Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Апанасов, Геометрия и топология комплексных гиперболических многообразий и многообразий Коши–Римана, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 5, 9–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:16:19

УДК 515.1

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ И МНОГООБРАЗИЙ КОШИ–РИМАНА

Б. АПАНАСОВ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	9
2. Комплексные гиперболические и гейзенберговы многообразия	13
3. Дискретные действия на нильпотентных группах и гейзенберговых многообразиях	16
4. Геометрическая конечность в комплексной гиперболической геометрии	18
5. Комплексные гомологические h -кобордизмы и бесконечно удаленная граница	23
6. Гомеоморфизмы, индуцированные изоморфизмами групп	27
7. Деформации комплексных гиперболических и CR -структур: жесткость и нежесткость	31
Список литературы	41

1. Введение

В этой работе мы излагаем недавние продвижения в изучении геометрии и топологии гиперболических многообразий M непостоянной отрицательной кривизны и соответствующих бесконечно удаленных сферических многообразий Коши–Римана M_∞ , снабженных структурой Карно–Каратеодори.

Класс комплексных гиперболических многообразий занимает видное положение в ряду многообразий отрицательной кривизны по нескольким причинам. Во-первых, это простейшие кэлеровы многообразия отрицательной кривизны, а их комплексная структура позволяет привлечь к их изучению широкий спектр технических средств. В то же время, абсолют такого многообразия является сферическим CR -многообразием и представляет собой простейший пример многообразия с контактной структурой. Во-вторых, эти многообразия являются простейшими многообразиями отрицательной кривизны, но непостоянной секционной кривизны, и полученные на сей день результаты демонстрируют поразительные различия геометрии и топологии подобных

Часть работы, выполненная в MSRI, была частично поддержана грантом NSF № DMS-9022140.

многообразий и (вещественных гиперболических) многообразий постоянной отрицательной кривизны [BS], [BuM], [EMM], [Go1], [GM], [Min], [Yu1]. В-третьих, эти многообразия занимают исключительное место в ряду симметрических пространств ранга один с точки зрения деформаций: для них характерна нежесткость вещественных гиперболических многообразий малой размерности (см. [Th], [A1], [A2] и § 7) и жесткость кватернионных и октавных гиперболических многообразий и локально симметрических пространств более высокого ранга [MG1], [Co2], [P]. Наконец, с момента возникновения теории гладких 4-мерных многообразий черпает в теории комплексных поверхностей самые важные примеры. Теперь эти долги возвращаются, и мы можем изучать комплексно-двумерные многообразия с помощью инвариантов Зайберга–Виттена, разложений 4-мерных многообразий вдоль трехмерных гомологических сфер, гомологий Флоера и новых инвариантов h -кобордизмов (см. [W], [LB], [BE], [FS], [S], [A9] и § 5).

Комплексная гиперболическая геометрия – это геометрия единичного шара $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^n$ в $\mathbb{C}^n$ с кэлеровой структурой, задаваемой метрикой Бергмана (ср. [CG], [Go4]), автоморфизмы которой суть голоморфные автоморфизмы шара, т.е. элементы группы $PU(n, 1)$ (заметим, что комплексные гиперболические многообразия с неэлементарными фундаментальными группами комплексно-гиперболически по Ш. Кобаяси [Kob].) В данной работе мы изучаем геометрию и топологию комплексных гиперболических многообразий с помощью сферической CR -геометрии Коши–Римана их абсолютов. Моделью здесь служит одноточечная компактификация (нильпотентной) группы Гейзенберга, которая является бесконечно удаленной сферой комплексного гиперболического пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. В частности, мы используем структурную теорему 3.1, относящуюся к действиям дискретных групп на nilпотентных группах Ли (в частности, на группе Гейзенберга $\mathcal{H}_n$), которая обобщает теорему Бибераха, касающуюся евклидовых пространств [Wo], и усиливает один результат Л. Ауслендера [Au].

Основное условие, которое мы накладываем на комплексное гиперболическое многообразие M – это геометрическая конечность его фундаментальной группы $\pi_1(M) = G \subset PU(n, 1)$, означающая, в частности, что G конечно порождена [Bow] и, более того, конечно определена (см. следствие 4.5). Первое определение геометрически конечного многообразия M (данное Л. Альфорсом [Ah]) было связано со стремлением рассматривать такие многообразия, которые можно превратить в клетку разрезами вдоль конечного числа вполне геодезических гиперповерхностей. Понятие геометрической конечности оказалось уместным в случае вещественных гиперболических многообразий (постоянной секционной кривизны), для изучения структуры которых используются мощные методы, основанные на геометрическом анализе и идеях Терстона [BM], [Mar], [Th], [A1], [A3]. Некоторые из этих идей можно использовать и в случае пространств с зацепленной отрицательной кривизной (см. [Bow]). Однако геометрические методы, опирающиеся на рассмотрение фундаментальных полиэдров с конечным числом граней (см. § 4), не годятся для пространств непостоянной кривизны, и наше геометрическое описание геометрически конечных комплексных гиперболических многообразий опирается на геометрический анализ их ‘тонких’ концов. Основой этого анализа является вскрываемая нами структура расслоения на (вообще говоря, некомпактных) гейзенберговских многообразиях, что напоминает результаты Громова о (компактных) почти плоских многообразиях (см. [Gr], [BK]).

В качестве приложения наших результатов по геометрической конечности нам удастся найти конечное покрытие произвольного геометрически конечного гиперболичес-

кого многообразия, параболические концы которого имеют наипростейшую структуру: это концы с абелевой или нильпотентной (степени 2) голономией (теорема 4.9). Еще одно приложение – это изучаемая нами взаимообусловленность топологии и кэлеровой геометрии n -мерных комплексных гиперболических многообразий и топологии и CR -геометрии соответствующих бесконечно удаленных $(2n - 1)$ -мерных многообразий (см. теорему 5.4 об h -кобордизме в настоящей работе). В этом отношении свойство геометрической конечности весьма своеобразно в комплексной размерности два: комплексная поверхность с конечно порожденными фундаментальными группами может иметь “большие” концы на бесконечности, но быть геометрически конечной. Заметим также, что на этих некомпактных геометрически конечных комплексных гиперболических поверхностях может быть бесконечное число гладких структур (см. [BE]).

Теорема 5.4 об h -кобордизме – это, помимо прочего, попытка получить информацию о компонентах бесконечно удаленной границы комплексных гиперболических многообразий. Ситуация здесь коренным образом отличается от вещественно-гиперболического случая. Ведь в силу теоремы Кона–Росси об аналитическом продолжении для компактного края [ЕММ] и теоремы Д. Бернса для случая, когда хотя бы одна компонента бесконечно удаленной границы компактна (см. также [NR1, теорема 4.4], [NR2]), бесконечно удаленный край комплексного гиперболического многообразия M бесконечного объема связан (а само многообразие геометрически конечно при $\dim_{\mathbb{C}} M \geq 3$), если выполнено хотя бы одно из вышеуказанных условий типа компактности. Однако если все компоненты края M некомпактны, то край $\partial_{\infty} M$ может иметь сколь угодно много компонент, что видно из нашей конструкции в теоремах 5.2 и 5.3.

Результаты по геометрической конечности естественно связаны с изучавшейся Салливаном стабильностью дискретных представлений $\pi_1(M)$ в $PU(n, 1)$, с деформациями комплексных гиперболических многообразий и соответствующих бесконечно удаленных CR -многообразий и с эквивариантными (квазиконформными или квазисимметрическими) гомеоморфизмами, индуцирующими подобные деформации и изоморфизмы дискретных подгрупп $PU(n, 1)$. Результаты в этом направлении обсуждаются в двух последних параграфах.

Комплексные гиперболические и CR -структуры представляют интерес прежде всего с точки зрения свойств своих деформаций, где можно столкнуться и с жесткостью и с нежесткостью. А именно, комплексные гиперболические многообразия конечного объема являются жесткими по теореме Мостова [Mo1] (охватывающей все локально симметрические пространства ранга один). Тем не менее, их аналоги *постоянной кривизны*, вещественные гиперболические многообразия, все же нежестки в малых размерностях и в смысле квазифуксовых деформаций (см. обсуждение в § 7). В противоположность этому, комплексные гиперболические многообразия отличаются той же супержесткостью, что и кватернионные или октавные гиперболические многообразия (см. теоремы жесткости Пансю [P] и Корлетта [Co1-2], напоминающие супержесткость, установленную Маргулисом [MG1] для высших рангов). А именно, по теореме Голдмана [Go1] о локальной жесткости в размерности $n = 2$ и ее обобщению [GM] на $n \geq 3$, всякое близкое к тождественному дискретное представление $\rho: G \rightarrow PU(n, 1)$ кокомпактной решетки $G \subset PU(n - 1, 1)$ оставляет на месте некоторое вполне геодезическое комплексное подпространство $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, а если $n \geq 3$, то эта жесткость даже глобальна по знаменитой теореме Юэ [Yu1].

В этой работе мы, в числе прочего, намереваемся показать, что в отличие от неш-

тейновых комплексных гиперболических многообразий, комплексные гиперболические многообразия Штейна, вообще говоря, не являются жесткими. В их гибкости есть два аспекта. Во первых, мы покажем, что условие, чтобы группа $G \subset PU(n, 1)$ сохраняла вполне геодезическую комплексную гиперплоскость в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, гарантирует локальную жесткость деформаций только в случае кокомпактных решеток $G \subset PU(n-1, 1)$. Это вытекает из следующего нашего результата [ACG]:

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $G \subset PU(1, 1)$ – ко-конечная свободная решетка, действие которой на $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ порождено четырьмя вещественными инволюциями (с неподвижными попарно соприкасающимися вещественными окружностями на бесконечности). Тогда существует непрерывное семейство $\{f_{\alpha}\}$, $-\epsilon < \alpha < \epsilon$, G -эquivariantных гомеоморфизмов $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, индуцирующее нетривиальные квазифуксовы (точные дискретные) представления $f_{\alpha}^*: G \rightarrow PU(2, 1)$. Более того, никакой G -эquivariantный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, индуцирующий представление f_{α}^* , не может быть квазиконформным при $\alpha \neq 0$.*

Как видно, теорема Салливена о квазиконформной стабильности [Su2] не охватывает этого случая, который, вместе с тем, представляет собой первый пример непрерывной (топологической) деформации ко-конечной фуксовой группы $G \subset PU(1, 1)$ в квазифуксову группу $G_{\alpha} = f_{\alpha} G f_{\alpha}^{-1} \subset PU(2, 1)$ с предельным множеством $\Lambda(G_{\alpha})$ хаусдорфовой размерности $\dim_H \Lambda(G_{\alpha}) > 1$ (но сколь угодно близкой к 1) при $\alpha \neq 1$, ср. [Co1].

Далее, заметим, что некомпактность, имеющаяся в нашей теореме, также не является существенной для нежесткости. А именно, комплексные гиперболические многообразия Штейна, являющиеся гомотопически эквивалентными своим замкнутым вещественным вполне геодезическим поверхностям, также не являются жесткими. Точнее, в комплексной размерности $n = 2$ мы предлагаем каноническую конструкцию непрерывных квазифуксовых деформаций комплексных поверхностей, расслоенных над замкнутыми римановыми поверхностями, которые мы называем “комплексными сгибаниями” по простым замкнутым геодезическим. Это первый пример подобных деформаций (которые, вдобавок, индуцированы квазиконформными гомеоморфизмами) комплексно-аналитических расслоений над компактной базой:

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$ – заданная (неэлементарная) дискретная группа. Тогда для всякой простой замкнутой геодезической α на произвольной римановой поверхности $S = H_{\mathbb{R}}^2/G$ и для достаточно малых $\eta_0 > 0$ существует голоморфное семейство G -эquivariantных квазиконформных гомеоморфизмов $F_{\eta}: \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, $-\eta_0 < \eta < \eta_0$, задающее сгибающую (квазифуксову) деформацию $\mathcal{B}_{\alpha}: (-\eta_0, \eta_0) \rightarrow \mathcal{B}_0(G)$ группы G по геодезической α , $\mathcal{B}_{\alpha}(\eta) = F_{\eta}^*$.*

Построенные деформации зависят от большого числа параметров, которые можно трактовать как точки пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(M)$ классов изотопически эквивалентных комплексных гиперболических структур на M или, что то же, пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(G) = \mathcal{B}_0(G)/PU(n, 1)$ классов сопряженных элементов точных дискретных представлений $\rho \in \mathcal{B}_0(G) \subset \text{Hom}(G, PU(n, 1))$ группы $G = \pi_1(M)$:

СЛЕДСТВИЕ 7.3. *Пусть $S_p = H_{\mathbb{R}}^2/G$ – замкнутая вполне вещественная геодезическая поверхность рода $p > 1$, лежащая в комплексной гиперболической поверхности $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/G$, где $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$. Тогда существует вложение $\pi \circ \mathcal{B}: B^{3p-3} \hookrightarrow \mathcal{T}(M)$ вещественного $(3p-3)$ -мерного шара в пространство*

Тейхмюллера M , задаваемое сгибающими деформациями по непересекающимся замкнутым геодезическим в M и проекцией $\pi: \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) = \mathcal{D}(M)/PU(2,1)$ пространства отображений развертки $\mathcal{D}(M)$.

В качестве приложения построенных деформаций мы даем ответ на известный вопрос о группах каспов на границе пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(M)$ комплексной гиперболической (штейновой) поверхности M , расслоенной над компактной римановой поверхностью рода $p > 1$ [AG]:

СЛЕДСТВИЕ 7.12. Пусть $G \subset PO(2,1) \subset PU(2,1)$ – равномерная решетка, изоморфная фундаментальной группе замкнутой поверхности S_p рода $p \geq 2$. Тогда существует непрерывная деформация $R: \mathbb{R}^{3p-3} \rightarrow \mathcal{T}(G)$ (индуцированная G -эквиариантными квазиконформными гомеоморфизмами $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$), чья граничная группа $G_{\infty} = R(\infty)(G)$ содержит $(3p-3)$ несопряженных акцидентных параболических подгрупп.

Естественно, что все построенные нами топологические деформации являются, в частности, геометрическими реализациями соответствующих (сохраняющих тип) изоморфизмов дискретных групп (см. задачу 6). Однако как видно из примера 6.7, не все подобные сохраняющие тип изоморфизмы обладают этим хорошим свойством. Все же, в качестве первого шага на пути к решению задачи 6.1 о геометризации мы доказываем следующую теорему о геометрической реализации [A7]:

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\phi: G \rightarrow H$ – сохраняющий тип изоморфизм между неэлементарными симметрическими группами $G, H \subset PU(n,1)$. Тогда существует единственный эквиариантный гомеоморфизм $f_{\phi}: \Lambda(G) \rightarrow \Lambda(H)$ предельных множеств этих групп, индуцирующий ϕ . Более того, если $\Lambda(G) = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, то гомеоморфизм f_{ϕ} является ограничением гиперболической изометрии $h \in PU(n,1)$.

Заметим, что, в отличие от теоремы Тукиа об изоморфизме [Tu] в вещественной гиперболической геометрии, вряд ли можно ожидать, что гомеоморфизм f_{ϕ} обладает хорошими метрическими свойствами (ср. с теоремой 7.1). Это – одна из открытых проблем комплексной гиперболической геометрии (см. обсуждение в §6).

2. Комплексные гиперболические и гейзенберговы многообразия

Напомним несколько результатов о связи между нильпотентной геометрией группы Гейзенберга, CR -геометрией (и контактной структурой) ее одноточечной компактификации и кэлеровой геометрией комплексного гиперболического пространства (ср. [GP1], [Go4], [KR]).

Комплексное гиперболическое пространство можно реализовать в комплексном проективном пространстве как

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \{[z] \in \mathbb{CP}^n : \langle z, z \rangle < 0, z \in \mathbb{C}^{n,1}\},$$

подмножество отрицательных прямых эрмитова векторного пространства $\mathbb{C}^{n,1}$, с эрмитовой индефинитной $(n,1)$ -формой $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n - z_{n+1} \bar{w}_{n+1}$. Граница его, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \{[z] \in \mathbb{CP}^{n,1} : \langle z, z \rangle = 0\}$ состоит из всех нуль-прямых в $\mathbb{CP}^n$; она гомеоморфна $(2n-1)$ -мерной сфере S^{2n-1} .

Полная группа $\text{Isom } \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ изометрий $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ порождена группой голоморфных автоморфизмов (т.е. проективной унитарной группой, соответствующей группе $U(n, 1)$ унитарных автоморфизмов $\mathbb{C}^{n,1}$) и антиголоморфным автоморфизмом $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ – ограничением $\mathbb{C}$ -антилинейного унитарного автоморфизма $\mathbb{C}^{n,1}$, отвечающего комплексному сопряжению $z \mapsto \bar{z}$. Группу $PU(n, 1)$ можно, согласно А. Борелю [Boг], вложить в линейную группу (ср. с [AX1, L.2.1]), поэтому всякая конечно порожденная группа $G \subset PU(n, 1)$ конечно аппроксимируема и в ней есть подгруппа без кручения конечно-го индекса. Элементы $g \in PU(n, 1)$ могут быть одного из трех следующих типов. Если элемент g оставляет неподвижной точку $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, он называется *эллиптическим*. Если у g ровно одна неподвижная точка и она лежит на $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, то g называют *параболическим*. Если же у g ровно две неподвижные точки и они лежат на $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, то g называют *локсодромическим* элементом. Этими тремя типами исчерпываются все возможные случаи.

Существуют две стандартные реализации комплексного гиперболического пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ областями в $\mathbb{C}^n$, единичный шар $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^n$ и область Зигеля $\mathfrak{S}_n$. Они соотносятся с двумя аффинными картами в проективном пространстве, по-разному расположенными относительно $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ и его границы. А именно, отобразив $\mathbb{C}^n$ на аффинную карту в $\mathbb{CP}^{n,1}$, заданную неравенством $z_{n+1} \neq 0$ (в однородных координатах), с помощью отображения $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$, $z \mapsto [(z, 1)]$, мы можем отождествить единичный шар $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^n(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$ и $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = A(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^n)$. Индуцируемая при этом метрика в $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^n$ – это метрика Бергмана (постоянной голоморфной кривизны -1) с секционной кривизной, заключенной между -1 и $-1/4$ (а метрику в $\mathbb{C}^n$ мы будем задавать стандартной эрмитовой формой $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$).

Реализация $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ как области Зигеля возникает при рассмотрении карты, являющейся дополнением к проективной гиперплоскости H_{∞} , касательной к $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ в некоторой точке $\infty \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. К примеру, взяв в качестве ∞ точку $(0', -1, 1)$, где $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$, мы получим, что $H_{\infty} = \{[z] \in \mathbb{CP}^n : z_n + z_{n+1} = 0\}$. Возникает отображение $\mathbf{S}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n \setminus H_{\infty}$,

$$\begin{pmatrix} z' \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z' \\ \frac{1}{2} - z_n \\ \frac{1}{2} + z_n \end{bmatrix}, \quad \text{где } z' = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

В полученных аффинных координатах наше комплексное гиперболическое пространство представляет собой *область Зигеля*

$$\mathfrak{S}_n = \mathbf{S}^{-1}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n) = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n + \bar{z}_n > \langle\langle z', z' \rangle\rangle\},$$

где для исходной эрмитовой формы мы имеем $\langle\langle \mathbf{S}(z), \mathbf{S}(w) \rangle\rangle = \langle\langle z', w' \rangle\rangle - z_n - \bar{w}_n$. Группа автоморфизмов этой аффинной модели $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ – это группа аффинных преобразований $\mathbb{C}^n$, сохраняющих $\mathfrak{S}_n$. Ее унитарный радикал – *группа Гейзенберга* $\mathcal{H}_n$ всех *сдвигов Гейзенберга*

$$T_{\xi, v}: (w', w_n) \mapsto \left(w' + \xi, w_n + \langle\langle \xi, w' \rangle\rangle + \frac{1}{2}(\langle\langle \xi, xi \rangle\rangle - iv) \right),$$

где $w', \xi \in \mathbb{C}^{n-1}$ и $v \in \mathbb{R}$.

В частности, $\mathcal{H}_n$ действует просто транзитивно на $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \{\infty\}$ и, отождествляя $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ и $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n} \setminus \{\infty\}$, мы получаем реализацию комплексного гиперболического пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ в виде *верхнего полупространства*

$$(\xi, v, u) \mapsto \begin{bmatrix} \xi \\ \frac{1}{2}(1 - \langle \xi, \xi \rangle - u + iv) \\ \frac{1}{2}(1 + \langle \xi, \xi \rangle + u - iv) \end{bmatrix},$$

где $(\xi, v, u) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ – орисферические координаты точки из $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n} \setminus \{\infty\}$ (относительно точки $\infty \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, см. [GP1]).

Заметим, что при этом отождествлении орисферы в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ с центром в ∞ становятся горизонтальными плоскостями $H_t = \{(\xi, v, u) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : u = t\}$, а геодезические, идущие в точку ∞ , – вертикальными прямыми $c_{\xi, v}(t) = (\xi, v, e^{2t})$, проходящими через точки $(\xi, v) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Таким образом, взгляд из ∞ параллельно геодезическим устанавливает соответствие между орисферами $H_t \rightarrow H_u$, $(\xi, v, t) \mapsto (\xi, v, u)$.

“Граничную плоскость” $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \{\infty\}$ и орисферы $H_u = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \{u\}$, $0 < u < \infty$, с центром в ∞ можно отождествить с группой Гейзенберга $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Это нильпотентная группа ступени 2 с центром $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$, которая изометрически действует на себе (и на $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$) левыми сдвигами

$$T_{(\xi_0, v_0)} : (\xi, v, u) \mapsto (\xi_0 + \xi, v_0 + v + 2 \operatorname{Im} \langle \xi_0, \xi \rangle, u),$$

где элемент $(\xi, v)^{-1} = (-\xi, -v)$ является обратным к (ξ, v) . Унитарная группа $U(n-1)$ действует на $\mathcal{H}_n$ и $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ вращениями $A(\xi, v, u) = (A\xi, v, u)$, $A \in U(n-1)$. Полу-прямое произведение $\mathcal{H}(n) = \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$ естественно вкладывается в $U(n, 1)$ следующим образом:

$$A \in U(n-1) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(n, 1),$$

$$(\xi, v) \mapsto \begin{pmatrix} I_{n-1} & \xi \\ -\bar{\xi}^t & 1 - \frac{1}{2}(|\xi|^2 - iv) & -\frac{1}{2}(|\xi|^2 - iv) \\ \bar{\xi}^t & \frac{1}{2}(|\xi|^2 - iv) & 1 + \frac{1}{2}(|\xi|^2 - iv) \end{pmatrix} \in U(n, 1),$$

где $(\xi, v) \in \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$, а столбец $\bar{\xi}^t$ – это сопряженная транспонированная строка ξ .

Действие $\mathcal{H}(n)$ на $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n} \setminus \{\infty\}$ сохраняет метрику Сигана ρ_c в этом пространстве. Эта метрика играет ту же роль, что евклидова метрика играет для верхнего полупространства вещественного гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$. Она индуцирована нормой

$$(2.1) \quad \|(\xi, v, u)\|_c = \|\xi\|^2 + u - iv^{1/2}, \quad (\xi, v, u) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Для нас представляет интерес возникающая на каждой орисфере $H_u \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ($H_u \cong \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$) сферическая CR -геометрия, индуцированная комплексной структурой. Взгляд из ∞ параллельно геодезическим задает CR -отображения орисфер друг на друга, продолжающиеся до CR -отображений их одноточечных компактификаций $H_u \cup \infty \approx S^{2n-1}$. В пределе, хотя сходимости индуцированных метрик на орисферах

нет, CR -структура остается все той же. В этом смысле комплексная гиперболическая геометрия индуцирует CR -геометрию на бесконечно удаленной сфере $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \approx S^{2n-1}$, естественным образом отождествляемой с одноточечной компактификацией группы Гейзенберга $\mathcal{H}_n$.

3. Дискретные действия на нильпотентных группах и гейзенберговских многообразиях

Для изучения структуры гейзенберговских многообразий (т.е. многообразий, локально устроенных как группы Гейзенберга $\mathcal{H}_n$) и каспидальных концов комплексных гиперболических многообразий нам нужна структурная теорема типа теоремы Бибераха для изометрических действий дискретных групп на $\mathcal{H}_n$, доказанная впервые в [AX1]. Она утверждает, что всякая дискретная группа изометрий группы Гейзенберга $\mathcal{H}_n$ оставляет на месте некоторый левый фактор-класс относительно связной подгруппы Ли, на котором действие группы кокомпактно.

Сейчас мы рассмотрим более общую ситуацию. Пусть N – связная односвязная нильпотентная группа Ли, C – компактная группа автоморфизмов N , и Γ – дискретная подгруппа полупрямого произведения $N \rtimes C$. Подобные дискретные подгруппы являются группами голономии параболических концов локально симметрических многообразий ранга один (отрицательной кривизны) и описываются следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существуют связная подгруппа Ли V группы N и нормальная подгруппа конечного индекса Γ^* группы Γ со следующими свойствами:*

- (1) *для некоторого $b \in N$ группа $b\Gamma b^{-1}$ оставляет V на месте;*
- (2) *$V/b\Gamma b^{-1}$ компактно;*
- (3) *$b\Gamma^* b^{-1}$ действует на V левыми сдвигами и это действие свободно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. (1) Это непосредственно следует из того факта, что всякая дискретная подгруппа $\Gamma \subset N \rtimes C$ виртуально нильпотентна, ибо в ней есть подгруппа конечного индекса $\Gamma^* \subset \Gamma$, изоморфная решетке в $V \subset N$.

(2) Компактность C существенна для этого утверждения, поскольку Маргулис [MG2] нашел неабелевы свободные дискретные подгруппы Γ группы $R^3 \rtimes GL(3, R)$.

(3) Этот результат обобщает теорему Бибераха для евклидовых пространств (см. [Wo]) и усиливает результат Л. Ауслендера [Au], доказавшего эти свойства не для всей группы Γ , а для ее подгруппы конечного индекса. Поначалу в [AX1] мы доказали эту теорему для группы Гейзенберга $\mathcal{H}_n$, используя лемму Маргулиса [MG1], [BGS] и геометрические свойства $\mathcal{H}_n$, для переноса классического доказательства из [Wo]. Доказательство для общих нильпотентных групп основано на других идеях и устроено следующим образом (см. подробности в [AX2]).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $p: \Gamma \rightarrow C$ – суперпозиция включения $\Gamma \subset N \rtimes C$ и проекции $N \rtimes C \rightarrow C$, пусть G – компонента единицы в $\overline{\Gamma N}$, а $\Gamma_1 = G \cap \Gamma$. В силу компактности C индекс G в $\overline{\Gamma N}$ конечен, так что Γ_1 – подгруппа Γ конечного индекса. Пусть $W \subset N$ – аналитическая подгруппа, все элементы которой неподвижны под действием $p(\Gamma_1)$. Согласно [Au], для всех $\gamma = (w, c) \in \Gamma_1$ элемент w принадлежит W . Значит, Γ оставляет W на месте и, заменяя N на W , мы можем полагать, что $\Phi = p(\Gamma)$ конечна.

Рассмотрим $\Gamma^* = \ker(p)$. Это дискретная подгруппа N и подгруппа конечного индекса в Γ . Пусть V – связная подгруппа Лигруппы N , в которой Γ^* является решеткой. Тогда действие Γ сопряжениями на Γ^* индуцирует действие Γ на V . Образует полупрямое произведение $V \rtimes \Gamma$ и пусть $K = \{(a^{-1}, (a, 1)) \in V \rtimes \Gamma : (a, 1) \in \Gamma^*\}$. Очевидно, что K – нормальная подгруппа $V \rtimes \Gamma$. Определим отображения $i: V \rightarrow V \rtimes \Gamma/K$, полагая $i(v) = (v, (1, 1))K$, и $\pi: V \rtimes \Gamma/K \rightarrow \Phi$, полагая $\pi(v, (a, A)) = A$. Тогда мы получим короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow V \xrightarrow{i} V \rtimes \Gamma/K \xrightarrow{\pi} \Phi \longrightarrow 1.$$

Поскольку всякое расширение конечной группы при помощи односвязной нильпотентной группой Ли расщепляется, существует гомоморфизм $s: \Phi \rightarrow V \rtimes \Gamma/K$ такой, что $\pi \circ s = \text{id}_\Phi$. Для всякого $A \in \Phi$ зафиксируем элемент $(f(A), (g(A), A)) \in V \rtimes \Gamma$, представляющий $s(A)$. Поскольку s – гомоморфизм, мы получаем

$$(3.3) \quad g(AB)^{-1}f(AB)^{-1} = A(g(B)^{-1}f(B)^{-1})g(A)^{-1}f(A)^{-1} \quad \text{для } A, B \in \Phi.$$

Определим отображение $h: \Phi \rightarrow N$, полагая $h(A) = g(A)^{-1}f(A)^{-1}$. Ясно, что h – коцикл. Поскольку Φ конечна, а N – односвязная нильпотентная группа Ли, то $H^1(\Phi, N) = 0$ согласно [LR]. Значит, существует $b \in N$ такое, что $h(A) = A(b^{-1})b$ для всех $A \in \Phi$.

С другой стороны, $\pi((1, (a, A))K) = \pi((f(A), (g(A), A))K) = A$ для всех $\gamma = (a, A) \in \Gamma$. Следовательно, существует $v_0 \in V$ такое, что $a^{-1}v_0 = h(A)$. Отсюда и из (4.3) вытекает, что $a^{-1}v_0 = A(b^{-1})b$, так что $baA(b^{-1}) = bv_0b^{-1}$.

Рассмотрим теперь группу $b\Gamma b^{-1}$, действующую на bVb^{-1} . Для всех $\gamma = (a, A) \in \Gamma$ элемент $b\gamma b^{-1} = (baA(b^{-1}), A)$ действует на bVb^{-1} следующим образом:

$$((baA(b^{-1}), A), v') \rightarrow baA(b^{-1})A(v')(baA(b^{-1}))^{-1}.$$

В частности, $baA(b^{-1}) \cdot A(bVb^{-1}) \cdot (baA(b^{-1}))^{-1} = bVb^{-1}$. Значит, $A(bVb^{-1}) = bVb^{-1}$, ибо $baA(b^{-1}) = bv_0b^{-1} \in bVb^{-1}$, так что $b\gamma b^{-1}$ сохраняет bVb^{-1} на месте.

Мы можем теперь использовать наше описание действий дискретных групп на нильпотентных группах (теорема 3.1) для изучения структуры гейзенберговских многообразий. Локально моделью для этих многообразий служит $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}(n))$ -геометрия, и любое из них представляется как фактор $\mathcal{H}_n/G$ по дискретному свободному действию своей фундаментальной группы G на $\mathcal{H}_n$, т.е. по изометрическому действию дискретной подгруппы без кручения группы $\mathcal{H}(n) = \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$. На самом деле, мы выявим структуру расслоения на всех некомпактных гейзенберговских многообразиях:

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $\Gamma \subset \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$ – дискретная группа без кручения, действующая на группе Гейзенберга $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ так, что фактор-пространство некомпактно. Тогда эйлерова характеристика фактора $\mathcal{H}_n/\Gamma$ равна нулю и он является расслоением над компактным многообразием. Более того, это компактное многообразие конечнолистно покрывается нильпотентным многообразием, являющимся либо тором, либо пространством некоторого расслоения на окружности над тором.*

Доказательство этого утверждения (см. [AX1]) основано на двух результатах, вытекающих из теоремы 3.1. Во-первых, у дискретной подгруппы голономии $\Gamma \cong \pi_1(M)$

любого некомпактного гейзенбергова многообразия $M = \mathcal{H}_n/\Gamma$, $\Gamma \subset \mathcal{H}(n)$, есть собственное Γ -инвариантное подпространство $\mathcal{H}_\Gamma \subset \mathcal{H}_n$. Во-вторых, компактное многообразие $\mathcal{H}_\Gamma/\Gamma$ конечнолистно покрывается многообразием $\mathcal{H}_\Gamma/\Gamma^*$, где Γ^* действует на $\mathcal{H}_\Gamma$ сдвигами. Структура подобных покрывающих многообразий $\mathcal{H}_G/G^*$ описывается следующей леммой.

ЛЕММА 3.4. *Пусть V – связная подгруппа Ли группы Гейзенберга $\mathcal{H}_n$, а $G \subset V$ – дискретная кокомпактная подгруппа V . Тогда многообразие V/G является*

- (1) *тором, если V абелева;*
- (2) *пространством расслоения над тором с торическими слоями, если V неабелева.*

Хотя некомпактные гейзенберговы многообразия M и являются векторными расслоениями $\mathcal{H}_n/\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma/\Gamma$, однако, как показывают простые примеры, эти расслоения, вообще говоря, нетривиальны [AX1]. В то же время они становятся тривиальными после перехода к конечнолистным накрытиям [AX1]:

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть $\Gamma \subset \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$ – дискретная группа, а $\mathcal{H}_\Gamma \subset \mathcal{H}_n$ – связная Γ -инвариантная подгруппа Ли, на которой действие Γ кокомпактно. Тогда существует подгруппа $\Gamma_0 \subset \Gamma$ конечного индекса такая, что векторное расслоение $\mathcal{H}_n/\Gamma_0 \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma/\Gamma_0$ тривиально. В частности, любой гейзенбергов орбифолд $\mathcal{H}_n/\Gamma$ конечнолистно покрывается произведением компактного нильпотентного многообразия $\mathcal{H}_\Gamma/\Gamma_0$ и евклидова пространства.*

Заметим, что если $\Gamma \subset \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$ – решетка, то есть фактор $\mathcal{H}_n/\Gamma$ компактен, то существование такого конечнолистного накрытия $\mathcal{H}_n/\Gamma$ замкнутым нильпотентным многообразием $\mathcal{H}_n/\Gamma_0$ следует из результатов Громова [Gr], а также Бузера и Кархера [BK] по почти плоским многообразиям.

Доказательство теоремы 3.5 устроено следующим образом. Сначала, переходя к подгруппе конечного индекса, мы можем полагать, что Γ – группа без кручения. Потом мы найдем подгруппу $\Gamma_0 \subset \Gamma$ конечного индекса с “хорошей” унитарной компонентой. Потом мы можем представить векторное расслоение $\mathcal{H}_n/\Gamma_0 \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma/\Gamma_0$ как сумму Уитни тривиального расслоения и расслоенного произведения. Завершает доказательство следующий критерий тривиальности расслоенных произведений:

ЛЕММА 3.6. *Пусть $F \times_H V$ – расслоенное произведение, и пусть гомоморфизм $\rho: H \rightarrow GL(V)$ продолжается до гомоморфизма $\rho: F \rightarrow GL(V)$. Тогда $F \times_H V$ – тривиальное расслоение $F \times_H V \cong F/H \times V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм $F \times_H V \cong F/H \times V$ задается формулой $[f, v] \rightarrow (Hf, \rho(f)^{-1}(v))$.

4. Геометрическая конечность в комплексной гиперболической геометрии

Наше основное предположение касательно комплексных гиперболических многообразий M размерности n – это геометрическая конечность их фундаментальных групп $\pi_1(M) = G \subset PU(n, 1)$, означающая, в частности, что дискретная группа G конечно порождена.

Здесь мы называем подгруппу $G \subset PU(n, 1)$ *дискретной*, если она дискретна в $PU(n, 1)$. *Предельное множество* $\Lambda(G) \subset \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ дискретной группы G – это множество предельных точек (произвольной) орбиты $G(y)$, $y \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Дополнение к $\Lambda(G)$ в $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ называется *множеством разрывности* $\Omega(G)$. Дискретная группа G называется *элементарной*, если ее предельное множество $\Lambda(G)$ содержит не более двух точек. Бесконечная дискретная группа G называется *параболической*, если у нее всего одна неподвижная точка $\text{fix}(G)$; в этом случае $\Lambda(G) = \text{fix}(G)$ и G содержит параболические или эллиптические элементы. Как было замечено многими (см. [MaG]), с условием параболичности элемента в случае непостоянной кривизны не так просто иметь дело, как в пространствах постоянной кривизны. Однако результаты §2 упрощают исследование, особенно для геометрически конечных групп.

Геометрическая конечность имеет существенное значение при изучении вещественных гиперболических многообразий, мощный инструментальный для понимания структуры которых доставляется геометрическим анализом и идеями Терстона. Из-за отсутствия вполне геодезических гиперповерхностей в пространствах непостоянной кривизны, мы не можем пользоваться исходным определением геометрической конечности, выделяющим вещественные гиперболические многообразия $M = \mathbb{H}^n/G$, которые можно превратить в клетку разрезами по конечному числу вполне геодезических гиперповерхностей (т.е., что группа G имеет фундаментальный полиэдр с конечным числом граней [Ah]). Однако можно определить *геометрически конечные* группы $G \subset PU(n, 1)$ как группы, предельные множества которых $\Lambda(G)$ содержат только конечные предельные точки и параболические (каскадные) точки p с компактным фактор-пространством $(\Lambda(G) \setminus \{p\})/G_p$ по действию параболического стабилизатора $G_p \subset G$ точки p (см. [BM], [Bow]). Существуют и другие определения геометрической конечности, формулируемые в терминах концов многообразий и минимального выпуклого ретракта некомпактного многообразия M и удобные не только в случае вещественных гиперболических пространств $\mathbb{H}^n$ (см. [Mar], [Th], [A1], [A3]), но и в пространствах с зацеплением кривизны [Bow].

Наше исследование геометрической конечности в комплексной гиперболической геометрии основано на анализе топологии и геометрии параболических (тонких) концов соответствующих многообразий и параболических каспов дискретных групп изометрий $G \subset PU(n, 1)$.

А именно, предположим, что точка $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ неподвижна под действием некоторого параболического элемента дискретной группы $G \subset PU(n, 1)$, а G_p – стабилизатор p в G . Рассматривая сопряжение G с помощью элемента $h_p \in PU(n, 1)$, $h_p(p) = \infty$, мы можем полагать, что стабилизатор G_p – это подгруппа $G_{\infty} \subset \mathcal{H}(n)$. В частности, если p – начало координат $0 \in \mathcal{H}_n$, то в качестве h_0 берется гейзенбергова инверсия $\mathcal{I}$ “гиперцепи” $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n-1}$. Она сохраняет единичную гейзенбергову сферу $S_c(0, 1) = \{(\xi, v) \in \mathcal{H}_n : \|(\xi, v)\|_c = 1\}$ и действует на $\mathcal{H}_n$ по формуле

$$(4.1) \quad \mathcal{I}(\xi, v) = \left(\frac{\xi}{|\xi|^2 - iv}, \frac{-v}{v^2 + |\xi|^4} \right), \quad \text{где } (\xi, v) \in \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Для других точек p в качестве h_p можно взять гейзенбергову инверсию $\mathcal{I}_p$, сохраняющую единичную гейзенбергову сферу $S_c(p, 1) = \{(\xi, v) : \rho_c(p, (\xi, v)) = 1\}$ с центром в p . Инверсия $\mathcal{I}_p$ сопряжена с $\mathcal{I}$ при помощи гейзенбергова сдвига T_p и переводит p в ∞ .

После этого сопряжения мы можем применить теорему 3.1 к параболическому стабилизатору $G_\infty \subset \mathcal{H}(n)$ и получить связную подгруппу Ли $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{H}_n$, инвариантную относительно G_∞ (с точностью до сдвига начала координат). Таким образом, можно сформулировать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Множество $U_{p,r} \subset \overline{\mathbb{H}_\mathbb{C}^n} \setminus \{p\}$ называется *стандартной каспидальной окрестностью радиуса $r > 0$* параболической неподвижной точки $p \in \partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ дискретной группы $G \subset PU(n, 1)$, если гейзенбергова инверсия $\mathcal{I}_p \in PU(n, 1)$ относительно единичной сферы $S_c(p, 1)$, $\mathcal{I}_p(p) = \infty$, обладает следующими свойствами:

- (1) $U_{p,r} = \mathcal{I}_p^{-1}(\{x \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^n \cup \mathcal{H}_n : \rho_c(x, \mathcal{H}_\infty) \geq 1/r\})$;
- (2) $U_{p,r}$ строго инвариантно относительно $G_p \subset G$, т.е.

$$\gamma(U_{p,r}) = U_{p,r} \text{ для } \gamma \in G_p \text{ и } g(U_{p,r}) \cap U_{p,r} = \emptyset \text{ для } g \in G \setminus G_p.$$

Параболическая точка $p \in \partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ группы $G \subset PU(n, 1)$ называется *каспидальной точкой*, если у нее есть каспидальная окрестность $U_{p,r}$.

Заметим, что не всегда параболическая точка дискретной группы $G \subset PU(n, 1)$ каспидальна; см. примеры в § 5.4 работы [AX1]. Применяя теорему 3.1 и [Bow], получаем следующий результат.

ЛЕММА 4.3. Пусть $p \in \partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ – параболическая неподвижная точка дискретной подгруппы G группы $PU(n, 1)$. Тогда p – каспидальная точка, если и только если $(\Lambda(G) \setminus \{p\})/G_p$ компактно.

Эта лемма и результаты Боудитча [B] о конечности позволяют использовать еще одно эквивалентное определение геометрической конечности. Из них следует, что дискретная подгруппа G группы $PU(n, 1)$ *геометрически конечна*, если и только если у фактор-пространства $M(G) = [\mathbb{H}_\mathbb{C}^n \cup \Omega(G)]/G$ конечное число концов и все они каспидальны, т.е. окрестность всякого из них (для подходящего $r > 0$) может быть представлена в виде

$$(4.4) \quad U_{p,r}/G_p \approx (S_{p,r}/G_p) \times (0, 1],$$

где

$$S_{p,r} = \partial_H U_{p,r} = \mathcal{I}_p^{-1}(\{x \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^n \cup \mathcal{H}_n : \rho_c(x, \mathcal{H}_\infty) = 1/r\}).$$

Теперь ясно, что геометрически конечное многообразие можно представить в виде связной суммы компактного многообразия и конечного числа каспидальных подмногообразий вида (4.4). Конечно, любой из этих каспидальных концов гомотопически эквивалентен гейзенбергову многообразию размерности $(2n - 1)$ и, более того, компактное многообразию размерности $k \leq 2n - 1$ (по теореме 3.3). Из последнего утверждения следует, что фундаментальная группа гейзенбергова многообразия конечно определена, так что получается следующий результат о конечности:

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Геометрически конечные группы $G \subset PU(n, 1)$ конечно определены.*

В случае непостоянной кривизны вряд ли можно использовать геометрические методы, основанные на рассмотрении фундаментальных полиэдров с конечным числом граней и, в частности, ограниченные биссекторами полиэдры Дирихле $D_y(G)$ групп

$G \subset PU(n, 1)$, строящиеся по сложным правилам (см. [Mo2], [GP1], [FG]). В случае дискретных параболических групп $G \subset PU(n, 1)$ можно ожидать, что у полиэдра Дирихле $D_y(G)$ с центром в точке y из G -инвариантного подпространства конечное число граней. Это свойство выполнено для вещественных гиперболических пространств [A1], а также для циклических и диэдральных параболических групп в комплексных гиперболических пространствах. Точнее, как показано в [Ph], для любой циклической группы $G \subset PU(n, 1)$, порожденной сдвигом Гейзенберга, полиэдр Дирихле $D_y(G)$ имеет две грани. Согласно основному результату [GP1], конечность числа граней имеет место и для циклической эллиптически-параболической группы, равно как и для диэдральных параболических подгрупп $G \subset PU(n, 1)$, порожденных инверсиями в асимптотических комплексных гиперплоскостях в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, при условии, что центр y принадлежит G -инвариантной вертикальной прямой или $\mathbb{R}$ -плоскости (для других y у $D_y(G)$ бесконечно много граней). Наша техника позволяет легко доказать, что та же конечность имеет место и для параболических циклических групп общего вида [AX1]:

ТЕОРЕМА 4.6. *Для всякой дискретной подгруппы $G \subset PU(n, 1)$, порожденной параболическим элементом, существует точка $y_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ такая, что у полиэдра Дирихле $D_{y_0}(G)$ с центром в y_0 две грани.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая группы, сопряженные с G , и используя теорему 3.1, мы можем полагать, что G оставляет на месте некоторое одномерное подпространство $\mathcal{H}_{\infty} \subset \mathcal{H}_n$, а также $\mathcal{H}_{\infty} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ и действует на этих множествах сдвигами. Поэтому в качестве центра двугранного полиэдра Дирихле $D_{y_0}(G)$ можно взять любую точку $y_0 \in \mathcal{H}_{\infty} \times \mathbb{R}_+$, ибо орбита $G(y_0)$ есть орбита $G'(y_0)$ циклической группы, порожденной гейзенберговым сдвигом, индуцированным G .

Однако поведение полиэдров Дирихле для параболических групп $G \subset PU(n, 1)$ ранга больше единицы может быть весьма плохим. Это видно из нашей конструкции в [AX1], где описываются пересечения биссекторов Дирихле и некоторого двумерного сечения.

ТЕОРЕМА 4.7. *Пусть $G \subset PU(2, 1)$ – дискретная параболическая группа, сопряженная с подгруппой $\Gamma = \{(m, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ группы Гейзенберга $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Тогда у полиэдра Дирихле $D_y(G)$ с центром в произвольной точке $y \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ бесконечно много граней.*

Несмотря на этот пример, мы сейчас применим теорему 3.1 к построению фундаментальных полиэдров $P(G) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, ограниченных конечным числом гиперповерхностей (не биссекторов Дирихле) для произвольных дискретных параболических групп $G \subset PU(n, 1)$. Этот результат является предпосылкой для распространения нашей конструкции псевдополиэдров Дирихле в $\mathbb{H}^n$ из [A1] на случай комплексного гиперболического пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

ТЕОРЕМА 4.8. *Для всякой дискретной параболической группы $G \subset PU(n, 1)$ существует фундаментальный полиэдр $P(G) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ с конечным числом граней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем предполагать после сопряжения, что $G \subset \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$. Пусть $\mathcal{H}_{\infty} \subset \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ – связная G -инвариантная подгруппа из теоремы 3.1. Для заданного $u_0 > 0$ рассмотрим орицикл $V_{u_0} = \mathcal{H}_{\infty} \times \{u_0\} \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Если $y, y' \in V_{u_0}$ – разные точки, то биссектор $C(y, y') = \{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n :$

$d(z, y) = d(z, y')$ пересекает V_{u_0} трансверсально. Поскольку V_{u_0} G -инвариантно, его пересечение с полиэдром Дирихле

$$D_y(G) = \bigcap_{g \in G \setminus \{\text{id}\}} \{w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n : d(w, y) < d(w, g(y))\}$$

с центром в точке $y \in V_{u_0}$ является фундаментальным полиэдром действия G на V_{u_0} . Многогранник $D_y(G) \cap V_{u_0}$ компактен по теореме 3.3, а значит, у него конечное число граней. Рассмотрим теперь G -эквивариантные проекции [AX1]

$$\pi: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{\infty}, \quad \pi': \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \mathcal{H}_n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow V_{u_0}, \quad \pi'(x, u) = (\pi(x), u_0).$$

Мы получаем фундаментальный полиэдр $\pi'^{-1}(D_y(G) \cap V_{u_0})$ действия G в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, у которого конечное число сторон.

Еще одно важное приложение теоремы 3.1 показывает, что структура каспидальных концов геометрически конечного комплексного гиперболического орбифолда M становится очень простой при переходе к конечному накрытию M .

ТЕОРЕМА 4.9. *Пусть $G \subset PU(n, 1)$ – геометрически конечная дискретная группа. Тогда в G есть подгруппа G_0 конечного индекса такая, что всякая параболическая подгруппа G_0 изоморфна дискретной подгруппе группы Гейзенберга $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$. В частности, всякая параболическая подгруппа G_0 является свободной абелевой или нильпотентной степени 2.*

Соответствующее доказательство [AX1] основано на конечной аппроксимируемости геометрически конечных подгрупп $PU(n, 1)$ и на следующих двух леммах.

ЛЕММА 4.10. *Пусть $G \subset \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$ – дискретная группа, а $\mathcal{H}_G \subset \mathcal{H}_n$ – минимальная G -инвариантная связная подгруппа Ли (существующая по теореме 3.1). Тогда, если G абелева или нильпотентная степени 2, то G действует на $\mathcal{H}_G$ сдвигами.*

ЛЕММА 4.11. *Пусть $G \subset \mathcal{H}_n \rtimes U(n-1)$ – дискретная группа без кручения, F – конечная группа, а $\phi: G \rightarrow F$ – эпиморфизм. Тогда порядок унитарной компоненты $\ker(\phi)$ строго меньше порядка G , если выполнено одно из следующих условий:*

- (1) G содержит абелеву подгруппу конечного индекса, а F неабелева;
- (2) G содержит нильпотентную степени 2 подгруппу конечного индекса, а F не является нильпотентной степени 2 группой.

Заметим, что эта лемма обобщает один результат Аравдина и Фаррелла [AF], относящийся к кристаллографическим группам.

Мы завершим этот параграф указанием на то, что проблема геометрической конечности обладает очень специфическими чертами в комплексной размерности два. А именно, хорошо известно, что всякая конечно порожденная дискретная подгруппа группы $PU(1, 1)$ или $PO(2, 1)$ геометрически конечна. Это, а также теорема Голдмана [Go1] о локальной жесткости для кокомпактных решеток $G \subset U(1, 1) \subset PU(2, 1)$ позволяет сформулировать следующую гипотезу:

ГИПОТЕЗА 4.12. *Все конечно порожденные дискретные группы $G \subset PU(2, 1)$ с непустым множеством разрывности $\Omega(G) \subset \partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ геометрически конечны.*

5. Комплексные гомологические h -кобордизмы и бесконечно удаленная граница

Целью этого параграфа является изучение топологии комплексно-аналитических “клеяновых” многообразий $M(G) = [\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \Omega(G)]/G$ с геометрически конечной группой голономии $G \subset PU(n, 1)$. Граница такого многообразия $\partial M = \Omega(G)/G$ имеет структуру сферического CR -многообразия и, вообще говоря, некомпактна.

Нас особенно интересует случай комплексно-аналитических поверхностей, для которых можно использовать мощные методы 4-мерной топологии. Пока что неизвестно, какими разрезами 4-мерные многообразия можно было бы разбить на геометрические блоки (подобно разложению Джейко–Шалена–Джонсона для трехмерных многообразий в терстоновской программе геометризации; по поводу классификации 4-мерных геометрий см. [F], [Wa]). Тем не менее, опыт изучения комплексных поверхностей позволяет предположить, что в этом случае можно использовать гомологические (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) 3-сферы и “почти плоские” трехмерные многообразия (с виртуально нильпотентными фундаментальными группами). На самом деле, как показывают §§ 3 и 4, такие многообразия возникают при изучении концов комплексных гиперболических многообразий конечного типа. Как показано Уоллом [Wa], использование подходящей 4-мерной геометрии (когда это возможно) позволяет детально разобрать структуру комплексной поверхности. Для отыскания комплексных гиперболических блоков можно использовать теорему Яу об униформизации [Ya]. Из нее следует, что комплексным гиперболическим многообразием является всякая гладкая проективная двумерная поверхность M с положительным каноническим расслоением и удовлетворяющая топологическому условию $\chi(M) = 3 \text{ Signature}(M)$. Важная же роль, которую в размерности 4 играют разложения в сумму вдоль гомологических сфер, видна из следующего результата Фридмана и Тейлора ([FT]):

Пусть M – односвязное четырехмерное многообразие с формой пересечений q_M , представимой в виде прямой суммы $q_M = q_{M_1} \oplus q_{M_2}$, где M_1 и M_2 – гладкие многообразия. Тогда M может быть представлено как связная сумма $M = M_1 \#_{\Sigma} M_2$ вдоль некоторой гомологической сферы Σ .

Дадим пример такого разложения $M = X \#_{\Sigma} Y$ односвязной комплексной поверхности M с формой пересечений $Q_M = Q_X \oplus Q_Y$ в сумму связных многообразий (с краем) X и Y вдоль $\mathbb{Z}$ -гомологической 3-сферы Σ . Следует упомянуть, что хотя X и Y уже не являются замкнутыми многообразиями, формы пересечений Q_X и Q_Y корректно определены на вторых когомологиях и унимодулярны в силу того, что Σ – $\mathbb{Z}$ -гомологическая 3-сфера.

ПРИМЕР 5.1. Пусть M – поверхность Куммера

$$K3 = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{CP}^3 : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}.$$

Тогда в M есть четыре непересекающихся вложенных $\mathbb{Z}$ -гомологических 3-сферы (с расслоениями Зейферта), которые разбивают эту поверхность на пять блоков

$$X_1 \cup_{\Sigma} Y_1 \cup_{\Sigma'} Y_2 \cup_{-\Sigma'} Y_3 \cup_{-\Sigma} X_2,$$

с формами пересечений Q_{X_j} и Q_{Y_i} , равными, соответственно, E_8 и H , где

$$E_8 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{Z}$ -гомологические сферы Σ и Σ' здесь являются, соответственно, гомологической сферой Пуанкаре $\Sigma(2, 3, 5)$ и гомологической сферой $\Sigma(2, 3, 7)$, обладающей расслоением Зейферта; знак минус означает смену ориентации.

СХЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ. Согласно Милнору [Mil] (см. также [RV]), все 3-сферы Σ , обладающие расслоением Зейферта, можно рассматривать как бесконечно-удаленные границы (геометрически конечных) комплексных гиперболических орбифолдов $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/\Gamma$, где действие фундаментальных групп $\pi_1(\Sigma) = \Gamma \subset PU(2, 1)$ на бесконечно удаленной сфере $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \overline{\mathcal{H}_2}$ – свободное. В частности, расслоенная по Зейферту гомологическая сфера $\Sigma' = \Sigma(2, 3, 7)$ диффеоморфна фактор-многообразию $[(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})]/\Gamma(2, 3, 7)$. Здесь $[(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})]$ – дополнение в трехмерной сфере $\overline{\mathcal{H}_2} = \partial B_{\mathbb{C}}^2$ к бесконечно удаленной граничной окружности комплексной геодезической $B_{\mathbb{C}}^2 \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$, а группа $\Gamma(2, 3, 7) \subset PU(2, 1)$ действует на этой комплексной геодезической как стандартная треугольная группа $(2, 3, 7)$ на круговой модели Пуанкаре гиперболической плоскости $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Гомологическая 3-сфера Σ' вкладывается в $K3$ -поверхность M и разбивает ее на подмногообразия с формами пересечений $E_8 \oplus H$ и $E_8 \oplus 2H$. Это вложение описано в [Lo] и [FS1]. Полученные многообразия можно разложить дальше, как в [FS2], получив в конце концов пять частей. Среди возникающих при этом вложенных гомологических сфер находится единственная известная гомологическая 3-сфера с конечной фундаментальной группой: гомологическая сфера Пуанкаре $\Sigma = \Sigma(2, 3, 5)$. На Σ можно ввести сферическую геометрию, представив $\pi_1(\Sigma)$ как конечную подгруппу $\Gamma(2, 3, 5)$ ортогональной группы $O(4)$, свободно действующую на $S^3 = \partial B_{\mathbb{C}}^2$. Тогда $\Sigma(2, 3, 5) = S^3/\Gamma(2, 3, 5)$ может быть получена отождествлением противоположных граней сферического додекаэдрона с двугранными углами $2\pi/3$ (см. [KAG]).

Заметим, однако, что неизвестно, можно ли ввести на полученных блоках какие-либо однородные 4-мерные геометрии, классификация которых дана Филиппкевичем [F] и (с точки зрения кэлеровых структур) Уоллом [Wa]. Таким образом, возникает вопрос, действительно ли однородные геометрии или разложения вдоль гомологических сфер (важные с топологической точки зрения) имеют отношение к геометризации гладких 4-мерных многообразий. К примеру, ни на одном из блоков Y_i (с формой пересечений H) в примере 5.1 нельзя ввести комплексную гиперболическую структуру (которая представляется подходящим кандидатом в силу того, что тогда на Σ вводится структура сферического CR -многообразия), ибо у каждого из них край состоит из двух компактных компонент. В действительности же, применение теоремы

Кона–Росси об аналитическом продолжении показывает, что край компактного многообразия $M(G)$ (отвечающего геометрически конечной группе $G \subset PU(n, 1)$ без каспов) связан, что резко контрастирует с вещественным гиперболическим случаем, а предельное множество $\Lambda(G)$ мало в некотором смысле (см. [ЕММ] и также [С], [СП] для кватернионных и октавных гиперболических многообразий). Более того, согласно недавнему результату Бернса (см. также теорему 4.4 в [NR1]), то же утверждение о связности границы $\partial M(G)$ верно, если хотя бы одна компонента края компактна. (В размерности $n \geq 3$ рассуждение Бернса, опирающееся на работу [VuM], использует эту компактность для доказательства геометрической конечности всего многообразия $M(G)$, см. также [NR2].)

Однако если все компоненты $\partial M(G)$ некомпактны и группа голономии комплексного гиперболического многообразия $M(G)$ не удовлетворяет какому-нибудь условию конечности, то ситуация резко меняется, как показывает наша конструкция в [AX1]:

ТЕОРЕМА 5.2. *В любой размерности $n \geq 2$ и для любых целых чисел $k, k_0, k \geq k_0 \geq 0$, существует комплексное гиперболическое n -мерное многообразие $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n/G$, $G \subset PU(n, 1)$, бесконечно удаленная граница которого распадается на k связных многообразий: $\partial_{\infty} M = N_1 \cup \dots \cup N_k$. Более того, для всякой граничной компоненты N_j , $j \leq k_0$, вложение $i_j: N_j \subset M(G)$ индуцирует гомотопическую эквивалентность N_j и $M(G)$.*

Для дискретных групп $G \subset PU(n, 1)$ без кручения связная компонента Ω_0 множества разрывности $\Omega(G) \subset \partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ со стабилизатором $G_0 \subset G$ является стягиваемой и G -инвариантной, если и только если вложение $N_0 = \Omega_0/G_0 \subset M(G)$ индуцирует гомотопическую эквивалентность N_0 и $M(G)$ [A1], [AX1]. Это позволяет переформулировать теорему 5.2 в следующем виде:

ТЕОРЕМА 5.3. *Для всякой комплексной размерности $n \geq 2$ и любых натуральных чисел k и $k_0, k \geq k_0 \geq 0$, существует дискретная группа $G = G(n, k, k_0) \subset PU(n, 1)$ со множеством разрывности $\Omega(G) \subset \partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, распадающимся на k G -инвариантных компонент $\Omega(G) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$, причем первые k_0 из них стягиваемы.*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Решающим моментом в доказательстве (см. подробности в [AX1]) является построение дискретной группы $G \subset PU(n, 1)$ с множеством разрывности, состоящим из двух G -инвариантных топологических шаров. Для этого мы строим бесконечное семейство Σ непересекающихся замкнутых гейзенберговских шаров $B_i = B(a_i, r_i) \subset \partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ таких, что дополнение $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{\bigcup_i B(a_i, r_i)} = P_1 \cup P_2$ состоит из двух топологических шаров P_1 и P_2 . При построении этого семейства $\mathcal{H}$ -шаров B_j мы существенно опираемся на контактную структуру на группе Гейзенберга $\mathcal{H}_n$. А именно, Σ представляет собой объединение конечных непересекающихся наборов Σ_i замкнутых $\mathcal{H}$ -шаров, чьи граничные $\mathcal{H}$ -сферы содержат “вещественные гиперсферы”, являющиеся краями $(2n - 2)$ -мерных h -кобордизмов N_i . В пределе эти h -кобордизмы сходятся к множеству предельных вершин полиэдров P_1 и P_2 , ограниченных $\mathcal{H}$ -сферами $S_j = \partial B_j$, $B_j \in \Sigma$. Искомая группа $G = G(n, 2, 2) \subset PU(n, 1)$ порождена инволюциями $\mathcal{S}_j$, сохраняющими упомянутые вещественные $(2n - 3)$ -сферы, лежащие в $S_j \subset \partial P_1 \cup \partial P_2$ (см. рис. 1).

Заметим, что в силу нашей конструкции пересечение всякой $\mathcal{H}$ -сферы S_j и любого из полиэдров P_1 и P_2 , образующих дополнение к шарам $B_j \in \Sigma$, есть топологичес-

Рис. 1. h -кобордизм N_0 двух вещественных окружностей в $\mathcal{H}$

кий $(2n - 2)$ -мерный шар, так что сфера разбивается на две части A_j и A'_j , причем $\mathcal{I}_i(A_i) = A'_i$. Это позволяет определить искомую дискретную группу $G = G_\Sigma \subset PU(n, 1)$ как дискретное свободное произведение $G_\Sigma = *_j \Gamma_j = *_i \langle \mathcal{I}_j \rangle$ бесконечного числа циклических групп Γ_j , порожденных инволюциями $\mathcal{I}_j$ относительно $\mathcal{H}$ -сфер $S_j = \partial B_j$. Таким образом, $P_1 \cup P_2$ является фундаментальным полиэдром действия G в $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$; грани каждой из его компонент связности P_1 и P_2 являются топологическими шарами и пары этих граней переводятся друг в друга соответствующими образующими $\mathcal{I}_j \in G$. Стандартным образом (см. [A1, леммы 3.7 и 3.8]) можно показать, что множество разрывности $\Omega(G) \subset \mathcal{H}_n$ состоит из двух G -инвариантных топологических шаров Ω_1 и Ω_2 , где $\Omega_k = \text{int}(\bigcup_{g \in G} g(\overline{P_k}))$, $k = 1, 2$. То, что Ω_k является топологическим шаром, следует из того наблюдения, что эта область является объединением монотонного семейства

$$V_0 = \text{int}(\overline{P_k}) \subset V_1 = \text{int}(\overline{P_k} \cup \mathcal{I}_0(\overline{P_k})) \subset V_2 \subset \dots$$

открытых топологических шаров [Br]. Заметим, что здесь мы используем ту особенность нашей конструкции, что все V_i – топологические шары.

В общем случае $k \geq k_0 \geq 0$, $k \geq 3$, можно использовать вышеупомянутые свободные произведения и нашу, использующую h -кобордизмы, конструкцию бесконечных семейств $\mathcal{H}$ -шаров с предписанными свойствами для (достаточно близкой) “аппроксимации” данной гиперповерхности в $\mathcal{H}_n$ предельными множествами построенных таким образом дискретных групп. В качестве таких гиперповерхностей мы используем так называемые “древовидные” поверхности, являющиеся границами гладких окрестностей деревьев в $\mathcal{H}_n$. Это позволяет обобщить конструкцию Тетенова [T1], [KAG] дискретных групп G , действующих на m -мерных сферах S^m , $m \geq 3$, с множествами разрывности, распадающимися на любое заданное число G -инвариантных стягиваемых компонент связности.

Хотя ответ в задаче о числе граничных компонент $M(G)$ все еще неясен в общем случае комплексного гиперболического многообразия M с конечно порожденной фун-

даментальной группой $\pi_1(M) \cong G$, но, как показывает следующий результат, описанная в теореме 5.3 ситуация не может возникнуть, если M геометрически конечно. За более четкой формулировкой и доказательством этой теоремы о h -кобордизме мы отошлем читателя к [AX1].

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть $G \subset PU(n, 1)$ – неэлементарная геометрически конечная группа без кручения, чье многообразие Клейна $M(G)$ имеет некомпактный край $\partial M = \Omega(G)/G$, одна компонента которого $N_0 \subset \partial M$ гомотопически эквивалентна $M(G)$. Тогда существует такой компактный h -кобордизм $M_c \subset M(G)$, что $M(G)$ восстанавливается по M_c подклеиванием конечного числа открытых воротничков $M_i \times [0, \infty)$, где каждое из M_i конечнолистно покрывается произведением $E_k \times B^{2n-k-1}$ замкнутого $(2n-1-k)$ -мерного шара и замкнутого k -мерного многообразия E_k , являющегося либо плоским, либо нильпотентным многообразием (с нильпотентной фундаментальной группой степени 2).*

В связи с этой теоремой об h -кобордизме уместно упомянуть еще один интересный факт, следующий из конструкции Ливингстона–Майерса [My]. А именно, всякая $\mathbb{Z}$ -гомологическая сфера h -кобордантна вещественной гиперболической гомологической сфере. Однако неизвестно, можно ли ввести какую-либо геометрическую структуру на подобном h -кобордизме и можно ли ввести CR -структуру на любом заданном гиперболическом 3-мерном многообразии (в частности, гомологической сфере) или на гомологической (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) 3-сфере, полученной процедурой “plumbing”. Мы отсылаем читателя к [Sa], [Mat] за информацией относительно последних продвижений в теории h -кобордизмов и, в частности, о результатах по флоеровым гомологиям гомологических 3-сфер и о новом инварианте Савельева (по-видимому, являющимся инвариантом h -кобордизмов), использующем гомологии Флоера.

6. Гомеоморфизмы, индуцированные изоморфизмами групп

В качестве еще одного применения развитых методов мы рассмотрим следующую хорошо известную задачу о геометрической реализации групповых изоморфизмов.

ЗАДАЧА 6.1. *Для заданного сохраняющего тип изоморфизма $\varphi: G \rightarrow H$ дискретных групп $G, H \subset PU(n, 1)$ найти подмножества $X_G, X_H \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, инвариантные, соответственно, относительно действий G и H , и эквивариантный гомеоморфизм $f_\varphi: X_G \rightarrow X_H$, индуцирующий изоморфизм φ . Определить метрические свойства f_φ и, в частности, выяснить, является ли f_φ квазисимметрическим или квазиконформным.*

Задачи этого рода изучались несколькими авторами. В случае решеток G и H в симметрическом пространстве X ранга 1 Мостов [Mo1] доказал в своей знаменитой теореме жесткости, что подобные изоморфизмы $\varphi: G \rightarrow H$ продолжаются до внутренних автоморфизмов X при условии, что X нельзя отобразить на $PSL(2, \mathbb{R})$ аналитическим гомоморфизмом. В этом доказательстве было важно показать, что φ индуцирован квазиконформным гомеоморфизмом бесконечно удаленной сферы ∂X , являющейся одноточечной компактификацией (нильпотентной) группы Карно N (относительно квазиконформных отображений групп Гейзенберга и Карно, см. [KR], [P]).

Если геометрически конечные группы $G, H \subset PU(n, 1)$ содержат параболические элементы, нетривиальны и не являются решетками, то результаты о геометрической реализации их изоморфизмов известны только для вещественных гиперболических пространств [Tu]. Вообще говоря, в комплексном гиперболическом пространстве мы не можем использовать те же методы, так как не можем проконтролировать поведения выпуклых оболочек, особенно рядом с каспами (в частности, выпуклая оболочка трех точек бывает 4-мерной). Другой (динамический) подход, разработанный Юэ [Yu2, Cor. B] (и использующий теорему Аносова–Смейла об устойчивости гиперболических потоков), можно использовать только для кокомпактных G и H , см. [Yu3]. В качестве первого шага в решении общей задачи 6.1, мы докажем следующую теорему об изоморфизме [A7]:

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть $\phi : G \rightarrow H$ – сохраняющий тип изоморфизм неэлементарных геометрически конечных групп $G, H \subset PU(n, 1)$. Тогда существует единственный эквивариантный гомеоморфизм $f_\phi : \Lambda(G) \rightarrow \Lambda(H)$ из предельных множеств, индуцирующий ϕ . Более того, если $\Lambda(G) = \partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, то гомеоморфизм f_ϕ является ограничением некоторой гиперболической изометрии $h \in PU(n, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим граф Кэли $K(G, \sigma)$ группы G с заданным конечным набором образующих σ . Этот граф представляет собой одномерный комплекс, вершины которого – элементы G , причем две вершины $a, b \in G$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $a = bg^{\pm 1}$ для некоторой образующей $g \in \sigma$. Пусть $|*|$ есть “лексическая” норма в $K(G, \sigma)$, т.е. $|g|$ равна минимальной длине слова в алфавите σ , представляющего $g \in G$. Выбрав функцию ρ так, что $\rho(r) = 1/r^2$ при $r > 0$ и $\rho(0) = 1$, можно определить длину ребра $[a, b] \subset K(G, \sigma)$ по формуле $d_\rho(a, b) = \min\{\rho(|a|), \rho(|b|)\}$. Рассматривая пути минимальной длины в смысле $d_\rho(a, b)$, можно задать метрику на графе $K(G, \sigma)$. Рассмотрев пополнение $\overline{K(G, \sigma)}$ этого метрического пространства, мы приходим к определению пополнения группы $\overline{G}$ как компактного метрического пространства $\overline{K(G, \sigma)} \setminus K(G, \sigma)$ (см. [Fl]). С точностью до липшицевых гомеоморфизмов это определение не зависит от σ . Так, для циклической группы $\mathbb{Z}$ идеальная граница $\overline{\mathbb{Z}}$, очевидно, содержит две точки. Однако для нильпотентной группы G с одним концом пополнение $\overline{G}$ – одноточечное множество [Fl].

Теперь мы можем найти собственное эквивариантное вложение $F : K(G, \sigma) \hookrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ графа Кэли заданной геометрически конечной группы $G \subset PU(n, 1)$. Для этого предположим, что стабилизатор, скажем, точки $0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ тривиален. Тогда мы полагаем $F(g) = g(0)$ для любой вершины $g \in K(G, \sigma)$, и пусть F отображает ребра $[a, b] \subset K(G, \sigma)$ в отрезки геодезических $[a(0), b(0)] \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Для геометрически конечной дискретной группы $G \subset PU(n, 1)$ существуют константы $K, K' > 0$ такие, что все элементы $g \in G$ нормой $|g| \geq K'$ удовлетворяют оценке*

$$(6.4) \quad \ln(2|g| - K)^2 - \ln K^2 \leq d(0, g(0)) \leq K|g|.$$

Соответствующее доказательство основано на сравнении метрики Бергмана $d(*, *)$ и метрики кратчайшего пути $d_0(*, *)$ на множестве $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, определенном следующим образом. Пусть $C(\Lambda(G)) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ – выпуклая оболочка предельного множества $\Lambda(G) \subset \partial \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, т.е. минимальное выпуклое подмножество $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, замыкание которого в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$

содержит $\Lambda(G)$. Очевидно, оно G -инвариантно и его фактор $C(\Lambda(G))/G$ – минимальный выпуклый ретракт $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n/G$. Поскольку G геометрически конечна, дополнение в $C(G)$ к окрестностям (конечного числа) каспидальных концов компактно и соответствует компактному подмножеству минимального выпуклого ретракта, которое можно рассматривать в качестве $\mathbb{H}_0/G$. Иными словами, $\mathbb{H}_0$ есть дополнение в выпуклой оболочке $C(\Lambda(G))$ к G -инвариантному семейству непересекающихся оришаров, каждый из которых строго инвариантен относительно своего (параболического) стабилизатора в G (см. [AX1], [Bow], ср. также [A1, Th. 6.33]). Теперь, когда мы получили кокомпактное действие G на области $\mathbb{H}_0$, граница которой содержит несколько орисфер, сравнение метрик $d = d(x, x')$ и $d_0 = d_0(x, x')$ можно свести к их сравнению на орисфере. Поэтому рассмотрим точки $x = (0, 0, u)$ и $x' = (\xi, v, u)$ на “горизонтальной” орисфере $S_u = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \{u\} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Тогда расстояния d и d_0 между ними следующие [Pr2]:

$$(6.5) \quad \cosh^2 \frac{d}{2} = \frac{1}{4u^2}(|\xi|^4 + 4u|\xi|^2 + 4u^2 + v^2), \quad d_0^2 = \frac{|\xi|^2}{u} + \frac{v^2}{4u^2}.$$

Это сравнение, вместе с важным результатом Кэннона [Can], утверждающим, что граф Кэли группы G с кокомпактным действием на метрическом пространстве X квазиизометрически вкладывается в X , завершают доказательство (6.4).

Мы используем предложение 6.3 для G -эквивариантного продолжения отображения F с графа Кэли $K(G, \sigma)$ на пополнение группы $\overline{G}$. Поскольку пополнение всякой параболической подгруппы $G_p \subset G$ является одноточечным либо двухточечным множеством (в зависимости от того, является ли G_p конечным расширением циклической группы или нильпотентной группы с одним концом), мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.6. *Для всякой геометрически конечной дискретной группы $G \subset PU(n, 1)$ существует непрерывное G -эквивариантное отображение $\Phi_G: \overline{G} \rightarrow \Lambda(G)$. Более того, Φ_G биективно всюду за исключением прообраза множества параболических неподвижных точек $p \in \Lambda(G)$ со стабилизаторами $G_p \subset G$ ранга один. В точках этого множества кратность Φ_G равна двум.*

Теперь можно завершить доказательство теоремы 6.2, рассмотрев следующую диаграмму отображений:

$$\Lambda(G) \xleftarrow{\Phi_G} \overline{G} \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{H} \xrightarrow{\Phi_H} \Lambda(H),$$

где гомеоморфизм $\overline{\phi}$ индуцирован изоморфизмом ϕ , а непрерывные отображения Φ_G и Φ_H определены в теореме 6.6. Точнее говоря, можно ввести отображение $f_\phi = \Phi_H \overline{\phi} \Phi_G^{-1}$, где Φ_G^{-1} – правое обратное к Φ_G , существующее по теореме 6.6. Более того, отображение Φ_G^{-1} биективно вне множества параболических неподвижных точек $p \in \Lambda(G)$ со стабилизаторами $G_p \subset G$ ранга один, а на этом множестве оно двузначно. Следовательно, f_ϕ биективно и G -эквивариантно. Единственность f_ϕ следует из непрерывности и того обстоятельства, что образ притягивающей неподвижной точки локсодромического элемента $g \in G$ должен быть притягивающей неподвижной точкой локсодромического элемента $\phi(g) \in H$ (подобные локсодромические неподвижные точки плотны в предельном множестве, см. [A1]).

Последнее утверждение теоремы 6.2 – прямое следствие из теоремы жесткости Мостова [Mo1], ибо геометрически конечная группа $G \subset PU(n, 1)$ с $\Lambda(G) = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ко-конечна: $\text{vol}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n/G) < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Наше доказательство теоремы 6.2 легко распространить на общую ситуацию, т.е. построить эквивариантные гомеоморфизмы $f_\phi: \Lambda(G) \rightarrow \Lambda(H)$, посредством которых сопряжены действия (на предельных множествах) изоморфных геометрически конечных групп $G, H \subset \text{Isom } X$ в (симметрическом) пространстве X с зацеплением отрицательной кривизны K , $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. В действительности, оценки, похожие на (6.4) в предложении 6.3 (и имеющие решающее значение для наших рассуждений), можно вывести из результатов Хайнтце и Им Хофа [HI, Th.4.6], которые сравнивают геометрию орисфер $S_u \subset X$ с геометрией пространств постоянной кривизны $-a^2$ и $-b^2$. Согласно этим результатам, для всех точек $x, y \in S_u$ и расстояний $d = d(x, y)$ и $d_u = d_u(x, y)$ между ними, соответственно, в пространстве X и на орисфере S_u выполняется оценка $\frac{2}{a} \sinh(a \cdot d/2) \leq d_u \leq \frac{2}{b} \sinh(b \cdot d/2)$.

Выяснив вопрос о существовании гомеоморфизма f_φ , индуцирующего заданный изоморфизм φ дискретных подгрупп $PU(n, 1)$, проблему 6.1 можно свести к вопросу о том, квазисимметрично ли f_φ относительно метрики Карно–Каратеодори (или Сигана) и существует ли G -эквивариантное продолжение этого отображения на большее множество (на бесконечно удаленную сферу и даже на все пространство $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$), индуцирующее φ . В случае выпуклых кокомпактных групп, полученных близкими представлениями, это можно было бы рассматривать как обобщение теоремы Салливена о стабильности [Su2], см. также [A9].

Однако, и это резко отличает этот случай от вещественного гиперболического, здесь возникает интересный эффект, связанный с возможной некомпактностью границы $\partial M(G) = \Omega(G)/G$. А именно, даже в простейшем случае параболических циклических групп $G \cong H \subset PU(n, 1)$, гомеоморфные CR -многообразия $\partial M(G) = \mathcal{H}^n/G$ и $\partial M(H) = \mathcal{H}^n/H$ не обязательно квазиконформно эквивалентны (см. [Min]). В действительности, подобные трехмерные CR -многообразия (гомеоморфные $\mathbb{R}^2 \times S^1$) распадаются в точности на два класса квазиконформно эквивалентных многообразий, группы голономии элементов которых порождены, соответственно, вертикальным $\mathcal{H}$ -сдвигом на $(0, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ и горизонтальным $\mathcal{H}$ -сдвигом на $(1, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

В теореме 7.1 рассматривается менее тривиальная топологическая деформация $\{f_\alpha\}$, $f_\alpha: \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, “комплексно-фуксовой” ко-конечной группы $G \subset PU(1, 1) \subset PU(2, 1)$ в квазифуксовы дискретные группы $G_\alpha = f_\alpha G f_\alpha^{-1} \subset PU(2, 1)$. Она деформирует чисто параболические подгруппы G в подгруппы G_α , порожденные гейзенберговскими “сдвигами с поворотом”. Подчеркнем, что подобные деформации, переводящие действие G в действие G_α , не могут быть “контактоморфизмами”, поскольку они отображают некоторые полюса биссекторов Дирихле в точки биссекторов-образов, не являющиеся полюсами. Более того, они не могут быть даже квазиконформными. Это означает, что обобщение вышеупомянутой теоремы устойчивости Салливена на группы с каспами ранга один невозможно.

Заметим также, что помимо метрической (квазисимметрической) части задачи 6.1 о геометризации существуют некоторые топологические препятствия к продолжению эквивариантных гомеоморфизмов $f_\varphi, f_\varphi: \Lambda(G) \rightarrow \Lambda(H)$. Об этом свидетельствует следующий пример.

ПРИМЕР 6.7. Пусть $G \subset PU(1, 1) \subset PU(2, 1)$ и $H \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$ – гео-

метрически конечные (локсодромические) группы, изоморфные фундаментальной группе $\pi_1(S_g)$ некоторой компактной ориентированной поверхности S_g рода $g > 1$. Тогда эквивариантный гомеоморфизм $f_\varphi: \Lambda(G) \rightarrow \Lambda(H)$ не продолжается до гомеоморфизма всей сферы $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2 \approx S^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Препятствие в этом примере топологическое; оно связано с тем, что фактор-многообразия $M_1 = \mathbb{H}_\mathbb{C}^2/G$ и $M_2 = \mathbb{H}_\mathbb{C}^2/H$ негомеоморфны. Точнее, эти комплексные поверхности расслаиваются на диски над римановой поверхностью S_g и у них разные инварианты Толедо $\tau(\mathbb{H}_\mathbb{C}^2/G) = 2g - 2$ и $\tau(\mathbb{H}_\mathbb{C}^2/H) = 0$, см. [To].

Комплексные структуры на M_1 и M_2 также совершенно разные. В первое многообразие, M_1 , можно естественным образом вложить риманову поверхность S_g в качестве комплексного вполне геодезического замкнутого подмногообразия, так что M_1 не является многообразием Штейна. Второе многообразие, M_2 , штейново согласно одному результату Бернса и Шнайдера [BS]. Более того, как показано Голдманом [Go1], из замкнутости $S_p \subset M_1$ следует, что M_1 — локально жесткое многообразие в том смысле, что всякое близкое представление $G \rightarrow PU(2, 1)$ оставляет на месте комплексную геодезическую в $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ и сопряжено с представлением $G \rightarrow PU(1, 1) \subset PU(2, 1)$. Иными словами, не существует нетривиальных “квазифуксовых” деформаций G и M_1 . С другой стороны, мы покажем в следующем параграфе (см. теорему 7.1), что у M_2 достаточно большое пространство Тейхмюллера различных “квазифуксовых” комплексных гиперболических структур.

7. Деформации комплексных гиперболических и CR -структур: жесткость и нежесткость

Поскольку всякое гиперболическое n -мерное многообразие можно (вполне геодезически) вложить в комплексное гиперболическое n -мерное многообразие $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n/G$, мы имеем достаточно много примеров нежесткости последних, достаточно посмотреть на гиперболические структуры на римановой поверхности рода $g > 1$, образующие пространство Тейхмюллера — комплексно-аналитическое многообразие размерности $(3g-3)$. Сильная жесткость начинается с вещественной размерности 3. А именно, в силу теоремы Мостова о жесткости [M1], гиперболические структуры конечного объема и (вещественной) размерности не меньше трех однозначно определяются топологией многообразия и не имеют непрерывных деформаций. Однако у гиперболических многообразий весьма много инфинитезимальных деформаций, а согласно терстоновскому гиперболическому варианту теоремы Дена о хирургии [Th], некомпактные гиперболические 3-мерные многообразия конечного объема можно аппроксимировать компактными гиперболическими.

Далее, при всей гиперболической жесткости, вещественные гиперболические многообразия M можно деформировать как конформные многообразия, или, что то же самое, как гиперболические многообразия $M \times (0, 1)$ на единицу большей размерности и бесконечного объема. Первые подобные квазифуксовы деформации были получены автором [A2], а после построенного Терстоном примера “Микки Мауса” [Th], их стали называть сгибаниями M по вполне геодезическим гиперповерхностям (см. также [A1], [A2], [A4]–[A6], [JM], [Ko], [Su1]). Более того, все эти деформации квазиконформно эквивалентны и свидетельствуют о богатстве семейства квазиконформных G -эквивариантных гомеоморфизмов вещественного гиперболического пространства $\mathbb{H}_\mathbb{R}^n$. В частности, существует непрерывная деформация предельного множества $\Lambda(G) \subset \partial\mathbb{H}_\mathbb{R}^{n+1}$

от стандартной сферы $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n = S^{n-1} \subset S^n = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ до недифференцируемого вложения топологической $(n-1)$ -сферы, квазиконформно эквивалентной S^{n-1} .

При сопоставлении с вышеупомянутой гибкостью, “невещественные” гиперболические многообразия представляются более жесткими. В частности, Пансю [Р] показал, что квазиконформные отображения бесконечно удаленной сферы кватернионных или октавных гиперболических пространств обязательно являются автоморфизмами, так что у соответствующих структур не может быть интересных квазиконформных деформаций. Более того, по теореме жесткости Корлетта [Co2], подобные многообразия являются даже супержесткими, подобно маргулисовской супержесткости симметрических пространств высших рангов [MG1]. Далее, комплексные гиперболические многообразия обладают тем же свойством жесткости, что и кватернионные или октавные. А именно, по теореме Голдмана о локальной жесткости в размерности $n = 2$ [G1] и ее обобщению на случай $n \geq 3$ [GM], всякое близкое к тождественному дискретное представление $\rho: G \rightarrow PU(n, 1)$ кокомпактной решетки $G \subset PU(n-1, 1)$ оставляет на месте некоторое вполне геодезическое подпространство $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Таким образом, предельное множество $\Lambda(\rho G) \subset \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ всегда представляет собой “круглую” сферу S^{2n-3} . В более высоких размерностях $n \geq 3$ эта локальная жесткость комплексных гиперболических n -мерных многообразий M , гомотопически эквивалентных своим замкнутым комплексным вполне геодезическим гиперповерхностям, оказывается даже глобальной, в силу недавно полученной теоремы жесткости Юэ [Yu1].

Сейчас наша цель – показать, что, несмотря на жесткость комплексных гиперболических (нештейновых) многообразий M из вышеуказанного класса, комплексные гиперболические многообразия Штейна не являются жесткими в общем случае (мы думаем, что это верно для всех многообразий Штейна с “большими” концами на бесконечности). У этой нежесткости есть два аспекта.

Во-первых, надо подчеркнуть, что свойство сохранения группой $G \subset PU(n, 1)$ некоторой комплексной вполне геодезической гиперповерхности в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ гарантирует локальную жесткость только в случае кокомпактных решеток $G \subset PU(n-1, 1)$. Это вытекает из следующего нашего результата [ACG]:

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $G \subset PU(1, 1)$ – ко-конечная свободная решетка, действие которой на $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ порождено четырьмя вещественными инволюциями (с неподвижными попарно соприкасающимися вещественными окружностями на бесконечности). Тогда существует непрерывное семейство $\{f_{\alpha}\}$, $-\epsilon < \alpha < \epsilon$, G -эquivariantных гомеоморфизмов $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, индуцирующее нетривиальные квазифуксовы (точные дискретные) представления $f_{\alpha}^*: G \rightarrow PU(2, 1)$. Более того, никакой G -эquivariantный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, индуцирующий представление f_{α}^* , не может быть квазиконформным при $\alpha \neq 0$.*

Вместе с результатом Юэ [Yu2] о хаусдорфовой размерности это показывает, что можно продеформировать ко-конечную фуксову группу $G \subset PU(1, 1)$ в квазифуксову группы $G_{\alpha} = f_{\alpha} G f_{\alpha}^{-1} \subset PU(2, 1)$, у которых хаусдорфова размерность предельного множества $\Lambda(G_{\alpha})$ строго больше единицы.

Во-вторых, заметим, что некомпактность также не является существенной для подобной нежесткости. Комплексные гиперболические многообразия Штейна M , гомотопически эквивалентные замкнутым вещественным вполне геодезическим поверхностям, также не являются жесткими. А именно, мы можем предъявить каноничес-

кую конструкцию непрерывных нетривиальных квазифуксовых деформаций комплексных поверхностей, расслоенных над замкнутыми римановыми поверхностями рода $g > 1$, и зависящих от $3(g-1)$ непрерывных параметров (и это в дополнение к “фуксовым” деформациям, когда, в частности, пространство Тейхмюллера поверхности-базы имеет размерность $6(g-1)$). Это первый пример подобных нетривиальных деформаций расслоений с компактной базой (в некомпактном случае см. другой пример Голдмана и Паркера [GP2] деформаций идеальных треугольных групп $G \subset PO(2,1)$). Нежесткость подобных голоморфных расслоений и подсчитанное число параметров представляют собой первое (частичное) подтверждение гипотезы о том, что размерность пространства Тейхмюллера таких комплексных поверхностей равна $16(g-1)$. Эта гипотеза связана с результатом Голдмана (см. последнюю фразу на стр. 43 работы [Go3], см. также работу Вейля [We]) о том, что многообразие классов сопряженных элементов представлений $G \rightarrow PU(2,1)$ (не обязательно дискретных), близких к вложению $G \subset PO(2,1)$, вещественно аналитично и имеет размерность $16(g-1)$. Заметим, что дискретность представлений $G \cong \pi_1 M$ существенна для построения деформации комплексного многообразия M , и ее нельзя получить из указанного результата Вейля и Голдмана.

Исходным моментом нашей конструкции стал разработанный автором подход к деформациям сгибания вещественных гиперболических (конформных) многообразий по вполне геодезическим гиперповерхностям ([A2], [A4]) и пример Карнейро–Гусевского [Gu] нетривиального дискретного представления некоторой группы поверхности в $PU(2,1)$. В случае комплексных гиперболических (и CR -)структур эти “сгибания” работают не так, как в вещественном случае. Точнее, для комплексных сгибаний требуется одновременно сгибать базу расслоения на комплексной поверхности M и все вполне геодезические слои этого расслоения (см. замечание 7.9). Подобные сгибания комплексных поверхностей связаны с вещественными простыми замкнутыми геодезическими на них (имеющими вещественную коразмерность 3), но не имеют ничего общего с так называемыми коническими деформациями вещественных гиперболических трехмерных многообразий вдоль замкнутых геодезических (см. [A6], [A9]).

Далее, хорошо известны сложности, возникающие при построении эквивариантных гомеоморфизмов в комплексных гиперболических пространствах и в CR -геометрии и связанные с необходимостью сохранять кэлерову или контактную структуру (соответственно, в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ и на его бесконечно удаленной части $\mathcal{H}_n$). Тем не менее, построенные изгибающие деформации индуцированы эквивариантными гомеоморфизмами $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, которые вдобавок квазиконформны:

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $G \subset PO(2,1) \subset PU(2,1)$ – заданная (неэлементарная) дискретная группа. Тогда для всякой простой замкнутой геодезической α на римановой поверхности $S = H_{\mathbb{R}}^2/G$ и достаточно малых $\eta_0 > 0$ существует голоморфное семейство G -эквивариантных квазиконформных гомеоморфизмов $F_{\eta}: \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, $-\eta_0 < \eta < \eta_0$, задающих сгибающую (квазифуксову) деформацию $\mathcal{B}_{\alpha}: (-\eta_0, \eta_0) \rightarrow \mathcal{B}_0(G)$ группы G по геодезической α , $\mathcal{B}_{\alpha}(\eta) = F_{\eta}^*$.

Заметим, что деформации комплексного гиперболического многообразия M могут зависеть от большого числа параметров, соответствующих точкам пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(M)$ классов изотопных комплексных гиперболических

структур на M . Изучение этого пространства $\mathcal{T}(M)$ сводится к изучению многообразия $\mathcal{T}(G)$ классов сопряженных элементов множества точных дискретных представлений $\rho: G \rightarrow PU(n, 1)$ (включающего пространство $D(M)$ отображений развертки, см. [Go2], [FG]). Здесь $\mathcal{T}(G) = \mathcal{R}_0(G)/PU(n, 1)$, а многообразие $\mathcal{R}_0(G) \subset \text{Hom}(G, PU(n, 1))$ состоит из точных дискретных представлений ρ группы G с бесконечным объемом фактор-пространства $\text{Vol}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n/G) = \infty$. Наши комплексные сгибающие деформации зависят от большого числа независимых параметров, что можно показать, рассматривая их конструкции и используя угловой инвариант, введенный в CR -геометрию Эли Картаном [Car]:

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть $S_p = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/G$ – замкнутая вещественная вполне геодезическая поверхность рода $p > 1$, лежащая в комплексной гиперболической поверхности $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/G$, где $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$. Тогда существует вложение $\pi \circ \mathcal{B}: B^{3p-3} \hookrightarrow \mathcal{T}(M)$ вещественного $(3p-3)$ -шара в пространство Тейхмюллера M , задаваемое сгибающими деформациями по непересекающимся замкнутым геодезическим в M и проекцией $\pi: \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) = \mathcal{D}(M)/PU(2, 1)$ в пространство отображений развертки $\mathcal{D}(M)$.

Основная конструкция (доказательство теоремы 7.2). Мы начинаем с вещественной вполне геодезической поверхности $S = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/G$, лежащей в комплексной поверхности $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/G$, где $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$ – заданная дискретная группа. Мы фиксируем простую замкнутую геодезическую α на S . Можно предполагать, что петля α накрыта геодезической $A \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, бесконечно удаленные концы которой совпадают с ∞ и нулевым элементом группы Гейзенберга $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{H}} = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Более того, используя квазиконформные деформации римановой поверхности S (в смысле пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$, т.е. деформируя вложение $G \subset PO(2, 1)$ в $PO(2, 1)$ сгибаниями вдоль петли α , см. следствие 3.3 в [A10]), мы можем предполагать, что гиперболическая длина α достаточно мала, а радиус ее трубчатой окрестности достаточно велик:

ЛЕММА 7.4. Пусть g_{α} – гиперболический элемент неэлементарной дискретной группы $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$, сдвигающий точки своей оси $A \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ на расстояние ℓ . Тогда всякая трубчатая окрестность $U_{\delta}(A)$ оси A радиуса $\delta > 0$ строго инвариантна относительно стабилизатора $G_0 \subset G$ этой оси при условии, что $\sinh(\ell/4) \cdot \sinh(\delta/2) \leq 1/2$. Более того, при достаточно малых ℓ , $\ell < 4\delta$, полиэдр Дирихле $D_z(G) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ группы G с центром в точке $z \in A$ имеет две грани, a и a' , пересекающие A и такие, что $g_{\alpha}(a) = a'$.

Таким образом, группа G и ее подгруппы G_0, G_1, G_2 в свободном амальгамированном разложении (или HN -расширении) G имеют полиэдры Дирихле $D_z(G_i) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, $i = 0, 1, 2$, с центром в $z \in A = (0, \infty)$, пересечения которых с гиперболической плоскостью $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ выглядят как на рис. 2–5.

В частности, все биссекторы, ограничивающие такой полиэдр Дирихле, за исключением двух, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$, эквивалентных под действием гиперболического сдвига g_{α} (порождающего стабилизатор $G_0 \subset G$ оси A), принадлежат достаточно малым “коническим окрестностям” C_+ и C_- дуг (уходящих на бесконечность лучей) $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ вещественной окружности $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathcal{H}$.

Можно считать, что бесконечно удаленные сферы Гейзенберга биссекторов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ имеют, соответственно, радиусы 1 и $r_0 > 1$. Тогда при достаточно малом ϵ , $0 < \epsilon \ll$

 Рис. 2. $G_1 \subset G = G_1 *_{G_0} G_2$

 Рис. 3. $G_2 \subset G = G_1 *_{G_0} G_2$

 Рис. 4. $G_1 \subset G = G_1 *_{G_0}$

 Рис. 5. $G = G_1 *_{G_0}$

$r_0 - 1$, конические окрестности $C_+, C_- \subset \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ представляют собой конусы над ϵ -окрестностями точек $(1, 0, 0), (-1, 0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ в метрике Сигана ρ_c в $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \setminus \{\infty\}$ (см. (2.1)).

Конечно, можно рассмотреть геодезическую α столь малой длины ℓ , что замыкания всех равноудаленных полупространств в $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \setminus \{\infty\}$ (внутренние точки кото-

рых лежат вне полиэдра $D_z(G)$), ограниченных указанными биссекторами, не пересекаются с вертикальным биссектором, бесконечно удаленная граница которого есть $i\mathbb{R} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Это следует из того [Go4, теорема VII.4.0.3], что равноудаленные полупространства $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ не пересекаются тогда и только тогда, когда полуплоскости $\mathfrak{S}_1 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ и $\mathfrak{S}_2 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ не пересекаются, см. рис. 2–5.

Теперь мы можем определить квазиконформную сгибающую деформацию для группы G вдоль геодезической A , задающую изгибающую деформацию комплексной поверхности $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/G$ вдоль замкнутой геодезической $\alpha \subset S \subset M$.

Зафиксируем числа η и ζ такие, что $0 < \zeta < \pi/2$, $0 \leq \eta < \pi - 2\zeta$ и пересечение $C_+ \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$ лежит внутри сектора $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \zeta\}$. Мы определяем гомеоморфизм $\phi = \phi_{\eta, \zeta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, сгибающий вещественную ось $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ в начале координат на угол η (см. рис. 6) следующим образом:

$$(7.5) \quad \phi_{\eta, \zeta}(z) = \begin{cases} z, & \text{если } |\arg z| \geq \pi - \zeta, \\ z \cdot \exp(i\eta), & \text{если } |\arg z| \leq \zeta, \\ z \cdot \exp(i\eta(1 - (\arg z - \zeta)/(\pi - 2\zeta))), & \text{если } \zeta < \arg z < \pi - \zeta, \\ z \cdot \exp(i\eta(1 + (\arg z + \zeta)/(\pi - 2\zeta))), & \text{если } \zeta - \pi < \arg z < -\zeta. \end{cases}$$

Рис. 6

Для отрицательных η , $2\zeta - \pi < \eta < 0$, положим $\phi_{\eta, \zeta}(z) = \overline{\phi_{-\eta, \zeta}(\bar{z})}$. Ясно, что $\phi_{\eta, \zeta}$ квазиконформен относительно нормы Сигана (2.1) и является изометрией в ζ -конической окрестности вещественной оси $\mathbb{R}$, поскольку его линейное искажение дается формулой

$$(7.6) \quad K(\phi_{\eta, \zeta}, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\arg z| \geq \pi - \zeta, \\ 1, & \text{если } |\arg z| \leq \zeta, \\ (\pi - 2\zeta)/(\pi - 2\zeta - \eta), & \text{если } \zeta < \arg z < \pi - \zeta, \\ (\pi - 2\zeta + \eta)/(\pi - 2\zeta), & \text{если } \zeta - \pi < \arg z < -\zeta. \end{cases}$$

Расслаивая проколотую группу Гейзенберга $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ на сферы Гейзенберга $S(0, r)$ радиусов $r > 0$, этот изгибающий гомеоморфизм $\phi_{\eta, \zeta}$ можно продолжить до элементарного изгибающего гомеоморфизма $\varphi = \varphi_{\eta, \zeta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$, всей бесконечно удаленной сферы $S^3 = \overline{\mathcal{H}}$.

Точнее, для “двугранных секторов” $W_+, W_- \subset \mathcal{H}$ с общей вертикальной осью $\{0\} \times \mathbb{R}$, образованных дугами вещественных окружностей, соединяющих точки $(0, v)$ и $(0, -v)$ вертикальной оси и пересекающих ζ -конические окрестности лучей $\mathbb{R}_+$ и

$\mathbb{R}_- \subset \mathbb{C}$, соответственно, ограничения $\varphi|_{W_-}$ и $\varphi|_{W_+}$ сгибающего гомеоморфизма $\varphi = \varphi_{\eta, \zeta}$ являются тождественным отображением и унитарным вращением $U_\eta \in PU(2, 1)$ на угол η вокруг вертикальной оси $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathcal{H}$, см. также [A10, (4.4)]. Поэтому из (7.6) следует, что $\varphi_{\eta, \zeta} - G_0$ -эквивариантный квазиконформный гомеоморфизм в $\mathcal{H}$.

Расслоение проколотой группы Гейзенберга $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ на сферы Гейзенберга $S(0, r)$ естественно продолжается до расслоения гиперболического пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ на биссекторы $\mathfrak{S}_r$, для которых $S(0, r)$ являются бесконечно удаленными сферами. Хорошо известно (см. [M2]), что всякий биссектор $\mathfrak{S}_r$ содержит геодезическую γ_r , соединяющую точки $(0, -r^2)$ и $(0, r^2)$ бесконечно удаленной группы Гейзенберга $\mathcal{H}$; более того, $\mathfrak{S}_r$ расслаивается над γ_r на комплексные геодезические Y , для которых бесконечно удаленные окружности — это комплексные окружности, на которые расслаивается сфера $S(0, r)$.

Используя эти слоения на гиперболическом пространстве $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ и биссекторах $\mathfrak{S}_r$, элементарный изгибающий гомеоморфизм $\varphi_{\eta, \zeta}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ на бесконечности можно продолжить до элементарного изгибающего гомеоморфизма $\Phi_{\eta, \zeta}: \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$. Точнее, отображение $\Phi_{\eta, \zeta}$ оставляет на месте все биссекторы $\mathfrak{S}_r$, каждую комплексную геодезическую Y из расслоения на этих биссекторах, и точки пересечения y этих комплексных геодезических и комплексной геодезической, соединяющей нуль и ∞ группы Гейзенберга $\mathcal{H}$. Мы завершаем построение продолжения $\Phi_{\eta, \zeta}$, определив его на какой-нибудь (инвариантной) комплексной геодезической Y с неподвижной точкой $y \in Y$. Там оно является отображением, полученным распространением гомеоморфизма окружности $\varphi_{\eta, \zeta}|_{\partial Y}$ на всю гиперболическую плоскость (плоскость Пуанкаре) Y вдоль геодезических лучей $[y, \infty) \subset Y$ так, чтобы сохранить окружности в Y с центром в y и согнуть (в точке y , на угол η) геодезическую в Y , соединяющую середины соответствующих дуг комплексной окружности ∂Y (см. рис. 6).

По построению, элементарный сгибающий (квазиконформный) гомеоморфизм $\Phi_{\eta, \zeta}$ перестановочен с элементами циклической локсодромической группы $G_0 \subset G$. Еще одно важнейшее свойство гомеоморфизма $\Phi_{\eta, \zeta}$ заключается в следующем.

Пусть $D_z(G)$ — фундаментальный полиэдр Дирихле группы G с центром в заданной точке z оси A циклической локсодромической группы $G_0 \subset G$, и пусть $\mathfrak{S}^+ \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ — “полупространство”, не пересекающее $D_z(G)$ и ограниченное биссектором $\mathfrak{S} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, который не совпадает ни с одним из $\mathfrak{S}_r$, $r > 0$, и содержит грань $\mathfrak{s}$ полиэдра $D_z(G)$. Тогда существует открытая окрестность $U(\overline{\mathfrak{S}^+}) \subset \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$ такая, что ограничение на нее элементарного сгибающего гомеоморфизма $\Phi_{\eta, \zeta}$ либо тождественно, либо есть (унитарный) поворот $U_\eta \in PU(2, 1)$ на угол η вокруг “вертикальной” комплексной геодезической (“бесконечность” которой содержит вертикальную ось $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathcal{H}$).

Как показывают вышеуказанные свойства квазиконформного гомеоморфизма $\Phi = \Phi_{\eta, \zeta}$, образ $D_\eta = \Phi_{\eta, \zeta}(D_z(G))$ является полиэдром в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, ограниченным биссекторами. Далее, $\Phi_{\eta, \zeta}$ индуцирует естественное отождествление граней этого полиэдра; а именно, пары граней, которые Φ оставляет на месте, отождествляются исходными образующими группы $G_1 \subset G$. Для прочих граней $\mathfrak{s}_\eta$ полиэдра D_η , являющихся образами граней $\mathfrak{s} \subset D_z(G)$ при вращении U_η , спаривание можно определить с помощью разложения группы G (см. рис. 2–5).

Если $G = G_1 *_{G_0} G_2$, то мы заменяем отображения $g \in G_2$, спаривающие грани $D_z(G)$, на гиперболические изометрии $U_\eta g U_\eta^{-1} \in PU(2, 1)$. В случае же HNN -расширения $G = G_1 *_{G_0} = \langle G_1, g_2 \rangle$ спаривание $g_2 \in G$ граней $D_z(G)$ заменяется на

гиперболическую изометрию $U_\eta g_2 \in PU(2, 1)$. Иными словами, мы определяем продеформированные группы $G_\eta \subset PU(2, 1)$, соответственно, формулами

$$(7.7) \quad G_\eta = G_1 *_{G_0} U_\eta G_2 U_\eta^{-1} \quad \text{или} \quad G_\eta = \langle G_1, U_\eta g_2 \rangle = G_1 *_{G_0}.$$

Это показывает, что семейство представлений $G \rightarrow G_\eta \subset PU(2, 1)$ не зависит от величины ζ и голоморфно зависит от углового параметра η . Отметим также, что если η достаточно мало, полиэдры $g'(D_\eta)$, $g' \in G_\eta$, расположены в пространстве так же как полиэдры $g(D_z(G))$, $g \in G$, примыкающие к фундаментальному полиэдру Дирихле $D_z(G)$. Дело в том, что окрестности двумерных граней $D_\eta \subset \mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ устроены (замощены) изометрически так же, как у $D_z(G)$. Следовательно, полиэдры $g'(D_\eta)$, $g' \in G_\eta$, задают мощение (без наложений) на $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ и $G_\eta \subset PU(2, 1)$ является дискретной группой, а D_η — ее фундаментальный полиэдр, ограниченный биссекторами.

Поскольку ограничение элементарного сгибающего гомеоморфизма $\Phi = \Phi_{\eta, \zeta}$ на замыкание $\overline{D_z(G)} \subset \overline{\mathbb{H}_\mathbb{C}^2}$ согласовано с действием G , его можно эквивариантно продолжить с полиэдра $\overline{D_z(G)}$ на все пространство $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2 \cup \Omega(G)$, сообразуясь с действием G . В действительности, итоговый G -эквивариантный гомеоморфизм $F = F_\eta: \overline{\mathbb{H}_\mathbb{C}^2} \setminus \Lambda(G) \rightarrow \overline{\mathbb{H}_\mathbb{C}^2} \setminus \Lambda(G_\eta)$ можно записать в следующей форме в терминах естественного изоморфизма $\chi: G \rightarrow G_\eta$, тождественного на подгруппе $G_1 \subset G$:

$$(7.8) \quad \begin{aligned} F_\eta(x) &= \Phi_\eta(x) & \text{при } x \in \overline{D_z(G)}, \\ F_\eta \circ g(x) &= g_\eta \circ F_\eta(x) & \text{при } x \in \overline{\mathbb{H}_\mathbb{C}^2} \setminus \Lambda(G), \quad g \in G, \quad g_\eta = \chi(g) \in G_\eta. \end{aligned}$$

В силу квазиконформности Φ_η этот продолженный эквивариантный гомеоморфизм F_η квазиконформен. Более того, его продолжение по непрерывности на предельную (вещественную) окружность $\Lambda(G)$ совпадает с каноническим эквивариантным гомеоморфизмом $f_\chi: \Lambda(G) \rightarrow \Lambda(G_\eta)$, соответствующим изоморфизму χ по теореме 6.2. Так что мы получаем G -эквивариантный квазиконформный гомеоморфизм пространства $\overline{\mathbb{H}_\mathbb{C}^2}$ на себя, который мы, как и прежде, обозначим F_η .

Семейство G -эквивариантных квазиконформных гомеоморфизмов F_η индуцирует представления $F_\eta^*: G \rightarrow G_\eta = F_\eta G_2 F_\eta^{-1}$, $\eta \in (-\eta_0, \eta_0)$. Иными словами, мы получаем кривую $\mathcal{B}: (-\eta_0, \eta_0) \rightarrow \mathcal{R}_0(G)$ в многообразии $\mathcal{R}_0(G)$ точных дискретных представлений G в $PU(2, 1)$, накрывающую нетривиальную кривую, образованную классами сопряженных представлений $[\mathcal{B}(\eta)] = [F_\eta^*]$ в пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}(G)$. Получившуюся деформацию $\mathcal{B}$ мы назовем сгибающей деформацией решетки $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$ по геодезической сгиба $A \subset \mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ с локсодромическим стабилизатором $G_0 \subset G$. В терминах многообразий, $\mathcal{B}$ — это сгибающая деформация комплексной поверхности $M = \mathbb{H}_\mathbb{C}^2/G$, гомотопически эквивалентной вполне вещественной геодезической поверхности $S_g \subset M$ вдоль заданной простой геодезической α .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.9. Как следует из конструкции сгибающего гомеоморфизма $F_{\eta, \zeta}$, продеформированная поверхность $M_\eta = \mathbb{H}_\mathbb{C}^2/G_\eta$ расслоена над гиперболической поверхностью $S_\eta = F_\eta(\mathbb{H}_\mathbb{R}^2)/G_\eta$ с изломом (у которой замкнутая геодезическая α — особое множество). Слои этого расслоения — “вещественные плоскости с особенностями”, полученные из вполне вещественных геодезических двумерных плоскостей сгибом их на угол η вдоль вещественных геодезических. Эти (особые) вещественные геодезические являются пересечениями комплексной геодезической, проходящей через ось A циклической группы $G_0 \subset G$, и вполне вещественных геодезических плоскостей, соответствующих слоям исходного расслоения на $M = \mathbb{H}_\mathbb{C}^2/G$.

Доказательство следствия 7.3. Поскольку в силу (7.7) сгибы по непересекающимся замкнутым геодезическим производятся независимо, надо показать, что сгибающая деформация нетривиальна и $[\mathcal{B}(\eta)] \neq [\mathcal{B}(\eta')]$ для любого $\eta \neq \eta'$.

Нетривиальность деформации прямо следует из (7.7) (ср. [A9]). А именно, ограничения $\rho_\eta|_{G_1}$ сгибающих деформаций на неэлементарную подгруппу $G_1 \subset G$ (а в общем случае, на ‘вещественную’ подгруппу $G_r \subset G$, отвечающую некоторой вещественной вполне геодезической части поверхности $S \simeq M$) тождественны, так что если бы деформация $\mathcal{B}$ была тривиальной, то она оказалась бы сопряжением группы G при помощи проективного преобразования, коммутирующего с нетривиальной вещественной подгруппой $G_r \subset G$ и оставляющего неподвижными точки вполне вещественной геодезической плоскости $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Это противоречит тому, что предельные множества продеформированных групп G_η , $\eta \neq 0$, не лежат на вещественной окружности, содержащей предельное канторово множество $\Lambda(G_r)$.

Инъективность $\mathcal{B}$ можно доказать, используя угловой инвариант $\mathbb{A}(x)$, $-\pi/2 \leq \mathbb{A}(x) \leq \pi/2$, тройки $x = (x^0, x^1, x^2)$ точек $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, введенный Э. Картаном [Car]. Как известно (см. [Go4]), $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}(y)$ для троек x и y , если и только если существует $g \in PU(2, 1)$ такое, что $y = g(x)$; более того, подобное g единственно при условии, что $\mathbb{A}(x)$ отличен от нуля и $\pm\pi/2$. При этом $\mathbb{A}(x) = 0$, только если x^0, x^1 и x^2 лежат на одной $\mathbb{R}$ -окружности, и $\mathbb{A}(x) = \pm\pi/2$, только если x^0, x^1 и x^2 лежат на одной цепи ($\mathbb{C}$ -окружности).

А именно, пусть $g_2 \in G \setminus G_1$ – образующая группы G в (4.3), неподвижная точка $x^2 \in \Lambda(G)$ которой принадлежит $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \subset \mathcal{H}$, и пусть $x_\eta^2 \in \Lambda(G_\eta)$ – соответствующая неподвижная точка элемента $\chi_\eta(g_2) \in G_\eta$, образа g_2 при изоморфизме $\chi_\eta: G \rightarrow G_\eta$. В силу конструкции, орбита $\{\gamma(x_\eta^2), \gamma \in G_0\}$ локсодромической подгруппы $G_0 \subset G \cap G_\eta$ (подгруппы растяжений) приближается к началу координат вдоль луча $(0, \infty)$, образующего ненулевой угол η с лучом $\mathbb{R}_- \times \{0\} \subset \mathcal{H}$. Последний луч также содержит некоторую орбиту – орбиту $\{\gamma(x^1), \gamma \in G_0\}$ предельной точки x^1 группы G_1 , приближающуюся к началу координат с другой стороны. Рассматривая тройки точек $x = (x^1, 0, x^2)$ и $x_\eta = (x^1, 0, x_\eta^2)$, лежащих, соответственно, в предельных множествах $\Lambda(G)$ и $\Lambda(G_\eta)$, мы получаем, что $\mathbb{A}(x) = 0$ и $\mathbb{A}(x_\eta) \neq 0, \pm\pi/2$. По теореме 6.2, оба предельных множества представляют собой топологические окружности, и они не могут переводиться друг в друга гиперболической изометрией в силу различия картановских инвариантов (так что, опять-таки наша деформация нетривиальна).

Аналогично, для разных значений η и η' получаем тройки x_η и $x_{\eta'}$ с разными (нетривиальными) картановскими инвариантами $\mathbb{A}(x_\eta) \neq \mathbb{A}(x_{\eta'})$. Следовательно, $\Lambda(G_\eta)$ и $\Lambda(G_{\eta'})$ не являются $PU(2, 1)$ -эквивалентными.

Приведенное доказательство можно использовать также и в общем случае сгибающих деформаций комплексной гиперболической поверхности $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/G$, в группе гономии которой $G \subset PU(2, 1)$ есть неэлементарная подгруппа G_r , сохраняющая вещественную вполне геодезическую плоскость $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Иными словами, в таких комплексных поверхностях M есть вложенные вполне вещественные геодезические поверхности с геодезическими границами. В частности, все построенные в [GKL] комплексные поверхности с заданным инвариантом Толедо лежат в этом классе, так что мы сразу получаем

Следствие 7.10. Пусть $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/G$ – комплексная гиперболическая поверх-

ность, в которой есть вложенная вполне вещественная геодезическая поверхность $S_r \subset M$ с геодезическим краем, и пусть $\mathcal{B}: (-\eta, \eta) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ – сгибающая деформация M вдоль простой замкнутой геодезической $\alpha \subset S_r$. Тогда отображение $\pi \circ \mathcal{B}: (-\eta, \eta) \rightarrow \mathcal{T}(M) = \mathcal{D}(M)/PU(2, 1)$ является гладким вложением при условии, что предельное множество $\Lambda(G)$ группы голономии G не принадлежит G -орбите $\mathbb{R}$ -окружности $S_{\mathbb{R}}^1$ или цепи $S_{\mathbb{C}}^1$, где последняя является бесконечно удаленной границей комплексной геодезической, содержащей прообраз $\tilde{\alpha} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ замкнутой геодезической α , а первая содержит предельное множество группы голономии $G_r \subset G$ геодезической поверхности S_r .

В качестве приложения построенных сгибающих деформаций мы дадим ответ на известный вопрос о группах каспов на границе пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(M)$ комплексного гиперболического пространства Штейна M , расслоенного над компактной римановой поверхностью рода $p > 1$. Этот ответ непосредственно следует из следующего результата, см. [AG]:

ТЕОРЕМА 7.11. Пусть $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$ – неэлементарная дискретная фундаментальная группа поверхности S_p рода $p \geq 2$. Тогда для всякой простой замкнутой геодезической α на поверхности $S = H_{\mathbb{R}}^2/G$ существует непрерывная деформация $\rho_t = f_t^*$, индуцированная G -эквивариантным квазиконформным гомеоморфизмом $f_t: \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2}$, чье предельное представление ρ_{∞} соответствует каспидальной граничной точке пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(G)$, т.е. в граничной группе $\rho_{\infty}(G)$ есть акцидентный параболический элемент $\rho_{\infty}(g_{\alpha})$, где $g_{\alpha} \in G$ отвечает геодезической $\alpha \subset S$.

Заметим, что в силу нашей конструкции в [AG] подобных непрерывных квазиконформных деформаций, они независимы друг от друга, если соответствующие геодезические $\alpha_i \subset S_p$ не пересекаются. Следовательно, на $\partial\mathcal{T}(G)$ существует граничная группа с “максимальным” набором попарно не сопряженных акцидентных параболических подгрупп:

СЛЕДСТВИЕ 7.12. Пусть $G \subset PO(2, 1) \subset PU(2, 1)$ – равномерная решетка, изоморфная фундаментальной группе замкнутой поверхности S_p рода $p \geq 2$. Тогда существует непрерывная деформация $R: \mathbb{R}^{3p-3} \rightarrow \mathcal{T}(G)$, граничная группа которой $G_{\infty} = R(\infty)(G)$ содержит $(3p-3)$ попарно не сопряженных акцидентных параболических подгрупп.

Наконец, упомянем еще один аспект “сюжетообразующей” задачи 4.12 о геометрической конечности комплексных гиперболических поверхностей (см. [AX1], [AX2]), где не исключена возможность использования наших комплексных изгибающих деформаций:

ЗАДАЧА. Построить геометрически бесконечную (но конечно порожденную) дискретную группу $G \subset PU(2, 1)$, чьим предельным множеством является вся бесконечно удаленная сфера $\Lambda(G) = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathcal{H}$ и которая является пределом выпуклых кокомпактных групп $G_i \subset PU(2, 1)$ из пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(G)$ выпуклой кокомпактной группы $\Gamma \subset PU(2, 1)$. Возможно ли такое для группы Шоттки Γ ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ah] Ahlfors L. V. Fundamental polyhedra and limit point sets of Kleinian groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1966. V. 55. P. 251–254.
- [A1] Apanasov B. Discrete groups in Space and Uniformization Problems // Math. and Appl. V. 40. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [A2] Apanasov B. Nontriviality of Teichmüller space for Kleinian group in space. Riemann Surfaces and Related Topics: Proc. 1978 Stony Brook Conference // Ann. of Math. Studies. V. 97 / ed. I. Kra and B. Maskit. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981. P. 21–31.
- [A3] Apanasov B. Geometrically finite hyperbolic structures on manifolds // Ann. of Glob. Analysis and Geom. 1983. V. 1. № 3. P. 1–22.
- [A4] Apanasov B. Thurston's bends and geometric deformations of conformal structures // Complex Analysis and Applications'85. Sofia: Publ. Bulgarian Acad. Sci., 1986. P. 14–28.
- [A5] Apanasov B. Nonstandard uniformized conformal structures on hyperbolic manifolds // Invent. Math. 1991. V. 105. P. 137–152.
- [A6] Apanasov B. Deformations of conformal structures on hyperbolic manifolds // J. Diff. Geom. 1992. V. 35. P. 1–20.
- [A7] Apanasov B. Canonical homeomorphisms in Heisenberg group induced by isomorphisms of discrete subgroups of $PU(n, 1)$ // Preprint, 1995; (to appear).
- [A8] Apanasov B. Quasiconformality and geometrical finiteness in Carnot–Carathéodory and negatively curved spaces // Geometry, Topology and Physics / ed. K. Uhlenbeck, a.o.. Berlin: W. de Gruyter, 1997. P. 25–44 (MSRI at Berkeley – <http://www.msri.org/MSRI-preprints/online/1996-019.html>) (to appear).
- [A9] Apanasov B. Conformal geometry of discrete groups and manifolds. Berlin: W. de Gruyter (to appear).
- [A10] Apanasov B. Bending deformations of complex hyperbolic surfaces // Preprint. Berkeley: Math. Sci. Res. Inst., 1996-062; (<http://www.msri.org/MSRI-preprints/online/1996-062.html>).
- [ACG] Apanasov B., Carneiro M., Gusevskii N. Some deformations of complex hyperbolic surfaces (to appear).
- [AG] Apanasov B., Gusevskii N. The boundary of Teichmüller space of complex hyperbolic surfaces (to appear).
- [AX1] Apanasov B., Xie X. Geometrically finite complex hyperbolic manifolds // Intern. J. Math. (to appear).
- [AX2] Apanasov B., Xie X. Manifolds of negative curvature and nilpotent groups // Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics (Proc. of the third Intern. Workshop at Varna) / ed. K. Sekigawa, S. Dimiev. Singapore: World Scientific, 1997 (to appear).
- [AT] Apanasov B., Tetenov A. Nontrivial cobordisms with geometrically finite hyperbolic structures // J. Diff. Geom. 1988. V. 28. P. 407–422.
- [BGS] Ballmann W., Gromov M., Schroeder V. Manifolds of Nonpositive Curvature. Boston: Birkhäuser, 1985.
- [BM] Beardon A. F., Maskit B. Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra // Acta Math. 1974. V. 132. P. 1–12.
- [Be] Belegarde I. Discrete surface groups actions with accidental parabolics on complex hyperbolic plane // Preprint: Univ. of Maryland.
- [BE] Bižaca Ž., Etnyre J. Smooth structures on collarable ends of 4-manifolds // Preprint, 1996.
- [Bor] Borel A. Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces // Topol. 1962. V. 2. P. 111–122.
- [Bow] Bowditch B. Geometrical finiteness with variable negative curvature // Duke J. Math. 1995. V. 77. P. 229–274.
- [Br] Brown M. The monotone union of open n -cells is an open n -cell // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 812–814.

- [BS] Burns D., Shnider S. Spherical hypersurfaces in complex manifolds // *Inv. Math.* 1976. V. 33. P. 223–246.
- [BuM] Burns D., Mazzeo R. On the geometry of cusps for $SU(n, 1)$ // Preprint: Univ. of Michigan, 1994.
- [BK] Buser P., Karcher H. Gromov's almost flat manifolds // *Asterisque*. 1981. V. 81. P. 1–148.
- [Can] Cannon J. W. The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups // *Geom. Dedicata*. 1984. V. 16. P. 123–148.
- [Car] Cartan É. Sur le groupe de la géométrie hypersphérique // *Comm. Math. Helv.* 1932. V. 4. P. 158.
- [CG] Chen S., Greenberg L. Hyperbolic spaces // *Contributions to Analysis*. New York: Academic Press, 1974. P. 49–87.
- [Co1] Corlette K. Hausdorff dimensions of limit sets // *Invent. Math.* 1990. V. 102. P. 521–542.
- [Co2] Corlette K. Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry // *Ann. of Math.* 1992. V. 135. P. 165–182.
- [Cy] Cygan J. Wiener's test for Brownian motion on the Heisenberg group // *Colloquium Math.* 1978. V. 39. P. 367–373.
- [EMM] Epstein C., Melrose R., Mendoza G. Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains // *Acta Math.* 1991. V. 167. P. 1–106.
- [F] Filipkiewicz R. P. Four-dimensional geometries // Ph.D. Thesis. Univ. of Warwick, 1984.
- [FG] Falbel E., Gusevskii N. Spherical CR -manifolds of dimension 3 // *Bol. Soc. Bras. Mat.* 1994. V. 25. P. 31–56.
- [FS1] Fintushel R., Stern R. Homotopy $K3$ surfaces containing $\Sigma(2, 3, 7)$ // *J. Diff. Geom.* 1991. V. 34. P. 255–265.
- [FS2] Fintushel R., Stern R. Using Floer's exact triangle to compute Donaldson invariants. The Floer memorial volume // *Progr. Math.* V. 133. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 435–444.
- [FS3] Fintushel R., Stern R. Surgery in cusp neighborhoods and the geography of irreducible 4-manifolds // *Invent. Math.* 1994. V. 117. P. 455–523.
- [FT] Freedman M. H., Taylor L. Λ -splitting 4-manifolds // *Topology*. 1977. V. 16. P. 181–184.
- [Go1] Goldman W. Representations of fundamental groups of surfaces. *Geometry and Topology* // *Lect. Notes Math.* V. 1167, 1985. P. 95–117.
- [Go2] Goldman W. Geometric structures on manifolds and varieties of representations. *Geometry of Group Representations* // *Contemp. Math.* V. 74, 1988. P. 169–198.
- [Go3] Goldman W. Complex hyperbolic Kleinian groups. *Complex geometry and related topics, LNM* // *Lect. Notes Math.* 1991. P. 31–52.
- [Go4] Goldman W. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford: Oxford Univ. Press (to appear).
- [GKL] Goldman W., Kapovich M., Leeb B. Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface // Preprint, 1995.
- [GM] Goldman W., Millson J. Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space // *Invent. Math.* 1987. V. 88. P. 495–520.
- [GP1] Goldman W., Parker J. Dirichlet polyhedron for dihedral groups acting on complex hyperbolic space // *J. Geom. Analysis*. 1992. V. 2. №6. P. 517–554.
- [GP2] Goldman W., Parker J. Complex hyperbolic ideal triangle groups // *J. Reine Angew. Math.* 1992. V. 425. P. 71–86.
- [Gr] Gromov M. Almost flat manifolds // *J. Diff. Geom.* 1978. V. 13. P. 231–241.
- [Gu] Gusevskii N. Colloquium talk: Univ. of Oklahoma, Norman, 1995.
- [HI] Heintze E., Hof H.-C. I. Geometry of horospheres // *J. Diff. Geom.* 1977. V. 12. P. 481–491.
- [JM] Johnson D., Millson J. Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds // *Discrete Groups in Geometry and Analysis*. Boston: Birkhäuser, 1987. P. 48–106.
- [Kob] Kobayashi Sh. *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*. New York: Dekker, 1970.

- [KR] Koranyi A., Reimann M. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
- [Ko] Kourouniotis Ch. Deformations of hyperbolic structures // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1985. V. 98. P. 247–261.
- [KAG] Krushkal' S., Apanasov B., Gusevskii N. Kleinian groups and uniformization in examples and problems // Trans. Math. Mono. V. 62. Providence: Amer. Math. Soc., 1986, 1992.
- [LB] LeBrun C. Einstein metrics and Mostow rigidity // Preprint: Stony Brook, 1994.
- [Lo] Looijenga E. The smoothing components of a triangle singularity // Proc. Symp. Pure Math. 1983. V. 40. P. 173–184.
- [Mar] Marden A. The geometry of finitely generated Kleinian groups // Ann. of Math. 1974. V. 99. P. 383–462.
- [MG1] Margulis G. Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature // Amer. Math. Soc. Translations. 1977. V. 109. P. 33–45.
- [MG2] Margulis G. Free properly discontinuous groups of affine transformations // Dokl. Acad. Sci. USSR. 1983. V. 272. P. 937–940.
- [Mat] Matveyev R. A decomposition of smooth simply-connected h -cobordant 4-manifolds // Preprint: Michigan State Univ. at E. Lansing, 1995.
- [Mil] Milnor J. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$. Knots, groups and 3-manifolds // Ann. of Math. Studies. V. 84. Princeton: Princeton Univ. Press, 1975. P. 175–225.
- [Min] Miner R. Quasiconformal equivalence of spherical CR manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1994. V. 19. P. 83–93.
- [Mo1] Mostow G.D. Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1973.
- [Mo2] Mostow G.D. On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space // Pacific J. Math. 1980. V. 86. P. 171–276.
- [My] Myers R. Homology cobordisms, link concordances, and hyperbolic 3-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. P. 271–288.
- [NR1] Napier T., Ramachandran M. Structure theorems for complete Kähler manifolds and applications to Lefschetz type theorems // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5. P. 807–851.
- [NR2] Napier T., Ramachandran M. The $L^2 \bar{\partial}$ -method, weak Lefschetz theorems, and topology of Kähler manifolds // Preprint, 1996.
- [P] Pansu P. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
- [Pr1] Parker J. Shimizu's lemma for complex hyperbolic space // Intern. J. Math. 1992. V. 3. № 2. P. 291–308.
- [Pr2] Parker J. Private communication, 1995.
- [Ph] Phillips M.B. Dirichlet polyhedra for cyclic groups in complex hyperbolic space // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115. P. 221–228.
- [RV] Raymond F., Vasquez A.T. 3-manifolds whose universal coverings are Lie groups // Topology Appl. 1981. V. 12. P. 161–179.
- [Sa] Saveliev N. Floer homology and 3-manifold invariants // Thesis. Univ. of Oklahoma at Norman, 1995.
- [Su1] Sullivan D.P. Discrete conformal groups and measurable dynamics // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 57–73.
- [Su2] Sullivan D.P. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics, II: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups // Acta Math. 1985. V. 155. P. 243–260.
- [T1] Tetenov A. Infinitely generated Kleinian groups in space // Siberian Math. J. 1980. V. 21. P. 709–717.
- [T2] Tetenov A. The discontinuity set for a Kleinian group and topology of its Kleinian manifold // Intern. J. Math. 1993. V. 4. № 1. P. 167–177.
- [Th] Thurston W. The geometry and topology of three-manifolds // Lect. Notes. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.

- [To] Toledo D. Representations of surface groups on complex hyperbolic space // J. Diff. Geom. 1989. V. 29. P. 125–133.
- [Tu] Tukia P. On isomorphisms of geometrically finite Kleinian groups // Publ. Math. IHES. 1985. V. 61. P. 171–214.
- [V] Vodopyanov S. K. Quasiconformal mappings on Carnot groups // Russian Dokl. Math. 1996. V. 347. P. 439–442.
- [Wa] Wall C. T. C. Geometric structures on compact complex analytic surfaces // Topology. 1986. V. 25. P. 119–153.
- [We] Weil A. Remarks on the cohomology of groups // Ann. of Math. 1964. V. 80. P. 149–157.
- [Wi] Witten E. Monopoles and four-manifolds // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 769–796.
- [Wo] Wolf J. A. Spaces of constant curvature. Berkeley: Publ. or Perish, 1977.
- [Ya] Yau S. T. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry // Proc. Nat. Acad. Sci. 1977. V. 74. P. 1798–1799.
- [Yu1] Yue Ch. Dimension and rigidity of quasi-Fuchsian representations // Ann. of Math. 1996. V. 143. P. 331–355.
- [Yu2] Yue Ch. Mostow rigidity of rank 1 discrete groups with ergodic Bowen–Margulis measure // Invent. Math. 1996. V. 125. P. 75–102.
- [Yu3] Yue Ch. Private communication. Norman/OK, 1996.

University of Oklahoma, Norman, OK 73019;
630090 Новосибирск, Институт математики им. Соболева РАН
Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA 94720-5070
E-mail: Apanasov@ou.edu

Поступила в редакцию
19.06.1997