}{2^{k/2} k!} \sum \varepsilon(i) \varepsilon(j) \bar{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2} \dots \bar{R}_{i_{k-1} i_k j_{k-1} j_k},$$

где $\bar{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2} = R_{i_1 i_2 j_1 j_2} - \tilde{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2}$, а $\tilde{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2}$, $R_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ – компоненты тензора кривизны объемлющего и погруженного многообразий.

Для риманова многообразия k -мерная кривизна вдоль k -мерной плоскости определяется по этой же формуле, где вместо $\bar{R}_{ijkl}$ берется тензор кривизны риманова многообразия.

ЛЕММА 1.5.1. Если поверхность F^l в S^{l+p} имеет постоянную внешнюю q -мерную кривизну, то

$$(1.5.8) \quad \overline{\Theta}_{i_1 \dots i_q}^q = C \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_q}$$

для всех $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq l$.

В частности, если $\overline{\gamma}_q = 0$, то

$$(1.5.9) \quad \overline{\Theta}_{i_1 \dots i_q}^q = 0.$$

Форма $\overline{\Theta}_{i_1 \dots i_q}^q$ обладает теми же формальными свойствами, что и форма $\Theta_{i_1 \dots i_q}^q$. Для формы $\overline{\Theta}_{i_1 \dots i_q}^q$ выполняется аналог первого и второго тождества Бианки для тензора кривизны. Это легко следует из результатов статьи [34]. Для формы $\Theta_{i_1 \dots i_q}^q$ аналогичное утверждение доказано в работе [52].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5.1. Характеристический класс Понтрягина $p_k(M^l)$ представляется также замкнутой дифференциальной $4k$ -формой

$$(1.5.10) \quad \frac{[(2k)!]^2}{(2^k k!)^2 (2\pi)^{2k}} \sum_i \Theta_{i_1 \dots i_{2k}}^{2k} \wedge \Theta_{i_1 \dots i_{2k}}^{2k},$$

где суммирование – по всем размещениям $i = (i_1, \dots, i_{2k})$ из $(1, \dots, l)$ [52]. Так как ранг второй квадратичной формы F^l не превосходит r_0 , где r_0 – четное число, то $\overline{\gamma}_{r_0+2s} = 0$ при $s \geq 1$. По лемме 1.5.1

$$(1.5.11) \quad \overline{\Theta}_{i_1 \dots i_{r_0+2s}}^{r_0+2s} = 0.$$

Из формулы (1.5.7) и уравнения (1.5.11) следует, что

$$\Theta_{i_1 \dots i_{2k}}^{2k} = \frac{1}{2k!} \sum_{s=0}^{r_0/2} \sum_{A_s} \omega^{l_1} \wedge \dots \wedge \omega^{l_{2k-r_0/2}} \wedge \omega^{l_{2k-2s}} \wedge \dots \wedge \overline{\Theta}_{m_1 \dots m_{2s}}^{2s}.$$

Внешнее произведение этой формы на себя содержит в каждом слагаемом внешнее произведение $\omega^{l_1} \wedge \dots \wedge \omega^{l_{2k-r_0/2}} \wedge \dots \wedge \omega^{l_{2k-2s}} \wedge \dots \wedge \omega^{l'_1} \wedge \dots \wedge \omega^{l'_{2k-r_0/2}} \wedge \dots \wedge \omega^{l'_{2k-2s'}}$, где $l_1, \dots, l_{2k-2s}, l'_1, \dots, l'_{2k-2s'}$ – элементы из $i = (i_1, \dots, i_{2k})$. Если $k > r_0$, то два из этих индексов должны совпадать и внешнее произведение равно нулю. Отсюда следует $p_k(F^l) = 0$.

2. k -седловые и k -выпуклые подмногообразия

1. Топологическое строение седловых подмногообразий. С.З. Шефель определил класс k -седловых поверхностей в евклидовом пространстве E^n [49]. В случае подмногообразий класса регулярности C^2 топологическое определение k -седловых поверхностей эквивалентно другому, которое мы возьмем за основное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность F^l в римановом пространстве R^n называется k -седловой, если для каждой нормали ξ в произвольной точке $Q \in F^l$ вторая квадратичная форма после приведения к диагональному виду имеет не более k коэффициентов одного знака:

$$\Omega = a_1 dx_1^2 + \dots + a_j dx_j^2 - b_1 x_{j+1}^2 - \dots - b_{j+1} dx_{j+i}^2, \\ \max(i, j) \leq k, \quad a_s, b_s > 0.$$

В. В. Глазыриным было доказано: если F^l – полная k -седловая поверхность в E^n , то $H_{k+s}(F^l, \mathbb{Z}) = 0$ при $s > 0$, где $H_i(F^l, \mathbb{Z})$ – группы гомологий поверхности F^l с коэффициентами в целых числах [33]. Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только целочисленные гомологии, то не будем указывать кольцо коэффициентов. Эта теорема является обобщением теоремы Лефшеца о том, что $H_i(F^l) = 0$ при $i > l$, где F^l – неособое аффинное алгебраическое многообразие действительной размерности $2l$ в n -мерном комплексном евклидовом пространстве [41].

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть F^l есть k -седловая поверхность в симметрическом пространстве ранга один. Тогда для поверхностей в

- 1) S^n будет $H_{k+s}(F^l) = 0$, $0 \leq s \leq l - 2k$;
- 2) $\mathbb{CP}^n$ будет $H_{k+s}(F^l) = H_{k+s+2i}(F^l)$, $s > 0$, $i \geq 0$, $0 \leq s + 2i \leq l - 2k$;
- 3) $\mathbb{QP}^n$ будет $H_{k+s}(F^l) = H_{k+s+4i}(F^l)$, $0 \leq s + 4i \leq l - 2k$.

Равенство понимается в смысле изоморфизма групп гомологий. Теорема имеет смысл при 1) $k \leq l/2$; 2) $k \leq (l - 1)/2$; 3) $k \leq (l - 2)/2$.

ТЕОРЕМА 2.1.2. Пусть F^l – компактное кэлерово подмногообразие в $\mathbb{CP}^n$ такое, что $r_0 = \max_{Q \in F^l} r(Q)/C < l$. Тогда

$$H_{r_0+s}(F^l) = H_{r_0+s+2i}(F^l), \quad 0 < s + 2i < 2(l - r_0).$$

Заметим, что кэлерово подмногообразие в $\mathbb{CP}^n$ является r_0 -седловым и $2(l - r_0)$ -параболическим. Используя теорему М. Ларсена [39], усилим теорему 2.1.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. Пусть F^l – компактное кэлерово подмногообразие в $\mathbb{CP}^{l+p}$ такое, что $r_0 < l - p$. Тогда

$$H_i(F^l) = H_i(\mathbb{CP}^l) = \begin{cases} 0, & i = 2s + 1, \\ \mathbb{Z}, & i = 2s. \end{cases}$$

Возьмем в $\mathbb{CP}^n$ вполне геодезическую поверхность F^n , изометричную действительному проективному пространству. Если в $\mathbb{CP}^n$ введены однородные комплексные координаты $z_0 = x_0 + iy_0, \dots, z_n = x_n + iy_n$, то эта поверхность задается уравнениями $y_0 = \dots = y_n = 0$. Поднимем поверхность F^n в сферическое пространство S^{2n+1} . В поднятой поверхности $F^{n+1} \subset S^{2n+1}$ будет $r_0 = 2$, $0 \leq \gamma_2 \leq 1$. Аналогично в $\mathbb{QP}^n$ возьмем вполне геодезическую поверхность F^n , изометричную $\mathbb{CP}^n$. Если в $\mathbb{QP}^n$ введены однородные кватернионные координаты $t_0 = z_0 + iw_0, \dots, t_n = z_n + iw_n$; z_i, w_i – комплексные числа, то поверхность F^{2n} задается уравнениями $w_0 = \dots = w_n = 0$.

Поднимем F^{2n} в $\mathbb{CP}^{2n+1}$. Поднятая поверхность F^{n+1} есть кэлерово подмногообразие в $\mathbb{CP}^{2n+1}$, у которого $r_0 = 2$, и голоморфная кривизна $\gamma_2(X) \leq 1$. Эти примеры характеризуют точность теорем 2.1.1, 2.1.2. В сферу S^7 стандартным образом вкладывается многообразие Штифеля $V_{4,2} = S^2 \times S^3$. Оно является 3-седловой поверхностью, $H_2(V_{4,2}) = H_3(V_{4,2}) = \mathbb{Z}$. Этот пример указывает на точность п. 1 теоремы 2.1.1.

Пусть M, B – римановы многообразия. *Римановой субмерсией* $\pi: M \rightarrow B$ называется отображение M на B , удовлетворяющее аксиомам S1 и S2.

S1. π есть отображение максимального ранга.

Это значит, что индуцированное отображение касательных пространств π_* есть отображение “на”. Для каждого $b \in B$ $\pi^{-1}(b)$ есть подмногообразие M размерности $\dim M - \dim B$, $\pi^{-1}(b)$ называются *слоями*. Векторы, касательные к слою, называются *вертикальными*; векторы, ортогональные к слою, – *горизонтальными*.

S2. π_* сохраняет длины горизонтальных векторов.

Известно, что единичная сфера допускает следующие расслоения Хопфа с вполне геодезическими слоями:

$$S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{CP}^n, \quad S^{4n+3} \xrightarrow{S^3} \mathbb{QP}^n, \quad S^{15} \xrightarrow{S^7} S^8,$$

которые являются римановыми субмерсиями. Других римановых субмерсий сферы с вполне геодезическими слоями нет [26].

ЛЕММА 2.1.1 [10]. Пусть $F^l \subset B$ есть k -седловая поверхность. Тогда $\pi^{-1}(F^l) \subset M$ есть $(k+s)$ -седловая поверхность, где s – размерность слоя.

Нам понадобится определение k -выпуклых поверхностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность $F^l \subset E^n$ называется k -выпуклой, если для каждой нормали вторая квадратичная форма после приведения к диагональному виду имеет не менее k коэффициентов одного знака, включая нулевые коэффициенты.

С. З. Шефель ввел раньше другое определение k -выпуклых поверхностей.

Заметим, что из теоремы, доказанной Муром, следует, что полная поверхность F^l постоянной положительной кривизны в E^{l+p} является $(l-p)$ -выпуклой [42].

ЛЕММА 2.1.2. Пусть F^l – компактная k -выпуклая поверхность в E^n . Тогда $H_{l-k+s}(F^l) = 0$, $0 < s \leq 2k - l$.

ЛЕММА 2.1.3. k -седловая поверхность F^l в регулярной гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ положительной двумерной секционной кривизны есть $(l-k)$ -выпуклая поверхность в E^{n+1} .

ЛЕММА 2.1.4. Пусть F^l – компактная поверхность, удовлетворяющая условию леммы 2.1.3. Тогда $H_{k+s}(F^l) = 0$, $0 < s \leq l - 2k$.

ЛЕММА 2.1.5 [33]. Пусть F^l – полная k -седловая поверхность в E^n . Тогда $H_{k+s}(F^l) = 0$, $s \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1.2. Пусть $h = x_0$ – функция высоты в E^n , ограничение которой на F^l есть невырожденная функция Морса, x_0 – декартова координата в E^n (см. [8; с. 42]). В критических точках матрица гессиана h совпадает с матрицей второй квадратичной формы поверхности F^l относительно нормали, направленной по оси x_0 (см. [8; с. 42]). Так как поверхность F^l является k -выпуклой, индекс критических точек функции h либо $\geq k$, либо $\geq l - k$. По лемме Морса поверхность F^l гомотопически эквивалентна конечному клеточному комплексу с клетками размерности $> k$, $< l - k$ (см. [8; с. 30]). Воспользовавшись клеточными гомологиями, получим, что $H_i(F^l) = 0$, $l - k \leq i \leq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1.3. Пусть ξ_0 – вектор нормали к гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ в точке $Q \in F^l$, N – произвольный вектор нормали к $F^l \subset F^n$ в этой точке. Любая нормаль к F^l в E^{n+1} $e = \lambda_1 \xi_0 + \lambda_2 \xi$, а вторая квадратичная форма относительно этой нормали есть линейная комбинация вторых квадратичных форм относительно нормалей ξ_0, ξ . На асимптотическом конусе поверхности F^l относительно нормали N лежит плоскость E_1 , $\dim E_1 \geq l - (k - 1)$. На плоскости E_1 вторая квадратичная форма относительно нормали N нулевая. В силу выпуклости гиперповерхности F^n ограничение второй квадратичной формы F^n на E^1 знакоопределено. Поэтому ограничение второй квадратичной формы F^l относительно нормали e , где $\lambda_1 > 0$, на плоскость E_1 знакоопределено. Отсюда следует, что F^l есть $(l - k)$ -выпуклая поверхность в объемлющем E^{n+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1.4. Утверждение леммы непосредственно следует из лемм 2.1.2, 2.1.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.1. 1) Так как сфера S^n есть выпуклая гиперповерхность в E^{n+1} , то утверждение является частным случаем леммы 2.1.4.

2) Поверхность $\tilde{F}^{l+1} = \pi^{-1}(F^l)$ по лемме 2.1.1 $(k + 1)$ -седловая поверхность в S^{2n+1} . Из п. 1) следует $H_{k+1+s}(\tilde{F}^{l+1}) = 0$ ($0 \leq s \leq l - 2k = 1$). Имеет место точная гомологическая последовательность Тома–Гизина расслоения на сферы с пространством расслоения E , базой B , слоем S^q (см. [51; с. 335])

$$\cdots \rightarrow H_i(E) \rightarrow H_i(B) \rightarrow H_{i-q-1}(B) \rightarrow H_{i-1}(E) \rightarrow \cdots$$

В нашем случае $E = \tilde{F}^{l+1}$, $B = F^l$, слой S^1 . Если $k + 2 \leq i \leq l - k$, то отрезок последовательности имеет вид

$$0 \rightarrow H_i(F^l) \rightarrow H_{i-2}(F^l) \rightarrow 0.$$

Из точности последовательности следует, что группы $H_i(F^l)$, $H_{i-2}(F^l)$ изоморфны.

3) Снова воспользуемся последовательностью Тома–Гизина, для которой $E = \tilde{F}^{l+3} = \pi^{-1}(F^l)$, $B = F^l$, слой S^3 ,

$$H_i(\tilde{F}^{l+3}) \rightarrow H_i(F^l) \rightarrow H_{i-4}(F^l) \rightarrow H_{i-1}(\tilde{F}^{l+3}).$$

Так как по лемме 2.1.1 поверхность $\tilde{F}^{l+3} \subset S^{4n+3}$ является $(k + 3)$ -седловой, то $H_{k+3+s}(\tilde{F}^{l+3}) = 0$ при $0 \leq s < l - 2k - 3$. Если $k + 4 \leq i \leq l - 2k$, то группы $H_i(F^l)$, $H_{i-4}(F^l)$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.2. Так как F^l — кэлерово подмногообразие, то $k - 1 = r_0$. Поверхность $\tilde{F}^{2l+1} = \pi^{-1}(F^l)$ по лемме 2.1.1 также является $(r_0 + 1)$ -седловой. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству п. 2) теоремы 2.1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.1.1. Так как $H_i(F^l) = H_i(\mathbb{CP}^l)$, $i \geq l + p$, то по теореме 2.1.2 $H_{r_0+s}(F^l) = H_{r_0+s+2i}(F^l)$, $0 < s + 2i < 2(l - r_0)$. Если $2(l - r_0) > l + p$, то $H_i(F^l) = H_i(\mathbb{CP}^l)$ при $i > r_0$. Так как по двойственности Пуанкаре для компактного многообразия $H_i(F^l) = H_{2l-i}(F^l)$ и $\text{rang } H^i = \text{rang } H_i$, $\text{tors } H^i = \text{tors } H_{i-1}$, то отсюда следует, что $H_i(F^l) = H_i(\mathbb{CP}^l)$.

ТЕОРЕМА 2.1.3. Пусть F^l — компактная k -параболическая поверхность в S^n , для которой $k > \frac{4}{5}l$. Тогда характеристические классы Понтрягина p_i тривиальны при $i > \frac{l-k}{4}$ и все числа Понтрягина равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.5.1 классы Понтрягина $p_i(F^l) \in H^{4i}(F^l)$ тривиальны при $i > r_0 = l - k$. Поверхность F^l есть $(r_0 + 1)$ -седловая, поэтому по теореме 2.1.1 $H_{r_0+s}(F^l) = 0$ ($0 < s < l - 2r_0$). При $r_0 < l/5$: $4r_0 < l - r_0$; в силу тривиальности когомологий $H^i(F^l)$ при $r_0 < i < l - r_0$ классы Понтрягина $p_i(F^l) = 0$ при $i > r_0/4$. Числа Понтрягина равны $\langle p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_s}, \mu \rangle$, где $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_s} \in H^l(F^l)$ — произведение классов Понтрягина таких, что $4(i_1 + \dots + i_s) = l$; здесь μ — фундаментальный гомологический класс поверхности, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Так как при промежуточном умножении на p_{i_s} произведение будет в $H^{4i}(F^l)$, $r_0 < i < l - r_0$, то в силу тривиальности когомологий в этом промежутке будет тривиальным и произведение $p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_s}$, $4(i_1 + \dots + i_s) = l$. Поэтому все числа Понтрягина равны нулю. По теореме Тома конечная несвязная сумма поверхностей F^l будет границей дифференцируемого многообразия.

2. Пересечение седловых подмногообразий в римановом пространстве. Адамар доказал, что на полной поверхности положительной гауссовой кривизны каждая геодезическая должна пересекаться с произвольной замкнутой геодезической [36]. В 1961 году Т. Франкель обобщил эту теорему на римановы многообразия положительной секционной кривизны. Он показал, что два компактных вполне геодезических подмногообразия F_1, F_2 в n -мерном римановом многообразии M^n положительной секционной кривизны пересекаются, если сумма их размерностей не меньше n [30]. В 1966 году как следствие этой теоремы Т. Франкель показал, что если M^n есть полное связное риманово многообразие положительной секционной кривизны и F^l есть l -мерное вполне геодезическое компактное подмногообразие, где $2l \geq n$, то гомоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(F^l) \rightarrow \pi_1(M^n)$ есть сюръекция [31].

В 1981 году первая теорема Франкеля была обобщена на k -седловые подмногообразия в римановом подмногообразии положительной секционной кривизны [10]. Недавно К. Кенмотсу и С. Ксиа обобщили теоремы Франкеля на римановы многообразия частично положительной кривизны [37]. Мы докажем обобщение этих теорем для k -седловых подмногообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M^n — n -мерное риманово многообразие. Мы говорим, что M^n имеет положительную (неотрицательную) k -Риччи кривизну в точке $Q \in M^n$,

если для любого набора $k + 1$ ортогональных касательных векторов $e, e_1, \dots, e_k$ в точке Q

$$\sum_{i=1}^k K(e, e_i) > 0 \quad (\geq 0),$$

где $K(e, e_i)$ – секционная кривизна вдоль плоскости, натянутой на векторы e, e_i .

Если M^n имеет положительную (неотрицательную) k -Риччи кривизну в каждой точке, то многообразие M^n есть многообразие положительной (неотрицательной) k -Риччи кривизны.

1-Риччи кривизна есть секционная кривизна и $(n - 1)$ -Риччи кривизна есть кривизна Риччи. Для дальнейшего мы введем обозначение

$$K(e, \Pi) = \sum_{i=1}^k K(e, e_i),$$

где Π есть k -мерное подпространство касательного пространства $T_Q M^n$, ортогонального вектору e и натянутого на векторы e_i .

Для k -седловых подмногообразий имеют место следующие теоремы [19].

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть M^n – полное риманово многообразие размерности $n > 2$. Пусть F^l – компактное s -седловое подмногообразие, где $l \geq 1$. Предположим, что вдоль каждого геодезического луча $\gamma: [0, \infty] \rightarrow M$, выходящего из точки подмногообразия F^l ортогонально к F^l ,

$$\int_0^\infty K(\gamma'(t), \Pi_t) dt > 0,$$

где Π_0 есть k -мерное подпространство $T_{\gamma(0)} F^l$, Π_t – параллельный перенос Π_0 вдоль γ и $l \geq s + k$.

Тогда M^n есть компактное многообразие.

Для минимальных подмногообразий эта теорема была доказана Г. Галловеем [32] с более слабым условием: $l \geq k$.

ТЕОРЕМА 2.2.2. Пусть M^n есть n -мерное полное связное риманово многообразие неотрицательной k -Риччи кривизны. Пусть F^{l_1} и F^{l_2} – полные s_1 -седловое и s_2 -седловое подмногообразия соответственно. Предположим, что F^{l_1} есть замкнутое множество и F^{l_2} есть компакт. Если M^n имеет положительную k -Риччи кривизну в точках F^{l_1} или в точках F^{l_2} и $l_1 + l_2 \geq n + k - 1 + s_1 + s_2$, то F^{l_1} и F^{l_2} пересекаются.

ТЕОРЕМА 2.2.3. Пусть M^n есть n -мерное полное связное риманово многообразие положительной k -Риччи кривизны. Предположим, что F^l есть компактное s -седловое подмногообразие такое, что $2l \geq n + k - 1 + 2s$.

Тогда гомоморфизм фундаментальных групп

$$\pi_1(F^l) \rightarrow \pi_1(M^n)$$

есть сюръекция.

Известно, что компактное минимальное подмногообразие в полном римановом многообразии неположительной секционной кривизны имеет бесконечную фундаментальную группу. Аналогичный результат имеет место для компактных s -седловых подмногообразий F^l , где $s < l$.

3. k -асимптотические и k -выпуклые подмногообразия. Определение k -седловых подмногообразий эквивалентно существованию асимптотических подпространств в касательном пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразие F^l в римановом многообразии называется k -асимптотическим, если для каждой нормали ξ в произвольной точке $Q \in F^l$ существует k -мерная плоскость $L^k(Q, \xi)$ такая, что ограничение второй квадратичной формы относительно нормали ξ на эту плоскость есть нулевая форма.

Легко показать, что k -седловые подмногообразия есть $(l-k)$ -асимптотические подмногообразия; k -асимптотическое подмногообразие является $(l-k)$ -седловым подмногообразием. Таким образом, эти два класса подмногообразий совпадают.

Асимптотичность поверхности существенна при непрерывных и бесконечно малых изгибаниях многомерных поверхностей коразмерности $p = l(l+1)/2$, где l – размерность поверхности. Это следует из работ Джакобовича и К. Тененблат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность $F^l \subset E^n$ называется *сильно k -асимптотической*, если найдется плоскость $E^k \subset T_Q F^l$ такая, что ограничение второй квадратичной формы относительно каждой нормали на эту плоскость есть нулевая форма.

Из [4] следует, что k -асимптотическая поверхность является сильно $(2k-l)$ -асимптотической.

Если A_k – класс сильно k -параболических подмногообразий, B_k – класс k -параболических, C_k – класс сильно k -асимптотических, D_k – класс k -асимптотических подмногообразий, то эти классы вложены друг в друга:

$$A_k \subset B_k \subset D_k \subset C_k.$$

Имеют место также следующие соотношения:

$$B_k \subset A_{k-j(p-1)}; \quad C_k \subset B_{k-j}.$$

Пусть семейство плоскостей $E^k(Q) \subset T_Q F^l$ образует регулярное распределение. Выясним достаточные условия голономности сильно асимптотического распределения.

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть $E^k(Q)$ – сильно асимптотическое дифференцируемое распределение на поверхности F^l . Если размерность пространства вторых квадратичных форм максимальна и равна в каждой точке $l(l+1)/2 - k(k+1)/2$, то распределение $E^k(Q)$ голономно.

Мы уже давали определение k -выпуклых поверхностей. Усилим это определение. Другое определение k -выпуклых подмногообразий было дано ранее С. З. Шефелем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если вторая квадратичная форма поверхности положительно определена относительно одной из нормалей, то поверхность называется *строго выпуклой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если ранг второй квадратичной формы поверхности F^l относительно одной из нормалей равен l (т.е. индекс параболичности равен нулю), то поверхность называется *невыврожденной*.

ТЕОРЕМА 2.3.2. а) Пусть F^l есть строго k -выпуклая поверхность в евклидовом пространстве E^n . Если $k > 2l/3$, то в каждой точке найдется гиперплоскость нормалей такая, что подпространство вторых квадратичных форм поверхности относительно нормалей, лежащих в гиперплоскости, является $(l - k)$ -седловым.

б) Если F^l есть невыврожденная k -выпуклая поверхность, то аналогичное утверждение справедливо при $k > 3l/4$ [13].

Ранее было показано, что k -седловая поверхность в сферическом пространстве $S^n \subset E^{n+1}$ — строго $(l - k)$ -выпуклая в E^{n+1} . В теореме 2.3.2, п. а), доказано в точке обратное утверждение: пространство вторых квадратичных форм в точке строго k -выпуклой поверхности ($k > 2l/3$) в евклидовом пространстве с точностью до аффинного преобразования совпадает с пространством квадратичных форм $(l - k)$ -седловой поверхности в сферическом пространстве, если ее рассматривать как поверхность в евклидовом пространстве.

Требование $k > 2l/3$ существенно. Поверхность $F^6 \subset E^{10}$, заданная уравнениями

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{i=1}^6 x_i^2, & z_2 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \\ z_3 &= x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2, & z_4 &= -x_1^2 - x_2^2 + x_5^2 + x_6^2, \end{aligned}$$

является 4-выпуклой, но не является 2-седловой на трехмерной плоскости нормалей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность $F^l \subset E^n$ называется *сильно k -выпуклой*, если выполняются следующие условия:

- 1) в каждой точке существует плоскость $E^k(Q) \subset T_Q F^l$ и нормаль N такие, что для любого вектора $x \in E^k(Q)$ и любой нормали n , перпендикулярной N , справедливо $A(n, Q)x = 0$, $A(N, Q)x \subset E^k(Q)$, где $A(n, Q)$ — матрица второй квадратичной формы относительно нормали n в точке Q ;
- 2) ограничение второй квадратичной формы поверхности относительно нормали N на плоскость $E^k(Q)$ — знакоопределенная форма;
- 3) любая плоскость, удовлетворяющая условию $A(n, Q)x = 0$, лежит в плоскости $E^k(Q)$.

Относительно плоскости $E^k(Q)$ существует единичная нормаль, удовлетворяющая определению. Если распределение $E^k(Q)$ регулярно, то поле нормалей $N(Q)$ регулярно.

ТЕОРЕМА 2.3.3. Пусть F^l – сильно k -выпуклая поверхность в евклидовом пространстве с регулярным распределением $E^k(Q) \subset T_Q F^l$. Если поле нормалей $N(Q)$ параллельно в нормальном расслоении, то распределение $E^k(Q)$ голономно. Интегральные подмногообразия суть вполне геодезические подмногообразия, изометричные между собой. С точки зрения внешней геометрии они являются выпуклыми конгруэнтными гиперповерхностями в евклидовом пространстве E^{k+1} [13].

3. Подмногообразия неположительной внешней кривизны

1. Введенные нами ранее классы сильно параболических, параболических и седловых подмногообразий появляются в классе поверхностей неположительной внешней кривизны в римановом пространстве.

Определим для поверхности F^l в римановом пространстве R^{l+p} q -мерную внешнюю кривизну γ_q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для q -мерной плоскости $P \subset T_Q F^l$, натянутой на взаимно перпендикулярные единичные векторы $e_1, \dots, e_q \subset P$, q -мерная внешняя кривизна определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_q(P, Q) = \frac{1}{2^{q/2} q!} \sum_{i, j \in S_q} \varepsilon(i) \varepsilon(j) & \left[\sum_{r_1=1}^p (A_{i_1 j_1}^{r_1} A_{i_2 j_2}^{r_1} - A_{i_1 j_2}^{r_1} A_{i_2 j_1}^{r_1}) \right] \dots \\ & \dots \left[\sum_{r_q=1}^p (A_{i_{q-1} j_{q-1}}^{r_q} A_{i_q j_q}^{r_q} - A_{i_{q-1} j_q}^{r_q} A_{i_q j_{q-1}}^{r_q}) \right], \end{aligned}$$

где $A_{ij}^{r_s}$ – коэффициенты вторых квадратичных форм для ортогонального базиса единичных нормалей $N^1, \dots, N^p$. Здесь S_q обозначает множество всех подстановок степени q , $\varepsilon(i)$ – знак подстановки i [10], [9].

Когда $q = 2$, внешняя кривизна равна разности между секционными кривизнами подмногообразия и объемлющего пространства по двумерным площадкам, касательным к подмногообразию.

Внешняя двумерная кривизна неположительна, если кривизна подмногообразия не больше кривизны объемлющего пространства. Если объемлющее пространство евклидово, то это эквивалентно неположительности секционной кривизны подмногообразия. Если объемлющее пространство есть сферическое пространство, то неположительность внешней двумерной кривизны эквивалентна тому, что секционная кривизна подмногообразия не превосходит единицы.

С. Черн и Н. Кейпер доказали, что внешний нуль-индекс $\mu > l - p$ для l -мерных подмногообразий нулевой секционной кривизны в евклидовом пространстве [23]. Эта же оценка имеет место для подмногообразий нулевой двумерной внешней кривизны в римановом пространстве. Сейчас мы оценим нуль-индекс и ранг второй квадратичной формы для подмногообразий неположительной q -мерной кривизны в римановом пространстве.

Пусть задана система квадратичных уравнений

$$(3.1.1) \quad A_{ij}^r x^i x^j = 0, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Обозначим через $A(X, X)$ вектор с компонентами $A_{ij}^r x^i x^j$, $A(X, Y)$ – вектор с компонентами $A_{ij}^r x^i y^j$, где X, Y – l -мерные векторы с компонентами x^i, y^i .

ЛЕММА 3.1.1. Если в системе N уравнений (3.1.1) $N \leq \frac{l-1}{k-1}$ и для любых наборов k линейно независимых векторов $u_1, \dots, u_k \in E^l$

$$\gamma_k = \sum \varepsilon(i)\varepsilon(j) (\langle A(u_{i_1}, u_{j_1}), A(u_{i_2}, u_{j_2}) \rangle - \langle A(u_{i_1}, u_{j_2}), A(u_{i_2}, u_{j_1}) \rangle) \dots \\ \dots (\langle A(u_{i_{k-1}}, u_{j_{k-1}}), A(u_{i_k}, u_{j_k}) \rangle - \langle A(u_{i_{k-1}}, u_{j_k}), A(u_{i_k}, u_{j_{k-1}}) \rangle) \leq 0,$$

то система (3.1.1) имеет нетривиальное действительное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Пусть $f = \langle A(X, X), A(X, X) \rangle$ – функция на единичной сфере S^{l-1} , т.е. $\langle X, X \rangle = 1$. Она принимает наименьшее значение, отличное от нуля, на векторе X_1 . Пусть $F = f - \lambda \langle X, X \rangle$. На векторе X_1

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = 2 \left[2 \sum_{r=1}^N (A_{sj}^r x_1^s x_1^j) A_{ij}^r x_1^j - \lambda x_1^i \right] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x^i \partial x^j} = 2 \left[2 \sum_{r=1}^N (A_{sk}^r x_1^s x_1^k) A_{ij}^r - \lambda \delta_{ij} + 4 \sum_r A_{ik}^r x_1^k A_{sj}^r x_1^s \right].$$

Из необходимого условия минимума следует, что

$$2\langle A(X_1, X_1), A(t, t) \rangle + 4\langle A(X_1, t), A(X_1, t) \rangle - \lambda \langle t, t \rangle \geq 0, \\ \langle A(X_1, X_1), A(X_1, t) \rangle - \lambda \langle X_1, t \rangle = 0,$$

где t – произвольный вектор из E^l . Пусть E_1 – подпространство векторов $X \in E^l$ таких, что $A(X_1, X) = 0$. Это подпространство перпендикулярно вектору X_1 , $l_1 = \dim E_1 \geq l - N$. Для единичных векторов $X \in E_1$ имеем $\langle A(X_1, X_1), A(X, X) \rangle > 0$. Пусть f_1 – ограничение функции на единичную сферу подпространства E_1 , минимальное значение f_1 на S^{l_1-1} больше нуля и достигается на векторе X_2 . Пусть $E_2 \subset E_1$ – подпространство таких векторов, что $A(X_2, X) = 0$. Для единичных векторов $X \in E_2$ имеем $\langle A(X, X), A(X_2, X_2) \rangle > 0$, $\dim E_2 \geq l - 2N$. Повторяя процесс $k - 1$ раз, получим $\dim E_{k-1} \geq l - (k - 1)N \geq 1$ – это следует из условия леммы. По построению единичные векторы $X_1, \dots, X_k$ взаимно ортогональны. Для них

$$A(X_i, X_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad \langle A(X_i, X_i), A(X_j, X_j) \rangle > 0.$$

Отсюда следует, что $\gamma_k > 0$ для набора векторов $X_1, \dots, X_k$, что противоречит предположению.

При $k = 2$ лемма доказана Отзуки [44].

ЛЕММА 3.1.2. Пусть F^l есть l -мерная поверхность неположительной k -мерной секционной кривизны в E^{l+p} . Тогда $r \leq 2p(k - 1)$, $r - j \leq 2p(k - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как утверждение носит локальный характер, то, не ограничивая общности, можно рассматривать поверхность F_0 , заданную уравнениями $z_n = A_{is}^n x^i x^s$, $i, s = 1, \dots, l$, где $A_{is}^n x^i x^s$ – вторые квадратичные формы для взаимно ортогональных нормалей в фиксированной точке Q поверхности F^l , причем ось z_1 направлена по нормали, для которой $r(\xi, Q) = r(Q)$, $j(\xi, Q) = j(Q)$. Оси x^i параллельны главным направлениям гиперповерхности $z_1 = A_{is}^1 x^i x^s$ в точке Q , оси $x^{r+1}, \dots, x^l$ – главные направления, соответствующие собственному значению, равному нулю. Тогда поверхность F_0 задается следующим образом:

$$z_1 = \sum_{i=1}^{r-j} c_i^2 (x^i)^2 - \sum_{i=1}^j c_{r-j+i}^2 (x^{r-j+i})^2,$$

$$z_n = A_{is}^n x^i x^s, \quad n = 2, \dots, p.$$

Пусть $\bar{F}_0$ – поверхность, заданная уравнениями

$$z_1 = \sum_{i=1}^{r-j} c_i^2 (x^i)^2,$$

$$z_n = A_{is}^n x^i x^s, \quad n = 2, \dots, p, \quad i, s = 1, \dots, r-j.$$

Это $(r-j)$ -мерная поверхность неположительной k -мерной кривизны в E^{r-j+p} . Заметим, что система уравнений

$$\sum c_i^2 (x^i)^2 = 0, \quad A_{is}^n x^i x^s = 0$$

не имеет нетривиального действительного решения. Поэтому из леммы 3.1.1 следует, что $p > \frac{r-j-1}{k-1}$, $r \leq p(k-1) + j$. Так как $j \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$, то $r \leq 2p(k-1)$.

Так как при доказательстве мы используем только вторые квадратичные формы в фиксированной точке, то лемма имеет место для подмногообразий неположительной внешней k -мерной кривизны в римановом пространстве.

Число $r-j \leq p(k-1)$ – индекс седлообразности подмногообразия; $(l-r) \geq l-j-p(k-1)$ – индекс параболичности;

$$(3.1.2) \quad \mu \geq l-p(k-1+j)$$

– индекс сильной параболичности. При $k=2$

$$(3.1.3) \quad r-j \leq p; \quad l-r \geq l-p-j.$$

Для внешнего нуль-индекса при $k=2$ Л. Флорит доказал [29] более сильную оценку на нуль-индекс, чем это следует из нашего неравенства, а именно,

$$(3.1.4) \quad \mu \geq l-2p.$$

Верно, в некотором смысле, и обратное: для k -седловых поверхностей внешняя кривизна

$$(-1)^k \bar{\gamma}_{2k} \geq 0.$$

Для k -параболического подмногообразия внешняя кривизна $\bar{\gamma}_{l-k+1} = 0$, если $(l-k+1)$ – четное число.

В силу полученных оценок на порядки сильной параболичности и параболичности многообразий неположительной внешней кривизны мы можем найти условия вполне геодезичности этих подмногообразий.

ТЕОРЕМА 3.1.1 [15]. Пусть F^l – полная поверхность неположительной внешней q -мерной кривизны в симметрическом пространстве ранга один с коразмерностью вложения p . Если для поверхностей:

- 1) в S^{l+p} $p \leq l/(4(q-1)+1)$;
- 2) в $\mathbb{CP}^n$ $p \leq (l-3)/(4(q-1)+1)$,
 $p \leq (l+3)/(4(q-1)+1)$, если F^l – кэлерово подмногообразие;
- 3) в $\mathbb{QP}^n$ $p \leq (l-9)/(4(q-1)+1)$,

то F^l является вполне геодезической поверхностью 1) $S^l \subset S^{l+p}$, 2) $\mathbb{CP}^{l/2} \subset \mathbb{CP}^n$, 3) $\mathbb{QP}^{l/4} \subset \mathbb{QP}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для подмногообразий положительной секционной кривизны в сферическом пространстве и кэлеровых подмногообразий положительной бисекционной кривизны в комплексном проективном пространстве утверждение теоремы верно при более слабых ограничениях на коразмерность, соответственно:

- 1) $p < \frac{l - \nu(l)}{2(q-1)}$,
- 2) $p < \frac{l}{2(q-1)} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.1. 1) Из леммы 3.1.2 следует оценка $r \leq \frac{l-p}{2(q-1)}$.

Порядок параболичности $l-r \geq \frac{l+p}{2}$, если $p \leq \frac{l}{4(q-1)+1}$. Из теоремы 1.4.1 следует вполне геодезичность подмногообразия. А такими в сферическом пространстве являются только большие сферы. Случаи 2), 3) доказываются аналогично.

Замечание следует из аналогичных рассуждений при использовании теоремы 1.4.2 [46].

В случае неположительной двумерной внешней кривизны можно доказать более сильные утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть F^l – полное подмногообразие в сферическом пространстве S^{l+p} . Если секционная кривизна F^l и коразмерность удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $\gamma_2 \leq 1$, $p < \frac{l - \nu(l)}{2}$ [29];
- 2) $\frac{1}{4} < \gamma_2 \leq 1$, $p < \frac{l}{2}$ [7];
- 3) $\gamma_2 = 1$, $p < l$ [5],

то подмногообразие является вполне геодезической большой сферой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из оценки (3.1.4) и неположительности внешней кривизны следует, что $\mu \geq l-2p$. Из ограничения на коразмерность следует, что $\mu > \nu(l)$. Из теоремы 3.4.3 (из [3] и [27]) следует, что $\mu = l$.

2) Из ограничения на коразмерность следует, что порядок параболичности $k \geq 1$. Из леммы 3.1.1 [3] следует, что на поверхности лежит замкнутая геодезическая длины 2π . В силу ограничений на кривизну F^l есть компактное подмногообразие и универсальная накрывающая $\bar{F}^l$ есть также компактное односвязное многообразие, кривизна которого удовлетворяет неравенству $\frac{1}{4} < \gamma_2 \leq 1$, и на нем лежит замкнутая

геодезическая длины 2π . Подмногообразие удовлетворяет условиям экстремальной теоремы Топоногова [54]. Откуда следует, что $\overline{F}^l$ глобально изометрично единичной сфере. Но имеет место сферический аналог леммы 3.3.2 [3].

ЛЕММА 3.1.3. *Пусть F^l – гладкая поверхность, изометричная S^l в сферическом пространстве S^n . Если на F^l лежит большая окружность, то поверхность F^l является вполне геодезической большой сферой.*

Отсюда следует утверждение 2) теоремы 3.1.2.

3) Так как F^l имеет нулевую двумерную внешнюю кривизну, то нуль-индекс $\mu \geq l - p > 0$. Из леммы 3.1.1 [3] следует, что на F^l лежит большая окружность. Из леммы 3.1.3 следует, что F^l – большая вполне геодезическая сфера. Этот результат был передоказан в [28].

К. Эйб показал, что голоморфное изометрическое погружение кэлера многообразия в комплексное проективное пространство с нуль-индексом $\mu > 0$ должно быть вполне геодезическим комплексным проективным пространством (теорема 3.4.4 [3]). Но из работы [24] следует, что требование голоморфности погружения является излишним. Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 3.1.3 [29]. *Пусть $f: F^{2l} \rightarrow \mathbb{CP}^{l+p}$ – изометрическое погружение полного кэлера многообразия в комплексное проективное пространство с коразмерностью $2p < l$.*

Если двумерная внешняя кривизна неположительна, то F^{2l} является вполне геодезическим комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (3.1.4) и оценки на коразмерность следует, что $\mu > 0$. Из [24] следует, что F^l – кэлерово многообразие. Из теоремы 3.4.4 [3] следует, что F^l – вполне геодезическое комплексное проективное пространство.

Теоремы о вполне геодезичности имеют место для риманового пространства.

ТЕОРЕМА 3.1.4 [14]. *Пусть F^l – компактная поверхность неположительной внешней q -мерной кривизны в полном римановом пространстве M^{l+p} .*

I. *Если в точках поверхности выполняется условие*

$$R(X, Y)\xi = 0$$

и одно из следующих требований:

- 1) $\gamma_{2/M} > 0$, коразмерность удовлетворяет неравенству $p \leq l/(4(q-1)+1)$;
- 2) $\gamma_{2/F} > 0$, $p \leq l/(4(q-1))$,

где $\gamma_{2/M}$, $\gamma_{2/F}$ – соответственно двумерные секционные кривизны объемлющего многообразия M^{l+p} , поверхности F^l ,

или

II. *Если в точках поверхности выполняются условия:*

$$\langle R(X, Y)\xi, Z \rangle = 0,$$

где X, Y, Z – касательные к F^l векторы, ξ – произвольная нормаль и

$$R(X, Y)X = -kY,$$

где $k = \text{const} > 0$, и коразмерность $p < \frac{l - \nu(l)}{2(q - 1)}$,

то поверхность F^l является вполне геодезическим подмногообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Из оценки (3.1.2) следует, что порядок параболичности k удовлетворяет условию теоремы 1.4.1. Из теоремы 1.4.1 следует утверждение.

II. Из оценки (3.1.4) сильной параболичности следует, что внешний нуль-индекс $\mu > \nu(l)$.

Далше из теоремы 1.4.1 следует утверждение.

В случае I, 1) поверхность F^l можно взять полной некомпактной, M^{l+p} – компактным. В случае II можно потребовать только полноту F^l .

Аналогичная теорема справедлива для кэлерава случая. При этом условие $R(X, Y)\xi = 0$ заменяется условием $R(X, Y)\xi = \lambda I\xi$, положительность секционной кривизны – на положительность бисекционной кривизны и оценка коразмерности $p < \frac{l - \nu(l)}{2(q - 1)}$ – на оценку $p < \frac{l}{2(q - 1)}$. При этом в случае I мы используем теорему 3.4.4 из [3].

Для поверхностей неположительной внешней двумерной кривизны имеет место более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1.5. Пусть F^l – полная односвязная поверхность в римановом пространстве M^{l+p} , секционная кривизна которого ≥ 1 .

Если в точках поверхности выполняется условие

$$\langle R(X, Y)\xi, Z \rangle = 0$$

и

$$\gamma_{2/F} \leq 1, \quad p < \frac{l - \nu(l)}{2},$$

то поверхность является вполне геодезическим подмногообразием, изометричным стандартной сфере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий на кривизну поверхности и риманова многообразия следует неположительность внешней двумерной кривизны поверхности F^l .

Из оценки на коразмерность следует, что нуль-индекс $\mu > \nu(l)$. Пусть точка $Q_0 \in F^l$ такова, что

$$\mu(Q_0) = \min_{Q \in F^l} \mu(Q) = \mu_0 > \nu(l).$$

Тогда по лемме 3.1.1 [3] в близких точках $\mu(Q) = \mu_0$ полные вполне геодезические слои $L(Q)$ в окрестности слоя $L(Q_0)$ образуют геодезическое слоение. В силу ограничений на кривизны вдоль слоев выполняется условие

$$R(X, Y)X = -Y;$$

$$X \in TL(Q), \quad Y \in TL(Q)^\perp, \quad \langle X, X \rangle = 1.$$

Применяя теорему 3.4.3 [3], мы получим, что $\mu = l$ и F^l является вполне геодезическим односвязным подмногообразием, секционная кривизна которого равна единице. Мы получили нужное утверждение.

Если на кривизну риманова многообразия M^n наложить более жесткое ограничение, то имеет место экстремальная

ТЕОРЕМА 3.1.6 [14]. *Пусть F^l – компактная поверхность в полном односвязном римановом пространстве M^{l+p} . Если в точках поверхности выполняется условие $R(X, Y)\xi = 0$ и*

$$\frac{9}{4} \geq \gamma_{2/M} \geq 1, \quad \gamma_{2/F} \leq 1, \quad p \leq \frac{l}{2} - 1,$$

то риманово многообразие M^{l+p} глобально изометрично единичной сфере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неположительности двумерной внешней кривизны и оценки на коразмерность следует, что порядок параболичности $k \geq 2$. По лемме 1.3.1 на поверхности лежит полная вполне геодезическая поверхность R размерности k и кривизны единица. Докажем, что она односвязная. Допустим, что это не так. Пусть R' – универсальная накрывающая вполне геодезического полного многообразия R , $\mathcal{L}$ – замкнутая геодезическая минимальной длины, принадлежащая нетривиальному свободному гомотопическому классу. В силу ограничений на кривизну длина $\mathcal{L}$ больше или равна $4/3\pi$ [54]. Пусть точка $P \in \mathcal{L}$, P_1 – точка на накрывающей такая, что $\pi(P_1) = P$, где π – отображение проекции R' на R . Существует единственная накрывающая $\mathcal{L}'$ геодезической $\mathcal{L}$ с началом в точке P_1 . Кривая $\mathcal{L}'$ не может быть замкнутой кривой, так как тогда бы она стягивалась в точку и соответственно стягивалась бы в точку геодезическая $\mathcal{L}$, что противоречит предположению. Тогда кривая $\mathcal{L}'$ на R' является кратчайшей, соединяющей концевые точки P_1, P_2 . Кривизна R' удовлетворяет условию

$$(3.1.5) \quad \gamma_2 = 1$$

в силу вполне геодезичности R и того факта, что отображение накрытия является локальной изометрией с метрикой на R' , индуцированной накрытием. Тогда в силу (3.1.5) и теоремы сравнения индексов Морса–Шенберга [35] длина кратчайшей на накрывающей R' не превосходит π . Пришли к противоречию с предположением о односвязности подмногообразия R .

Утверждение неверно, если не выполняется ограничение на кривизну. Так, в комплексном проективном пространстве, кривизна которого удовлетворяет неравенству $1 \geq \gamma_2 \geq \frac{1}{4}$, есть вполне геодезические поверхности, глобально изометричные действительному проективному пространству постоянной кривизны $\frac{1}{4}$ [54].

Поэтому R глобально изометрично единичной сфере S^k . Тогда на поверхности F^l лежит замкнутая геодезическая линия длины 2π .

В силу односвязности M^{l+p} и ограничения на кривизну любая геодезическая M^{l+p} длины $\frac{2}{3}\pi$ является кратчайшей [54]. Поэтому к треугольнику $Q_1 Q_2 Q_3$ на R , составленному из кратчайших, применима экстремальная теорема Топоногова.

ТЕОРЕМА 3.1.7 [53]. Пусть M^n – компактное класса C^4 риманово пространство секционной двумерной кривизны ≥ 1 . Если в M^n существует треугольник, составленный из кратчайших, периметр которого равен 2π , то M^n изометрично единичной сфере.

Из теоремы 3.1.6 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 3.1.8. Пусть F^l – компактная поверхность в полном односвязном пространстве M^{l+p} , кривизна которого удовлетворяет неравенству $\frac{9}{4} \geq \gamma_{2/M} \geq 1$. Если в точках поверхности выполняется условие $R(X, Y)\xi = 0$ и одно из условий теоремы 3.1.2, то объемлющее пространство глобально изометрично сфере, а поверхность является большой геодезической сферой.

Теоремы 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.8 существенно обобщают полученные ранее результаты для симметрических пространств ранга один [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.8. Докажем случай, который соответствует условию 2) теоремы 3.1.2. Из теоремы 3.1.7 следует, что объемлющее пространство изометрично единичной сфере, а на поверхности F^l лежит замкнутая геодезическая длины 2π . Для F^l имеет место экстремальная теорема Топоногова [54]: Пусть M^n – компактное класса C^4 риманово многообразие, секционная двумерная кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном направлении удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{4} < \gamma_2 \leq 1.$$

Если в M^n существует замкнутая геодезическая длины 2π , то многообразие M^n изометрично единичной сфере.

Внешняя двумерная кривизна F^l $\overline{\gamma}_2 = 0$. Поэтому нуль-индекс $\mu \geq l - p > \frac{l}{2}$. Из теоремы 3.1.2 следует, что $\mu = l$ и поверхность является вполне геодезической большой сферой S^l .

Для гильбертовых подмногообразий имеет место

ТЕОРЕМА 3.1.9 [43]. Пусть M – полное риманово гильбертово подмногообразие неположительной внешней кривизны в гильбертовой сфере. Если коразмерность вложения конечна, то M вполне геодезическая гильбертова большая сфера.

Для поверхностей неположительной q -мерной кривизны индекс седлообразности $\leq p(q-1)$. Поэтому из теоремы 2.1.1 мы получим

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Пусть F^l – компактная поверхность неположительной внешней q -мерной кривизны коразмерности p в симметрическом пространстве ранга один. Тогда для поверхностей:

- 1) в S^n : $H_{p(q-1)+s}(F^l) = 0$, $0 < s < l - 2p(q-1)$;
- 2) в $\mathbb{CP}^n$: $H_{p(q-1)+s}(F^l) = H_{p(q-1)+s+2i}(F^l)$, $0 < s + 2i < l - 2p(q-1)$;
- 3) в $\mathbb{QP}^n$: $H_{p(q-1)+s}(F^l) = H_{p(q-1)+s+4i}(F^l)$, $0 < s + 4i < l - 2p(q-1)$.

Следствие 3.1.1 имеет смысл при малой коразмерности вложения. При $q = 2$ в сферическом пространстве справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3.1.2. Пусть F^l – компактная поверхность в S^{l+p} , для которой двумерная секционная кривизна $\gamma_2 \leq 1$. Тогда

$$H_{p+s}(F^l) = 0, \quad 0 < s < l - 2p.$$

Утверждение имеет смысл при $p < l/2$. Следствие 3.1.2 дополняет следствие 3.1.1.

2. Слоения на римановых многообразиях. В дифференциальной геометрии активно изучаются геодезические, римановы, омбилические, минимальные слоения. Однако можно ввести более общие классы слоений, когда слои являются сильно k -параболическими, k -параболическими, k -выпуклыми, k -седловыми подмногообразиями.

В случае 2-мерного слоения на трехмерном римановом многообразии M^3 слоение является параболическим, если внешняя двумерная кривизна слоя равна нулю; выпуклым, если внешняя кривизна слоя положительна; гиперболическим, если внешняя кривизна слоя отрицательна.

Д. В. Болотов построил метрику неотрицательной секционной кривизны на сфере S^3 , в которой слоение Рибба является параболическим. Заметим, что слоение Рибба негеодезируемо ни в какой метрике. Отсюда следует, что параболические слоения являются более общим классом слоений, чем геодезические слоения. Им также построен пример гиперболического слоения на касательном расслоении единичных векторов пространственной двумерной компактной формы постоянной отрицательной кривизны [2].

Им же доказана теорема о строении компактного трехмерного риманового многообразия, несущего параболическое слоение.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть M^3 – компактное ориентируемое риманово многообразие с аналитической метрикой и F – параболическое слоение на нем.

1. Если секционная кривизна многообразия M^3 отрицательна, то
 - а) либо M^3 – плоское,
 - б) либо M^3 гомеоморфно $S^2 \times S^1$ и метрика на $S^2 \times S^1$ локально есть метрика риманова произведения.
2. Если секционная кривизна многообразия M^3 неположительна, то
 - а) либо M^3 – плоское,
 - б) либо конечнократная накрывающая M^3 гомеоморфна $M^2 \times S^1$, где M^2 – сфера с $p > 1$ ручками, и метрика на M^3 есть локально метрика риманова произведения.

Сейчас мы изучим топологическое строение компактных римановых многообразий, на которых существуют слоения отрицательной внешней двумерной кривизны. Такое слоение мы будем называть гиперболическим слоением. Каждый слой будет $(l - 1)$ -седловым подмногообразием.

Если размерность слоя равна l , то минимальная размерность объемлющего пространства, когда может существовать гиперболическое слоение, равна $2l - 1$. Имеет место

ТЕОРЕМА 3.2.2 [16]. Пусть F^l – гиперболическое слоение на односвязном компактном римановом многообразии M^{2l-1} . Если $l = 2, 3, 4$, то многообразие M^{2l-1} параллелизуемое.

ПРИМЕЧАНИЕ. По нашему мнению теорема верна при любых значениях $l \geq 2$.

Пусть задана система квадратных уравнений

$$(3.2.1) \quad A^\alpha(X, X) = A_{ij}^\alpha x^i x^j = 0 \quad (i, j = 1, \dots, l; \alpha = 1, \dots, N),$$

где X есть вектор с координатами $x^1, \dots, x^l$. Так как система (3.2.1) однородна, то решения, отличающиеся друг от друга отличным от нуля множителем, различать не будем. Пусть $A(X, Y)$ есть вектор с координатами $A_{ij}^\alpha x^i y^j$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов в касательном пространстве в точке M^{2l-1} .

ЛЕММА 3.2.1. Если в системе уравнений (3.2.1) $N = l - 1$ и для любых не коллинеарных векторов X, Y выполняется условие

$$(3.2.2) \quad \langle A(X, X), A(Y, Y) \rangle - \langle A(X, Y), A(X, Y) \rangle < 0,$$

то система имеет 2^{l-1} действительных нетривиальных решений, среди которых найдется l линейно независимых решений. Любые три решения не лежат в одной плоскости, в трехмерном подпространстве не может лежать более четырех решений [16].

Эта лемма обобщает лемму, доказанную Т. Отзуки [44].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2.2. Из формулы Гаусса следует, что

$$\gamma_{2/F} = \gamma_{2/M} + \langle A(X, X), A(Y, Y) \rangle - \langle A(X, Y), A(X, Y) \rangle,$$

где $\gamma_{2/F}, \gamma_{2/M}$ – двумерные секционные кривизны слоя F^l и объемлющего пространства M^{2l-1} в направлении двумерной площадки, натянутой на векторы X, Y , касательные к слою, $A(X, X)$ – вектор с координатами $A_{ij}^\alpha x^i x^j$, где A_{ij}^α – коэффициенты вторых квадратичных форм слоя относительно ортонормированного базиса нормалей n_α , X, Y – взаимно ортогональные единичные векторы, касательные к слою. Из гиперболичности слоения следует, что

$$\langle A(X, X), A(Y, Y) \rangle - \langle A(X, Y), A(X, Y) \rangle < 0$$

и система квадратных уравнений

$$(3.2.3) \quad A_{ij}^\alpha t^i t^j = 0, \quad \langle t, t \rangle = 0,$$

в каждой точке слоя удовлетворяет условию леммы 3.2.1. Ненулевые решения этой системы определяют асимптотические направления на слоях. Из теоремы о неявной функции и неравенства нулю якобиана системы (3.2.3) в ее решениях следует, что локально асимптотические направления распадаются на 2^l регулярных единичных векторных полей V_i , заданных на многообразии M^{2l-1} . Пусть TM^{2l-1} – касательное расслоение многообразия M^{2l-1} . M_1 – совокупность единичных асимптотических

векторов к слоям. Так как локально они распадаются на регулярные векторные поля, то M_1 является компактным дифференцируемым многообразием [6]. Пусть

$i: M_1 \rightarrow TM^{2l-1}$ – отображение включения,

$\phi: TM^{2l-1} \rightarrow M^{2l-1}$ – естественная проекция.

Тогда отображение

$$\phi \circ i: M_1 \rightarrow M^{2l-1}$$

является локальным диффеоморфизмом, а компактное многообразие M_1 – накрывающей многообразия M^{2l-1} со слоем конечной мощности. Так как M^{2l-1} односвязно, то M_1 состоит из связных компонент, каждая из которых диффеоморфна M^{2l-1} . Каждая компонента есть глобальное невырожденное асимптотическое векторное поле, касательное к слою, определенное на M^{2l-1} . При $l = 2$ утверждение очевидно. Пусть $l = 3$ и V_1 – глобальное невырожденное асимптотическое векторное поле на M^5 ; V_2, V_3 – два других асимптотических векторных поля. Из леммы 3.2.1 следует, что V_1, V_2, V_3 – линейно независимые векторные поля. Пусть $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3$ – ортогональные к V_1 единичные векторные поля, направления которых совпадают с ортогональными проекциями полей V_2, V_3 в касательном пространстве к слою на плоскость, перпендикулярную к V_1 . Пусть $v = (v_1, \dots, v_l)$ – значение векторного поля V_1 в точке Q . Тогда $A_{ij}^\alpha v^i v^j = 0$ и $\langle A(X, v), A(X, v) \rangle > 0$ для векторов X , ортогональных v . Отображение

$$A: T_Q^\perp \rightarrow N_Q$$

ортогонального дополнения $T_Q^\perp$ вектора v в касательном пространстве к слою на нормальное пространство N_Q к слою является изоморфизмом. Это отображение ставит в соответствие каждому вектору $X \in T_Q^\perp(v)$ вектор с координатами $A_{ij}^\alpha x^i v^j$. При этом векторные поля $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3$ отображаются в нормальные линейно независимые поля $A(\tilde{V}_2), A(\tilde{V}_3)$. Векторные поля $V_1, V_2, V_3, A(\tilde{V}_2), A(\tilde{V}_3)$ – линейно независимы в каждой точке. Отсюда следует, что M^5 – параллелизуемое многообразие. Пусть $l = 4$, аналогично случаю $l = 3$ асимптотические векторные поля V_1, V_2, V_3 – линейно независимые. V_4 – поле направлений, ортогональное векторным полям V_1, V_2, V_3 и касательное к слоям. В силу односвязности многообразия M^7 мы можем выбрать единичное глобальное векторное поле V^4 . В дальнейшем ход доказательства совпадает со случаем $l = 3$.

3. Аффинно устойчивые погружения римановых метрик. С.З. Шефелем было введено понятие G -устойчивых погружений [50].

- I. Пусть выделен класс l -мерных многообразий R с римановой метрикой.
- II. Выделен класс l -мерных поверхностей S в E^n .
- III. Задана группа G преобразований евклидова пространства E^n , включающая группу подобия.

При этом объекты S, R, G должны быть связаны между собой следующими свойствами:

- 1) Класс поверхностей S инвариантен относительно группы преобразований G .
- 2) Каждая поверхность F^l , принадлежащая классу S , есть изометрическое погружение некоторого многообразия M класса R .
- 3) G -устойчивое погружение в E^n многообразия M класса R есть некоторая поверхность класса S .

Изометрическое погружение F^l в E^n многообразия M класса R называется устойчивым относительно группы G (G -устойчивым) в классе R , если при любом преобразовании g пространства E^n , принадлежащем группе G , поверхность F переходит в поверхность $g(F)$, являющуюся изометрическим погружением некоторого многообразия класса R .

- 4) Каждое многообразие класса R допускает изометрическое погружение в некоторое E^n в виде поверхности класса S .

Рассмотрим с этой точки зрения сильно параболические поверхности и сильно параболические метрики.

I. а) Риманово пространство принадлежит классу $\tilde{A}_k$, если в касательном пространстве $T_Q M$ в каждой точке есть подпространство $\mathcal{L}^k \subset T_Q$ такое, что для любого $X \in \mathcal{L}^k$ $R(X, Y) = 0$, где Y – любой вектор из T_Q , $R(X, Y)$ – оператор кривизны риманова многообразия. Если в R^l мы возьмем координаты так, чтобы $\mathcal{L}^k$ в точке Q было координатной плоскостью переменных $x_{l-k+1}, \dots, x_l$ и в точке Q метрический тензор $g_{ij} = \delta_{ij}$, то условие $R(X, Y) = 0$ переписывается следующим образом:

$$R_{\alpha i j s} = 0, \quad \alpha = l - k + 1, \dots, l; \quad i, j, s = 1, \dots, l.$$

Этот класс римановых пространств был введен С. Черном, Н. Кейпером [23].

б) Риманово пространство M^l принадлежит классу $\tilde{B}_k$, если $\gamma_{l-k+1} = 0$ при нечетном k , $\gamma_{l-k+2} = 0$ при четном k . При этом имеется в виду, что кривизна равна нулю по всем направлениям в каждой точке.

в) Риманово многообразие M^l принадлежит классу $\tilde{D}_k$, если для каждой $(k+1)$ -мерной плоскости $L^{k+1}(Q) \subset T_Q M^l$, $Q \in M^l$ существует двумерная плоскость $\sigma \subset L^{k+1}(Q)$ такая, что секционная кривизна $\gamma_2(\sigma) \leq 0$ [33], [18].

II. Пусть S есть а) класс k -параболических поверхностей B_k , б) класс сильно k -параболических поверхностей A_k в E^n , в) класс k -седловых поверхностей D_k .

III. G – группа аффинных преобразований в E^n .

Пусть g – невырожденное аффинное преобразование E^n , F^l – поверхность класса S , тогда $g(F^l)$ – также поверхность класса S .

Пусть F^l – подмногообразие в E^n одного из выделенных классов и A – невырожденное аффинное преобразование E^n . Предположим, что F^l задается локально радиус-вектором $X(u^1, \dots, u^l)$. Тогда $\bar{X} = AX$ есть локальная параметризация $\bar{F}^l = A(F^l)$ и $\bar{X}_i = AX_i$, $\bar{X}_{ij} = AX_{ij}$, $1 \leq i, j \leq l$, где нижние индексы обозначают частные производные по переменным u^i, u^j .

Пусть $\bar{Q} \in \bar{F}^l$ и $\bar{\xi}$ – единичный вектор нормали к $\bar{F}^l$ в точке $\bar{Q}$. Тогда $\xi = A^t \bar{\xi}$ – нормаль к F^l в точке $A^{-1}(\bar{Q})$. Действительно,

$$\langle X_i, \xi \rangle = \langle X_i, A^t \bar{\xi} \rangle = \langle AX_i, \bar{\xi} \rangle = \langle \bar{X}_i, \bar{\xi} \rangle = 0.$$

Вторая квадратичная форма $\bar{F}^l$ в точке $\bar{Q}$ относительно нормали $\bar{\xi}$ имеет вид

$$\langle \bar{X}_{ij}, \bar{\xi} \rangle = \langle AX_{ij}, (A^{-1})^t \xi \rangle = \langle X_{ij}, \xi \rangle.$$

Отсюда следует, что пространства вторых квадратичных форм в соответствующих точках Q и $\bar{Q}$ совпадают. Отсюда следует аффинная инвариантность выделенных классов подмногообразий.

а) Сильно k -параболические подмногообразия A_k в евклидовом пространстве E^n имеют индуцированную метрику, которая принадлежит к классу $\tilde{A}_k$ сильно k -параболических метрик. Это непосредственно следует из формулы Гаусса.

б) Метрика k -параболической поверхности принадлежит классу B_k , т.е. $\gamma_{l-k+1} = 0$ при нечетном k и $\gamma_{l-k+2} = 0$ при четном $l - k$. Возьмем ограничение вторых квадратичных форм поверхности F^l на произвольную плоскость $E^{l-k+1} \subset T_Q F^l$ при нечетном $l - k$. Так как поверхность k -параболическая, то детерминант ограничения второй квадратичной формы относительно произвольной нормали равен нулю. Так как при соответствующем выборе координат

$$\gamma_{l-k+1}(E^{l-k+1}) = c \int_{S^p} \det A(Q, \xi) d\omega,$$

где $d\omega$ – элемент площади на единичной сфере нормалей S^p , то $\gamma_{l-k+1} = 0$. Аналогично при четном $l - k$: $\gamma_{l-k+2} = 0$.

в) Метрика k -седловой поверхности принадлежит классу $\tilde{D}_k$ [33], [18]. Допустим, это не так. То есть найдется плоскость $E^{k+1} \subset T_Q F^l$ такая, что секционная кривизна F^l вдоль двумерных площадок в этой плоскости больше нуля. Тогда из леммы 3.3.1 [3] следует, что найдется нормаль ξ к F^l такая, что ограничение второй квадратичной формы F^l относительно этой нормали на плоскость E^{k+1} будет положительно определенной формой. Но тогда вторая квадратичная форма F^l относительно нормали ξ имеет не менее $(k + 1)$ главных кривизн одного знака. Это противоречит k -седлообразности F^l .

Итак, мы получили, что каждому выделенному классу подмногообразий соответствует класс метрик. Справедливо, в некотором смысле, обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть F^l – регулярное подмногообразие в евклидовом пространстве E^n , которое имеет индуцированную метрику одного из классов: а) $\tilde{A}_k$, б) $\tilde{B}_k$, в) $\tilde{D}_k$.

Если при невырожденных аффинных преобразованиях евклидова пространства метрики поверхностей не выходят из соответствующих классов, то F^l есть

- а) сильно k -параболическая поверхность, которая принадлежит классу A_k ; если $k = l$, то F^l есть сильно $(l - 1)$ -параболическая поверхность;
- б) k -параболическая поверхность;
- в) k -седловая поверхность.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорему можно переформулировать в следующем виде: устойчивые относительно аффинных преобразований погружения классов метрик $\tilde{A}_k$, $\tilde{B}_k$, $\tilde{D}_k$ являются соответственно сильно k -параболическими, k -параболическими, k -седловыми подмногообразиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3.1. а) Допустим противное. Это значит, что найдется вектор $X_0 \in \mathcal{L}_k \subset T_Q F^l$, для которого относительно одной из нормалей ξ_1

$$(3.3.1) \quad A(Q, \xi_1)X_0 \neq 0.$$

Выберем в $T_Q F^l$ базис, состоящий из главных направлений матрицы $A(Q, \xi_1)$. В этом базисе матрица $A(Q, \xi_1)$ приводится к диагональному виду и условие (3.3.1) сводится

к тому, что хотя бы одна координата вектора $A_{11}^1 x_0^1, \dots, A_{ll}^1 x_0^l$ отлична от нуля. Пусть для определенности $A_{11}^1 x_0^1 \neq 0$. Если $A_{22}^1 = \dots = A_{ll}^1 = 0$, то $r(Q, \xi_1) = 1$. Если для всех близких к ξ_1 нормалей $r(Q, \xi) = 1$, то $r(Q) = 1$ и поверхность изометрична в точке плоскому пространству, т.е. двумерная кривизна по всем направлениям равна нулю. Это противоречит условию теоремы. Поэтому для некоторой близкой к ξ_1 нормали $r(Q, \xi) \geq 2$. Неограничивая общности, можем считать, что $r(Q, \xi_1) = 2$ и $A_{22}^1 \neq 0$. Так как $x_0^1 \neq 0$, то найдется вектор Y_0 , перпендикулярный X_0 , такой, что $x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1 \neq 0$. Так как $A_{11}^1, A_{22}^1 \neq 0$, то $(A_{11}^1 A_{j2}^1 - A_{i2}^1 A_{j1}^1) x_0^i y_0^j = A_{11}^1 A_{22}^1 (x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1) \neq 0$. Так как $X_0 \subset \mathcal{L}_k$, то $R_{ij12} x_0^i y_0^j = 0$, где R_{ijkl} – компоненты тензора кривизны поверхности F^l . Пусть касательная плоскость F^l в точке Q есть плоскость переменных $x_1, \dots, x_l$, оси переменных $x_1, \dots, x_l$ – главные направления второй квадратичной формы относительно нормали ξ_1 ; ось z_1 направим по нормали ξ_1 , остальные оси z_α – по ортонормированному базису нормалей ξ_α в точке Q . В некоторой окрестности этой точки поверхность F^l задается явно:

$$z_\alpha = f_\alpha(x_1, \dots, x_l).$$

Рассмотрим поверхность $A(F^l)$, полученную из F^l путем невырожденного аффинного преобразования евклидова пространства E^{l+p} :

$$(x_1, \dots, x_l, z_1, \dots, z_p) \rightarrow (x_1, \dots, x_l, \lambda z_1, \dots, z_p).$$

Для поверхности F^l

$$R_{ij12} x_0^i y_0^j = A_{11}^1 A_{22}^1 (x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1) + \sum_{\alpha=2}^p (A_{i1}^\alpha A_{j2}^\alpha - A_{i2}^\alpha A_{j1}^\alpha) x_0^i y_0^j = 0,$$

где A_{ij}^α – коэффициенты вторых квадратичных форм относительно базисных нормалей в точке Q , отличных от ξ_1 . Для поверхности $A(F^l)$ в точке $g(Q)$

$$\bar{R}_{ij12} x_0^i y_0^j = \lambda^2 A_{11}^1 A_{22}^1 (x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1) + \sum_{\alpha=2}^p (A_{i1}^\alpha A_{j2}^\alpha - A_{i2}^\alpha A_{j1}^\alpha) x_0^i y_0^j.$$

При достаточно больших λ будет $\bar{R}_{ij12} x_0^i y_0^j \neq 0$. Мы пришли к противоречию с предположением, что метрика $A(F^l)$ принадлежит классу A_k .

Доказательство пунктов б) [11] и в) [33], [18] происходит аналогичным образом.

Введенные классы метрик и подмногообразий удовлетворяют условиям 1)–3) для G -устойчивых погружений, но условие 4) в многомерном случае ($l > 2$), вообще говоря, не имеет места даже в случае сильно параболических метрик класса $\tilde{A}_k$ [20].

При попытке дать определение выпуклой поверхности произвольной коразмерности, С.З. Шефелем была доказана

ТЕОРЕМА 3.3.2. *Полная трижды непрерывно дифференцируемая k -мерная поверхность F в n -мерном евклидовом пространстве E^n , удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) *риманова кривизна внутренней метрики поверхности F в каждой точке и в каждом двумерном направлении положительна;*
- 2) *свойство 1) сохраняется при любом невырожденном аффинном преобразовании пространства E^n ,*

есть выпуклая поверхность в некоторой $(k+1)$ -мерной плоскости $E^{k+1} \subset E^n$.

Мы видим, что между классами римановых метрик и классами поверхностей в многомерном случае нет таких тесных связей, как для двумерного случая. Ведь большинство римановых метрик положительной секционной кривизны нельзя изометрично погрузить в евклидово пространство в виде регулярной гиперповерхности. Аналогичное справедливо и для других классов метрик и соответствующих им классов подмногообразий.

Может быть, это и есть одна из причин того, что в многомерном случае геометрия подмногообразий и риманова геометрия являются различными, мало связанными ветвями геометрии, в отличие от двумерного случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Abe K. Applications of a Riccati type differential equation to Riemannian manifolds with totally geodesic distributions // *Tohoku Math. J.* 1973. V. 25. P. 425–444.
- [2] Болотов Д. В. Гиперслоения на компактных трехмерных многообразиях с ограничением на внешнюю кривизну слоев // *Матем. заметки.* 1998. Т. 63. № 5. С. 651–659.
- [3] Борисенко А. А. Внешняя геометрия сильно-параболических многомерных подмногообразий // *УМН.* 1997. Т. 52. № 6. С. 3–52.
- [4] Борисенко А. А. О строении l -мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n -мерном евклидовом пространстве // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1973. № 13. С. 18–27.
- [5] Борисенко А. А. О полных поверхностях в пространствах постоянной кривизны // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1974. № 15. С. 8–15.
- [6] Борисенко А. А. О компактных поверхностях отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1976. № 19. С. 9–11.
- [7] Борисенко А. А. Полные l -мерные поверхности неположительной внешней кривизны в римановом пространстве // *Матем. сб.* 1977. Т. 104 (146). № 4 (12). С. 559–577.
- [8] Борисенко А. А. О характеристических классах Понтрягина компактной поверхности в сферическом пространстве // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1980. № 23. С. 24–30.
- [9] Борисенко А. А. Внешне геометрические, топологические свойства параболических и седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 257. № 4. С. 783–787.
- [10] Борисенко А. А. О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // *Матем. сб.* 1981. Т. 116 (158). № 3 (11). С. 440–457.
- [11] Борисенко А. А. О параболических поверхностях в евклидовом пространстве // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1982. № 25. С. 3–5.
- [12] Борисенко А. А. О полных параболических поверхностях в евклидовом пространстве // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1985. № 28. С. 8–19.
- [13] Борисенко А. А. О некоторых классах многомерных поверхностей // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1986. № 29. С. 5–12.
- [14] Борисенко А. А. Об экстремальных свойствах компактных параболических поверхностей в римановом пространстве постоянной кривизны // *Матем. сб.* 1987. Т. 133 (175). № 1 (5). С. 112–126.
- [15] Борисенко А. А. О цилиндрических многомерных поверхностях в пространстве Лобачевского // *Укр. геом. сб. Харьков.* 1990. № 33. С. 18–27.
- [16] Борисенко А. А. О слоениях отрицательной внешней кривизны на компактных римановых многообразиях // *Матем. заметки.* 1997. Т. 62. № 5. С. 673–676.
- [17] Борисенко А. А., Остроумов С. А. Строение параболических кэлеровых подмногообразий в кэлеровых многообразиях // *Матем. физика, анализ, геометрия. Харьков.* 1994. Т. 1. № 1. С. 60–77.

- [18] Borisenko A. A., Rabelo M., Tenenblat K. Strongly Parabolic Timelike Submanifolds of Minkovsky Space // Матем. физика, анализ, геометрия (г. Харьков). 1996. Т. 6. № 1–2.
- [19] Borisenko A. A., Rabelo M., Tenenblat K. On saddle submanifolds of Riemannian manifolds // *Geom. Dedicata*. 1997. V. 67. № 2. P. 233–243.
- [20] Борисенко А. А., Ушаков В. Г. Об изометрическом погружении сильно параболических метрик в классе сильно параболических поверхностей // *Укр. геом. сб.* Харьков. 1990. № 33. С. 27–37.
- [21] Борисенко А. А., Ямпольский А. А. Риманова геометрия расслоений // *УМН*. 1991. Т. 46. № 6. С. 51–95.
- [22] Chern S. S. On the curvatures and characteristic classes of Riemannian manifold // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*. 1955. V. 20. P. 117–126.
- [23] Chern S. S., Kuiper N. H. Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space // *Ann. Math.* 1952. V. 56. P. 422–430.
- [24] Dajczer M., Rodriguez L. On isometric immersions into complex space forms // *Math. Ann.* 1994. V. 229. № 2. P. 223–230.
- [25] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [26] Escobales R. H. Riemannian submersions with totally geodesic fibers // *J. Differ. Geom.* 1975. V. 10. P. 253–276.
- [27] Ferus D. Totally geodesic foliations // *Math. Ann.* 1970. V. 188. P. 313–316.
- [28] Ferus D. Isometric immersions of constant curvature manifolds // *Math. Ann.* 1975. V. 217. P. 155–156.
- [29] Florit L. On submanifolds with nonpositive extrinsic curvature // *Math. Ann.* 1994. V. 298. P. 187–192.
- [30] Frankel T. Manifolds with positive curvature // *Pacific J. Math.* 1961. V. 11. P. 165–174.
- [31] Frankel T. On the fundamental group of a compact minimal submanifold // *Ann. Math.* 1966. V. 83. P. 68–73.
- [32] Galloway G. Some results on the occurrence of compact minimal submanifolds // *Manuscr. Math.* 1981. V. 35. P. 209–219.
- [33] Глазырин В. В. Топологическое и метрическое строение k -седловых поверхностей // *Сиб. матем. журн.* 1978. Т. XIX. № 3. С. 555–563.
- [34] Gray A. Some relations between curvature and characteristic classes // *Math. Ann.* 1970. V. 184. № 4. P. 257–268.
- [35] Громолл Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
- [36] Hadamard J. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique // *J. Math. Pures Appl.* 1897. V. 3. P. 331–387.
- [37] Kenmotsu K., Xia C. Intersections of minimal submanifolds in manifolds of partially positive curvature // *Kodai Math. J.* 1995. V. 18. № 2. P. 242–249.
- [38] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
- [39] Larsen M. E. On the topology of complex projective manifolds // *Invent. Math.* 1973. V. 19. № 3. P. 251–260.
- [40] Маренич В. Б. Метрическое строение открытых многообразий неотрицательной кривизны // *Укр. геом. сб.* Харьков. 1983. № 26. С. 79–96.
- [41] Милнор Дж. Теория Морса: Мир, 1965.
- [42] Moore J. D. Submanifolds of constant positive curvature // *Duke Math. J.* 1977. V. 44. № 2. P. 449–484.
- [43] Окрут С. И. Римановы гильбертовы подмногообразия неположительной внешней кривизны // *Укр. геом. сб.* Харьков. 1990. № 33. С. 77–91.
- [44] Otsuki T. On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application // *Proc. Japan Acad.* 1953. V. 29. P. 99–100.
- [45] Reckziegel H. On the eigenvalues of the shape operator of an isometric immersion into a space of constant curvature // *Math. Ann.* 1979. V. 243. P. 71–82.

- [46] Ровенский В. Ю. Характеризация вполне геодезических подмногообразий S^m и $\mathbb{CP}^n$ // Укр. геом. сб. Харьков, 1983. № 26. С. 79–96.
- [47] Ровенский В. Ю. Замечание о полных параболических подмногообразиях // Укр. геом. сб. Харьков, 1987. № 30. С. 87–89.
- [48] Ровенский В. Ю. Условия разложения линейчатых и параболических поверхностей в S^m и $\mathbb{CP}^m$ // Укр. геом. сб. Харьков, 1989. № 32. С. 103–115.
- [49] Шефель С. З. О двух классах k -мерных поверхностей в n -мерном евклидовом пространстве // Сиб. матем. журн. 1969. Т. 10. № 2. С. 459–466.
- [50] Шефель С. З. Поверхности в евклидовом пространстве // Математический анализ и смежные вопросы математики (сборник). Новосибирск: Наука, 1978. С. 297–318.
- [51] Спенсер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
- [52] Thorpe J. Sectional curvatures and characteristic classes // Ann. Math, 1964. V. 80. № 3. P. 429–443.
- [53] Топоногов В. А. Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу // УМН. 1959. Т. XIV. № 1. С. 87–130.
- [54] Топоногов В. А. Некоторые экстремальные теоремы римановой геометрии // Сиб. матем. журн. 1967. Т. VIII. № 5. С. 1079–1103.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10.04.1997