Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Чакветадзе, Эргодические свойства инвариантных мер косо́го произведе-
ния в одномерной модели бурения, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 4, 223–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm880>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:31:35

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНЫХ МЕР КОСОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ БУРЕНИЯ

Г. ЧАКВЕТАДЗЕ

Исследуется модель бурения, предложенная А. Лясотой в [1]. Чтобы определить одномерное преобразование, описывающее динамику процесса бурения, введем отображения $v: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ и $w: [0, 1) \mapsto [0, 1)$. Пусть $p: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — 1-периодическая, выпуклая и дважды непрерывно дифференцируемая на $[0, 1]$ функция, симметричная относительно точки $\frac{1}{2}$, $m = \inf_{r \in [0, 1]} |p''(r)|$, $M = \sup_{r \in [0, 1]} |p''(r)|$, $\lambda < m$. Для $s \in \mathbb{R}$ $v(s) = v_\lambda(s)$ — абсцисса ближайшей справа к s точки пересечения графиков функций p и u_s , где

$$u_s(r) = u_\lambda(r, s) = p(s+0) + p'(s+0)(r-s) - \frac{\lambda}{2}(r-s)^2.$$

Отображение w задается равенством

$$w(s) = w_\lambda(s) = v(s) \bmod 1, \quad s \in [0, 1).$$

Объектом изучения является преобразование $\tau: [0, N) \mapsto [0, N)$, определяемое по формуле

$$(A) \quad \tau(s) = \tau_{\lambda, N}(s) = w(s \bmod 1) + [v(s)] \bmod N, \quad s \in [0, N), \quad N \in \mathbb{N}$$

($[r]$ обозначает целую часть числа r).

Опишем кратко геометрические свойства отображений w и τ в предположении, что $\lambda < \frac{m}{2}$.

ЛЕММА 1. *Э точки $s_0, s_1, \dots, s_n$, $n \geq 2$, $0 = s_n < s_{n-1} < \dots < s_1 < \frac{1}{2} < s_0 = 1$ такие, что отображение w непрерывно дифференцируемо на интервалах $I_k = (s_k, s_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, и строго убывает на I_1 от $1 - s_1$ до 0, на I_k , $k = 2, \dots, n-1$, — от $1 - s_k$ до $w \circ w(s_{k-1} + 0)$, и на I_n — от $w(0 + 0)$ до $w \circ w(s_{n-1} + 0)$, причем $w(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.*

ЛЕММА 2. *Для $s \in (s_k + i - 1, s_{k-1} + i - 1)$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, N$, справедлива формула*

$$\tau(s) = w(s - i + 1) + (k + i - 1) \bmod N.$$

Для $p \geq 1$, множества $E = \prod_{j=1}^t [c_j, d_j]$ и функции f , заданной на E , символом $V_E^p f$ обозначается число $\sum_{j=1}^t V_{[c_j, d_j]}^p f$, где $V_{[c_j, d_j]}^p$ — p -вариация f на $[c_j, d_j]$; E называется τ -инвариантным, если $\tau(E) = E \bmod 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $V_{[0, 1]}^1 p'' < \infty$ и выполнено условие $(m - \lambda)^3 / \lambda > (M - \lambda)^2 + \frac{1}{8}(M - m)(m - \lambda)$. Тогда $\forall N$ отображение τ , определяемое по формуле (A), имеет конечную абсолютно непрерывную инвариантную меру μ , причем все такие меры сосредоточены на τ -инвариантном множестве $G = \prod_{i=0}^{N-1} [w(1 - s_{n-1}) + i, 1 - s_{n-1} + i]$.*

Пусть μ_w — конечная абсолютно непрерывная инвариантная мера отображения w (см. [2]). Преобразование τ изоморфно косому произведению с N -точечным слоем над w . Через μ_N обозначим равномерную меру на множестве $\{1, \dots, N\}$. Изоморфизм переводит инвариантную меру $\mu_w \times \mu_N$ косого произведения в требуемую меру μ . Вторая часть утверждения теоремы следует из того факта, что множество $F = [w(1 - s_{n-1}), 1 - s_{n-1}]$ w -инвариантно и $\forall s \in (0, 1)$ $\text{dist}(w^j(s), F) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Исследуем эргодические свойства системы (τ, μ) . Пусть $\tau_G = \tau|_G$. В пространстве ограниченных измеримых функций на G рассмотрим оператор Перрона–Фробениуса P_τ , задаваемый формулой

$$P_\tau f(y) = \sum_{s \in \tau_G^{-1}(y)} \frac{f(s)}{|\tau'_G(s)|}.$$

Оператор P_τ продолжается единственным образом до ограниченного линейного положительного оператора на $L_1 \stackrel{\text{def}}{=} L_1(G, \nu)$, где ν — мера Лебега.

ТЕОРЕМА 2. Если $V_{[0,1]}^1 p'' < \infty$ и $(m - \lambda)^3 / \lambda > (M - \lambda)^2$, то $\forall N$ (1) мера μ из теоремы 1 единственна; (2) динамическая система (τ, μ) слабо перемешивает.

Пусть T – индуцированное кусочно-монотонное отображение преобразования τ на множестве $E = \prod_{i=0}^{N-1} [w(1 - s_{n-1}) + i, q_1 + i]$, где q_1 – крайняя правая неподвижная точка w . Утверждение (1) выводится из следующего факта.

ЛЕММА 3. Пусть

- (i) $\inf_E |T'| > 1$ и $V_E^1 \frac{1}{|T'|} < \infty$;
- (ii) $\inf |T'| > 2$ на $\prod_{i=0}^{N-1} [w(1 - s_{n-1}) + i, q_2 + i]$, где $q_2 \in I_2$ – прообраз q_1 при отображении w ;
- (iii) $w(1 - s_1) < q_2$.

Тогда $\forall N$ отображение T эргодично.

В силу (i) в нашей ситуации применима теорема Вонга (см. [3]) о структуре разбиения на эргодические компоненты отображения T , в соответствии с которой число таких компонент конечно и каждая из них – конечное дизъюнктное объединение отрезков. Условия (ii) и (iii) позволяют уточнить эту структуру, используя понятие накрывающей эргодической компоненты:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эргодическая компонента Λ отображения T называется *накрывающей*, если $\exists i \in \{0, \dots, N-1\}$: $q_1 + i \in \Lambda$.

Оказывается, что в условиях теоремы 2 накрывающие компоненты содержат в своей внутренней определенной область фазового пространства. Эргодичность преобразования T следует из того факта, что при этом все эргодические компоненты T – накрывающие.

Теперь докажем (2). Сначала приведем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\exists L \in \mathbb{N}$: $\inf_G |(\tau_G^L)'| > 1$. Кроме того, $V_G^1 \frac{1}{|(\tau_G^L)'|} < \infty$.

Положим $E_l = \{f \in L_1 : P_\tau^l f = \lambda f, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$, $l \in \mathbb{N}$. В силу предложения подпространства E_l могут быть описаны с помощью теоремы Хофбауера и Келлера о спектральном разложении оператора P_τ (теорема 1 в [4]), и $\forall l \in \mathbb{N}$ выполнено $E_l = E_1$, $\dim E_1 < \infty$. Так как точки спектра оператора P_τ , принадлежащие единичной окружности, порождают в ней конечную подгруппу (см. [5]), то $\exists K \in \mathbb{N}$: $E_K = \{f : P_\tau^K f = f, \inf_G |(\tau_G^K)'| > 1\}$. С этого момента рассуждаем по схеме, предложенной в доказательстве леммы 3, с τ_G^K вместо T (роль оценок (ii) и (iii) при этом играет условие эргодичности, полученное в (1)) и приходим к тому, что $\dim E_1 = 1$. Слабое перемешивание вытекает из теоремы 2 в [4].

Из теоремы 2 и теорем 3–5 в [4] выводится, что эндоморфизм (τ, μ) точный, бернулиевский и, если $V_G^p f < \infty$, $p \geq 1$, то для стохастического процесса $S_u = \sum_{j=0}^{u-1} f \circ \tau^j$ выполнена центральная предельная теорема.

Автор глубоко признателен проф. Степину за поддержку и интерес к этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lasota A., Rusek P. // Archivum Gornictwa. 1974. V. 19. № 3. P. 281–295. [2] Chakvetadze G. // J. Dynamical and Control Systems. 1996. V. 2. № 4. P. 485–502. [3] Wong S. // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 246. P. 493–500. [4] Hofbauer F., Keller G. // Math. Z. 1982. V. 180. P. 119–140. [5] Rychlik M. // Studia Math. 1983. P. 69–80.

Московский авиационный институт

Принято редколлегией
23.05.1997