Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Архангельский, Некоторые последние достижения и открытые проблемы
в общей топологии, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 5, 45–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:46:35

УДК 515.1

НЕКОТОРЫЕ ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ
И ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Свойства, связанные с метризуемостью	45
§ 2. Отображения, уплотнения и произведения	51
§ 3. Некоторые результаты и открытые вопросы в C_p -теории	60
Список литературы	67

В последние 5–7 лет мы были свидетелями многих впечатляющих достижений в общей топологии. Появились новые имена и идеи. Я не пытаюсь представить здесь подробный обзор главных достижений. Напротив, я выбрал только те из них, которые по тем или иным причинам наиболее близки мне. Одни из них связаны с проблемами, интересовавшими меня в течение длительного периода, другие являются ответами на вопросы, поставленные мной, некоторые решены моими учениками, третьи связаны с понятиями и направлениями, волнующими меня в настоящее время. Таким образом, предлагаемый обзор носит весьма субъективный характер. В нем затрагивается следующий круг вопросов и понятий: свойства, естественно возникающие из метризуемости (или классы пространств, обобщающие класс всех метризуемых пространств); свойства типа компактности (включая разного рода обобщения линделефовости и вариации на тему кардинальных инвариантов); непрерывные отображения, уплотнения и произведения (в частности, фундаментальный вопрос: как свойства топологии могут быть улучшены с помощью уплотнений); топология поточечной сходимости на пространстве функций. Как всегда, интерес к результатам в значительной мере связан с желанием выявить наиболее интересные нерешенные проблемы в рассматриваемом направлении. Формулируется много вопросов, и среди них новые.

§ 1. Свойства, связанные с метризуемостью

В 1951 году в своей классической статье о метризации [29] Р. Бинг не только предложил знаменитое решение метризационной проблемы, но также выделил несколько новых важных свойств метризуемых пространств, которым суждено было сыграть неопенимую роль в дальнейшем развитии общей топологии.

К числу этих свойств относятся коллективная нормальность и просеянность. Я опускаю хорошо известное определение коллективной нормальности. Пространство X является *просеянным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать

σ -дизъюнктное открытое покрытие. Ясно, что каждое просеянное пространство является металинделефовым, т.е. в каждое открытое покрытие этого пространства можно вписать точечно счетное открытое покрытие. Одним из первых результатов в этом направлении был результат К. Нагами [64], утверждающий, что каждое счетно паракомпактное нормальное просеянное пространство паракомпактно. В своей статье [64] Нагами поставил интересную и сложную проблему: каждое ли просеянное нормальное пространство паракомпактно? Этот вопрос оказал влияние на многих топологов, изучавших обобщенную паракомпактность и свойства типа метризуемости, особенно в России, США и Японии.

Первый существенный шаг к решению проблемы Нагами был сделан М.Е. Рудин [77] в 1983 году. Она показала, что совместно считать, что ответ отрицателен (например, это так при $V = L$). Ее конструкция была (как обычно) сложна, что и не удивительно, поскольку любой контрпример к проблеме Нагами должен быть пространством Даукера, т.е. нормальным пространством, произведение которого на отрезок числовой прямой не нормально.

Золтан Балог решил эту проблему в ZFC , доказав следующую замечательную теорему [25].

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует не паракомпактное нормальное просеянное пространство.*

Заметьте, что таким образом Балог построил пространство Даукера с дополнительным сильным свойством типа паракомпактности: просеянностью.

Тем не менее, история с проблемой Нагами еще далека от завершения. После доказательства фундаментальной метризации теоремы стандартной стратегией стало введение обобщенных свойств метризуемости (т.е. классов пространств, более общих, чем класс метризуемых пространств) посредством требования, чтобы пространство обладало базой, удовлетворяющей определенным ограничениям (с естественным условием, что такой базой должно обладать и каждое метризуемое пространство). Примерами являются: пространства с точечно счетной базой; пространства с равномерной базой; пространства с регулярной базой, пространства с базой счетного порядка и т.д. Так как Бинг охарактеризовал метризуемые пространства как регулярные пространства с σ -дискретной базой, то естественно рассмотреть пространства с σ -дизъюнктной базой. Очевидно, каждое пространство с σ -дизъюнктной базой является просеянным. Известно также, что не каждое тихоновское пространство с σ -дизъюнктной базой метризуемо [45]. Следующий вопрос звучит особенно естественно после результатов Бинга и Балоба.

ВОПРОС 1.2. *Существует ли в ZFC не паракомпактное нормальное пространство с σ -дизъюнктной базой?*

Как заметил С. Ватсон в [88], этот вопрос остается “абсолютно открытым”. З. Балог поставил в [25] следующий вопрос.

ВОПРОС 1.3. *Существует ли не паракомпактное нормальное просеянное пространство с первой аксиомой счетности?*

Балог также отметил, что из его результата и результата М.Е. Рудин следует, что в ZFC существует нормальное просеянное пространство, не являющееся коллективно нормальным. Каждое пространство с σ -дизъюнктной базой удовлетворяет первой

аксиоме счетности, тогда как просеянные пространства не обязаны быть таковыми. Ф. Толл заметил [84], что именно первая аксиома счетности не позволяет построить в ZFC пример нормального пространства с σ -дизъюнктивной базой, не являющегося коллективно нормальным (конечно, если не стремиться доказать несовместимость существования сильно компактных кардиналов). Однако, это не снимает следующий ZFC -вопрос (см. [84] и [88]):

ВОПРОС 1.4. *Верно ли в ZFC , что каждое нормальное пространство с σ -дизъюнктивной базой является коллективно нормальным?*

Другим значительным продвижением в теории паракомпактности и коллективной нормальности является решение Г. Грюнхаге и П. Кошмидером проблемы, известной как проблема Архангельского–Толла [46]. Дадим краткую историю этого вопроса.

В 1971 году Архангельский опубликовал работу [3] со следующим результатом: каждое совершенно нормальное, локально компактное, метакompактное пространство паракомпактно. В действительности же эта теорема была доказана значительно раньше, но опубликована она была только после Третьей Пражской конференции 1971 года, на которой в своем докладе Ф. Толл поставил вопрос об истинности этого утверждения. Этот результат настраивает на следующий вопрос (см. [20] и [84]): каждое ли нормальное, локально компактное, метакompактное пространство паракомпактно?

Напомним, что пространство метакompактно, если в каждое его открытое покрытие можно вписать точечно конечное открытое покрытие. Бинг показал [29], что каждое коллективно нормальное метакompактное пространство паракомпактно. Поэтому наша проблема тесно связана со следующим вопросом: каждое ли локально компактное нормальное пространство коллективно нормально?

Первый результат в этом направлении был получен Ватсоном [89] в 1982 году. Он показал, что при $V = L$ каждое локально компактное нормальное метакompактное пространство является паракомпактным. Позднее Балог показал, что совместимо считать, что любое локально компактное нормальное пространство коллективно нормально [26]. При дополнительных теоретико-множественных предположениях существует множество обобщений этих замечательных результатов. Однако главный вопрос – верна ли теорема Ватсона в ZFC – оставался открытым, пока совсем недавно Г. Грюнхаге и П. Кошмидер не показали следующее:

ТЕОРЕМА 1.5 [46]. *Совместимо с ZFC считать, что существует нормальное локально компактное метакompактное пространство, не являющееся паракомпактным.*

Следует отметить, что первый совместимый пример нормального локально компактного металинделева пространства, не являющегося паракомпактом, был построен Ватсоном (см. [88]). С другой стороны, отвечая на вопрос Ватсона, Г. Грюнхаге и П. Кошмидер доказали следующее утверждение [47].

ТЕОРЕМА 1.6. *При $(MA + \neg CH)$ каждое нормальное локально компактное металинделево пространство паракомпактно.*

Следующий вопрос, связанный с вышеупомянутыми результатами З. Балого, Г. Грюнхаге и П. Кошмидера, насколько мне известно, остается все еще нерешенным:

ВОПРОС 1.7. *Существует ли в ZFC совершенно нормальное локально компактное пространство, которое не паракомпактно?*

Обсуждение некоторых результатов, относящихся к данному вопросу, можно найти в [88]. Свойство типа паракомпактности, металинделевовости, фигурирующее в теореме 3 и в предыдущем параграфе, обеспечивается существованием точечно счетной базы в пространстве. Класс пространств с точечно счетной базой является одним из наиболее естественных расширений класса всех метризуемых пространств. Многие замечательные теоремы связаны с этим классом. В частности, каждое регулярное счетно компактное пространство с точечно счетной базой метризуемо и в действительности обладает счетной базой [45]; а каждое регулярное симметризуемое пространство с точечно счетной базой обладает измельчением [49]. Из теоремы Мищенко и классического результата Александрова о том, что каждое регулярное пространство, допускающее точечно счетное открытое покрытие сепарабельными метризуемыми пространствами, само метризуемо [20], следует, что каждое локально компактное хаусдорфово пространство с точечно счетной базой метризуемо. Этим результатам противостоит красивый пример (см. [38]) полного по Чеху пространства с точечно счетной базой, не обладающего измельчением (и, следовательно, неметризуемого). С другой стороны, знаменитый пример Шахматова [81] показывает, что псевдокомпактное пространство с точечно счетной базой не обязано быть метризуемым. Интересно, можно ли соединить эти два примера в один.

ВОПРОС 1.8. *Каждое ли полное по Чеху псевдокомпактное пространство с точечно счетной базой метризуемо?*

Другой интересный пример, а именно, пример неметризуемого псевдокомпактного пространства с диагональю типа G_δ (пространство Ψ Мрувки, [45]), приводит к следующему вопросу:

ВОПРОС 1.9. *Существует ли псевдокомпактное пространство X с диагональю G_δ , которое обладает точечно счетной базой, но не имеет измельчения? Не является метризуемым?*

Хотя последние два вопроса довольно естественны, по всей видимости они новы.

Давняя и очень деликатная проблема, касающаяся нормальности и даукеровских пространств, связана с обобщением свойства Линделефа – линейной линделевовостью. Пространство X *линейно линделефово*, если из каждой цепи открытых множеств, покрывающей все X , можно выбрать счетное подпокрытие. Напомним, семейство множеств называется цепью, если для любых двух его элементов одно непременно является подмножеством другого. Исходной работой в этом направлении является статья А. С. Мищенко [62], где построен первый пример тихоновского линейно линделефова пространства, которое не линделефово. В своей работе Мищенко пользовался другой терминологией, берущей начало в классическом трактате П. С. Александрова и П. С. Урысона о компактности [2]. Отметим, что пространство X линейно линделефово, если и только если для каждого несчетного подмножества A пространства X регулярной мощности найдется точка полного накопления в X . Удивительно, что линделевовость не может быть охарактеризована в терминах точек полного накопления, как в случае компактности. Можно, видимо, поспорить, какое обобщение компактности на счетный случай является более “правильным”, – линделевовость

или линейная линделефовость? Пример Мищенко не является нормальным, а потому в этом споре целесообразней отдать предпочтение линделефовым пространствам. Теперь естественно спросить (см. [62] и [78]):

Вопрос 1.10. *Всегда ли нормальное линейно линделефово пространство линделефово?*

Этот вопрос на сегодняшний день остается нерешенным (несмотря на то, что Мэри Э. Рудин более тридцати лет назад серьезно интересовалась этой проблемой (см. ее комментарии в [78])). Следующий результат показывает, насколько интересен и тонок этот вопрос (см. [62]): каждое счетно паракомпактное линейно линделефово пространство является линделефовым. Таким образом, построение нормального линейно линделефова не линделефова пространства будет означать существование пространства Даукера с особенно хорошими свойствами!

Перейдем теперь к некоторым другим интересным проблемам в теории линейно линделефовых пространств. Рассмотрим пример линейно линделефова не линделефова пространства, построенного независимо Г. Грюнхаге и Р. Бузяковой. Пусть D – дискретное пространство $\{0, 1\}$. Зафиксируем множество A мощности $\aleph_\omega$ и возьмем подпространство H произведения D^A , состоящее из характеристических функций всех подмножеств множества A мощности меньшей $\aleph_\omega$. Подпространство пространства H , состоящее из характеристических функций всех подмножеств множества A мощности не большей, чем $\aleph_n$, где $n < \omega$, обозначим через H_n . Пространство H содержит всюду плотное счетно компактное подпространство (например, H_0) и потому является псевдокомпактным. Также, если B – несчетное подмножество пространства H регулярной мощности, то существует подмножество C множества B той же мощности такое, что замыкание C в H компактно (это влечет существование в пространстве H точки полного накопления для множества B). Чтобы убедиться в истинности последнего утверждения, достаточно заметить, что пространство H является объединением подпространств $H_n, n \in \omega$, и что в каждом H_n множества мощности не больше чем $\aleph_n$ имеют компактное замыкание. Данное свойство пространства H означает, что H – линейно линделефово. Так как H псевдокомпактно и не компактно (заметьте, что H всюду плотно и не замкнуто в компакте D^A), то оно не линделефово. Ясно, что H тихоновское пространство. Я думаю, что этот пример превосходит пример Мищенко во всех отношениях, за исключением одного – пример Мищенко является первым.

Теперь, когда мы знаем, насколько хорошо пространство H , не менее интересно перечислить те свойства, которыми пространство H не обладает. Конечно, пространство H не счетно паракомпактно (иначе оно было бы линделефовым). В частности, оно не счетно компактно (очевидно, каждое линейно линделефово счетно компактное пространство является линделефовым и даже компактным). Далее, H – не вещественно компактно, поскольку каждое вещественно компактное псевдокомпактное пространство компактно [45]. Поскольку H всюду плотно в D^A , то характер в каждой точке пространства H равен $\aleph_\omega$. Следовательно, H не удовлетворяет первой аксиоме счетности. Эти наблюдения заставляют нас искать линейно линделефово (но все еще не линделефово) пространство с определенными дополнительными свойствами.

Вопрос 1.11. *Существует ли линейно линделефово (регулярное, тихоновское) пространство с первой аксиомой счетности, не являющееся линделефовым?*

ВОПРОС 1.12. *Существует ли тихоновское пространство счетной тесноты, которое линейно линделефово, но не линделефово?*

Следующий вопрос мотивирован вопросом 1.11 и известным результатом о мощности линделефовых пространств с первой аксиомой счетности.

ВОПРОС 1.13. *Верно ли, что мощность каждого линейно линделефова регулярного (хаусдорфова) пространства с первой аксиомой счетности не превосходит 2^ω ?*

Хорошо известно, что каждое регулярное линделефово пространство является тихоновским.

ВОПРОС 1.14. *Каждое ли регулярное линейно линделефово пространство является тихоновским?*

Какова роль псевдокомпактности в теории линейно линделефовых пространств? Например, известно, что каждое тихоновское пространство гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству псевдокомпактного пространства. Мы вправе спросить:

ВОПРОС 1.15. *Каждое ли тихоновское линейно линделефово пространство гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству некоторого псевдокомпактного линейно линделефова пространства?*

ВОПРОС 1.16. *Каждое ли вещественно компактное линейно линделефово пространство линделефово?*

ВОПРОС 1.17. *Существует ли пример локально компактного хаусдорфова линейно линделефова пространства, которое не линделефово?*

Любопытный подкласс класса линейно линделефовых пространств был определен в [15]. Пространство X называется *строго дискретно линделефовым*, если замыкание каждого его дискретного подпространства во всем пространстве является линделефовым. В [15] было показано (хотя не сформулировано), что каждое строго дискретное линделефово пространство является линейно линделефовым. Следовательно, каждое счетно паракомпактное строго дискретно линделефово пространство является линделефовым. Однако, следующий вопрос остается открытым:

ВОПРОС 1.18. *Каждое ли регулярное строго дискретно линделефово пространство является линделефовым? Тихоновским?*

Заметьте, пространство Бузяковой и Грюнхаге не является строго дискретно линделефовым.

ВОПРОС 1.19. *Каждое ли псевдокомпактное строго дискретно линделефово пространство компактно?*

Возможно, чтобы ответить на некоторые из последних вопросов, нужно глубже изучить пространство Бузяковой и Грюнхаге и выяснить, например, содержит ли оно замкнутое подпространство, которое вещественно компактно, но не компактно.

Я думаю, что все эти вопросы (как мне кажется новые) очень интересны, хотя некоторые из них, возможно, окажутся проще других.

§ 2. Отображения, уплотнения и произведения

Одним из основных направлений в теории непрерывных отображений является изучение связей между классами топологических пространств в терминах отображений, удовлетворяющих определенным ограничениям. Недавно был достигнут значительный прогресс в одной из серьезных проблем этого направления, поставленной Я. Никелем [65]:

ВОПРОС 2.1. *Каждый ли монотонно нормальный компакт является непрерывным образом линейно упорядоченного компакта?*

Мэри Э. Рудин дала (сложное) решение этой проблемы в сепарабельном случае [79]:

ТЕОРЕМА 2.2. *Каждый сепарабельный монотонно нормальный компакт является непрерывным образом линейно упорядоченного компакта.*

Этот результат имеет интересное применение в C_p -теории (см. § 3). Теорема 2.2 позволяет надеяться, что ответ на вопрос Никеля в общем случае будет тоже положительным.

Важное расширение класса сепарабельных метризуемых пространств составляют пространства со счетной сетью. Они могут быть охарактеризованы как непрерывные образы сепарабельных метризуемых пространств.

Вскоре после выделения пространств со счетной сетью, в начале 60-х годов, я поставил очень естественный вопрос: можно ли известную теорему Гуревича–Тумаркина, утверждающую, что три классические размерности совпадают для всех сепарабельных метризуемых пространств [45], обобщить на класс всех регулярных пространств со счетной сетью?

Эта проблема долгое время не поддавалась решению. Наконец, спустя сорок лет, Г. Делистатис и С. Ватсон получили результат о совместимости [41]. Они доказали следующее:

ТЕОРЕМА 2.3. *При (СН) существует регулярное пространство со счетной сетью X такое, что $\dim(X) = 1$ и $\text{ind}(X) = \text{Ind}(X) \geq 2$.*

Отметим, что каждое регулярное пространство со счетной сетью наследственно линделефово и, следовательно, наследственно нормально.

Несмотря на внушительное достижение Г. Делистатиса и С. Ватсона, ряд важных вопросов, вытекающих из первоначального вопроса, остаются открытыми.

ВОПРОС 2.4. *Существует ли в ZFC пример регулярного пространства со счетной сетью такого, что $\dim(X) < \text{ind}(X)$?*

Важным подклассом класса всех пространств со счетной сетью является класс всех регулярных фактор-пространств сепарабельных метризуемых пространств. Я предлагаю называть такие пространства *пространствами Майкла*, так как он внес огромный вклад в их изучение и показал их важность (см. [20]).

ВОПРОС 2.5. *Верно ли, что все три классические размерности совпадают на классе всех регулярных фактор-пространств сепарабельных метризуемых пространств, т.е. на классе пространств Майкла?*

Другой интересный вопрос в этом направлении был сформулирован Г. Делистатисом и С. Ватсоном [41]:

Вопрос 2.6. Пусть X – регулярное пространство, являющееся объединением счетного числа сепарабельных метризуемых пространств. Верно ли, что тогда все три классические размерности совпадают на X ?

Также остается неясным, насколько велик может быть разрыв между размерностями в случае пространств со счетной сетью.

Теперь перейдем к теме уплотнений.

Как правило, когда устанавливаются связи между классами пространств, мы пытаемся представить пространства более общего типа, как образы “хороших” пространств или пространств с какой-либо особенной структурой, отсутствующей в образе. Как мы сейчас увидим, идеология, стоящая за уплотнениями, имеет другое направление. Возьмем, например, пространство со счетной сетью. Нетрудно показать, что любое такое пространство можно непрерывно и взаимно однозначно отобразить на сепарабельное метризуемое пространство [20]. Действительно, каждое регулярное линделефово пространство с диагональю типа G_δ допускает непрерывное взаимнооднозначное отображение на сепарабельное метризуемое пространство [45]. Краткости ради непрерывные взаимнооднозначные отображения будем называть *уплотнениями*. Отмеченный выше факт показывает, что при определенных условиях свойства пространства могут быть улучшены с помощью уплотнений, т.е. при переходе к более слабой топологии. Это и является главной причиной нашего интереса к уплотнениям.

Какие свойства мы хотим улучшить с помощью уплотнений? Конечно, вполне неопределенный ответ может быть “почти все”. Однако, мы же не собираемся делать пространство более дискретным с помощью уплотнений. А поэтому наиболее разумный ответ на этот вопрос я полагаю следующий: попытаться сделать пространство более компактным. Такой подход вполне оправдан, так как свойства типа компактности могут быть только улучшены с помощью уплотнений – нельзя потерять степень компактности, которой пространство уже обладает.

П. С. Александров одним из первых сформулировал первый конкретный вопрос в этом направлении (на своем семинаре по общей топологии в Москве, в тридцатые годы):

Вопрос 2.7. Когда хаусдорфово пространство X допускает уплотнение на хаусдорфово компактное пространство?

Тот же вопрос, но в более слабой форме, был поставлен С. Банахом [28]: когда метризуемое пространство можно уплотнить на метризуемый компакт? Этот вопрос не тривиален даже в классе сепарабельных метризуемых пространств. Конечно, пространство $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не уплотняется ни на какое компактное хаусдорфово пространство, так как не существует бесконечного счетного плотного в себе компактного хаусдорфова пространства.

Исследования, проведенные в направлении вопроса 2.7, не принесли много действительно общих результатов. Однако, получены очень интересные примеры. Так как подробных обзоров по уплотнениям нет, я сначала приведу некоторые старые результаты.

Е. Г. Пяткеев показал в [74], что если X – 0-мерное пространство (в смысле покрытий), метризуемое полной метрикой, то существуют два уплотнения пространства X на компактные хаусдорфовы пространства Y и Z такие, что диагональное произведение этих уплотнений является гомеоморфизмом пространства X на подпространство

произведения $Y \times Z$. (См. также [55].) Давний результат И. Л. Раухваргер утверждает, что если X – подпространство метризуемого компакта B такого, что $B \setminus X$ счетно, то X уплотняется на некоторый (метризуемый) компакт. В. А. Рохлин построил следующий пример сепарабельного пространства, метризуемого полной метрикой, не уплотняющегося ни на какое компактное хаусдорфово пространство. Возьмем произведение счетного компакта, в котором только одна точка не изолирована, и замкнутого единичного интервала и из произведения удалим предельный интервал без концевых точек, т.е. удалим множество $\{(a, y) : 0 < y < 1\}$. В результате мы получим нужное нам пространство X . Первый пример такого рода был указан Серпинским в 1923 году.

М. Г. Катетов решил проблему Банаха для случая счетных пространств [52]: счетное регулярное пространство X уплотняется на компактное хаусдорфово пространство, если и только если X разрежено.

Пыткеев показал, что результат Раухваргер не допускает обобщения на случай компактов с первой аксиомой счетности: существуют хаусдорфово компактное пространство B с первой аксиомой счетности и его подпространство X такие, что $B \setminus X$ счетно, и тем не менее X не уплотняется ни на какое хаусдорфово компактное пространство [75].

Некоторые ссылки на давние результаты по уплотнениям и краткий обзор этих результатов можно найти в [75], [20], [63]. Складывается впечатление, что вопрос 2.7 Александра скорее всего не имеет общего решения. Поэтому разумно разбить его на менее общие вопросы. Как шаг в этом направлении, я предлагаю следующую задачу (которая может также оказаться слишком общей или неопределенной):

ВОПРОС 2.8. *Каково наилучшее свойство типа компактности $\mathcal{P}$ такое, что каждое тихоновское (хаусдорфово) пространство уплотняется на тихоновское (хаусдорфово) пространство с этим свойством?*

В [5] я выдвинул гипотезу в этом направлении: что каждое тихоновское пространство уплотняется либо на линделефово тихоновское пространство, либо на псевдокомпактное пространство. Однако В. В. Ткачук показал [85], что это не верно. С другой стороны, Яшенко установил, что если вес тихоновского пространства X не превосходит 2^ω , то X либо псевдокомпактно, либо уплотняется на сепарабельное тихоновское пространство.

Также вполне разумно спросить, когда пространство является субметризуемым, т.е. имеет более слабую метризуемую топологию. Следующий факт можно считать частью фольклора: если псевдокомпактное пространство субметризуемо, то оно метризуемо (и конечно, компактно). Этот результат хорошо согласуется с известной теоремой Й. Хабера: каждое счетно компактное хаусдорфово пространство с диагональю типа G_δ метризуемо [45]. Следует отметить, что не каждое псевдокомпактное хаусдорфово пространство с диагональю типа G_δ метризуемо [82]. С другой стороны, диагональ G_δ как свойство очень близко к субметризуемости (и является необходимым условием для этого); действительно, результат о линделефовых пространствах с диагональю G_δ может быть обобщен следующим образом: каждое паракомпактное пространство с диагональю G_δ субметризуемо [45]. Это влечет, что все кружевные пространства (и следовательно, все пространства Лашнева) субметризуемы [20].

Д. Берк построил локально компактное хаусдорфово пространство с диагональю G_δ , которое не субметризуемо (даже не обладает измельчением) в классе регулярных пространств [31]. Эта серия результатов о субметризуемости достигла вершины в не-

давно вышедшей работе ван Дауэна (которая в виде препринта начала циркулировать более пятнадцати лет назад) [43]:

ТЕОРЕМА 2.9. *Существует коллективно нормальное локально компактное субметризуемое пространство X со счетным экстендом, которое не обладает измельчением (и следовательно, не металинделефово).*

Напомним, что экстенд пространства X счетен, если каждое замкнутое дискретное подпространство пространства X счетно.

Некоторые новые сильные результаты по уплотнениям связаны с поведением топологических свойств в произведениях. Хорошо известно, что многие классические топологические свойства не сохраняются в произведениях, даже когда сомножителей только два. Перечень таких свойств включает, например, нормальность, паракомпактность, счетную тесноту. Естественно спросить: всегда ли можно восстановить утраченные свойства произведений с помощью уплотнений? В частности, всегда ли произведение двух линделефовых пространств можно уплотнить на линделефово пространство (в классе регулярных пространств)? Я формулировал эти и подобные вопросы о нормальных пространствах, паракомпактах, счетно компактных пространствах на различных семинарах и конференциях в течение ряда лет. И, наконец, Р. Бузякова преуспела в этом направлении с серией тонких примеров, решающих большинство из этих вопросов негативно. Вот некоторые из ее результатов.

ТЕОРЕМА 2.10 [33]. *Существует регулярное линделефово пространство X , квадрат которого не уплотняется ни на какое нормальное пространство.*

Теорема 2.10 также отвечает отрицательно на вопрос И. Яценко: всегда ли вещественно компактное пространство можно уплотнить на линделефово пространство? Интересно сравнить теорему 2.10 со следующим результатом О. Павлова [71]:

ТЕОРЕМА 2.11. *Для каждого не псевдокомпактного пространства X мощности, меньшей первого сильно недостижимого кардинала, найдется кардинал τ такой, что X^τ уплотняется на регулярное линделефово пространство.*

В частности, и для пространства, построенного Бузяковой (см. теорему 2.10), найдется кардинал $\tau > 2$ такой, что X^τ уплотняется на регулярное линделефово пространство. Мы имеем также такие следствия из теоремы 2.11:

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Для каждого регулярного метакompактного пространства X найдется кардинал τ такой, что X^τ уплотняется на регулярное линделефово пространство.*

Чтобы вывести это из теоремы 2.11, достаточно заметить, что метакompактное пространство всегда либо компактно, либо не псевдокомпактно (см. [45]). Аналогично доказывается

СЛЕДСТВИЕ 2.13. *Для каждого вещественно компактного пространства X найдется кардинал τ такой, что X^τ уплотняется на регулярное линделефово пространство.*

Теорему 2.11, в свою очередь, нужно сравнить со следующим результатом Бузяковой и вопросом, поставленным ею:

ТЕОРЕМА 2.14. *Для каждого тихоновского пространства X неизмеримой мощности найдется кардинал τ такой, что X^τ уплотняется на псевдокомпактное пространство.*

ВОПРОС 2.15. *Пусть X любое не псевдокомпактное тихоновское пространство. Верно ли, что для некоторого кардинала τ X^τ уплотняется на компактное хаусдорфово пространство?*

Я думаю, что теоремы 2.11 и 2.14 являются важными продвижениями в направлении вопроса Александра 2.7.

Следующий результат Бузяковой [37] показывает, что у некоторых классических результатов могут быть интересные двойники в теории уплотнений.

ТЕОРЕМА 2.16. *Псевдокомпактное пространство X уплотняется на компакт в том и только том случае, если пространство $X \times (\tau + 1)$, где τ — первый ординал мощности, большей мощности стоун-чеховского расширения пространства X , уплотняется на нормальное пространство.*

Этот результат стоит сравнить с хорошо известной теоремой Тамано [45]. Пространство $\tau + 1$ берется с топологией, порожденной естественным вполне упорядочением множества ординалов.

Теорема 2.16 позволяет легко находить другие пары нормальных пространств, произведение которых не уплотняется ни на какое нормальное пространство. Действительно, пусть X — любое псевдокомпактное нормальное пространство (а следовательно, и счетно компактное), которое не уплотняется ни на какое компактное хаусдорфово пространство, и пусть τ такое, как в теореме 2.16. Тогда, по теореме 2.16, произведение $X \times (\tau + 1)$ не уплотняется на нормальное пространство. Например, в качестве X можно взять Σ -произведение несчетного семейства замкнутых единичных интервалов (см. [45]). Таким образом, мы пришли к следующему результату Бузяковой [37]:

ТЕОРЕМА 2.17. *Существуют нормальное счетно компактное пространство X и компактное хаусдорфово пространство Y такие, что $X \times Y$ не уплотняется ни на какое нормальное пространство.*

Используя другую конструкцию, Бузякова показала, что X и Y в теореме 2.16 можно выбрать так, что они, кроме того, будут топологическими группами [36].

Несколько недавних результатов об уплотнениях на компакты связано со следующей длительное время стоящей проблемой (см. [66]):

ВОПРОС 2.18. *Существует ли в ZFC сепарабельное счетно компактное тихоновское пространство с первой аксиомой счетности, которое не компактно?*

Мы видоизменяем эту задачу следующим образом:

ВОПРОС 2.19. *Существует ли в ZFC сепарабельное счетно компактное тихоновское пространство с первой аксиомой счетности, которое не уплотняется ни на какое компактное хаусдорфово пространство?*

Следующие результаты о совместимости в направлении этой проблемы были получены в [19]:

ТЕОРЕМА 2.20. *Совместимо с ZFC считать, что существует совершенно нормальное сепарабельное счетно компактное тихоновское пространство, которое не уплотняется ни на какое компактное хаусдорфово пространство.*

Дополнительным предположением в теореме 2.20 является принцип Йенсена.

ТЕОРЕМА 2.21. *При СН существует нормальное, сепарабельное, с первой аксиомой счетности, счетно компактное пространство, которое не уплотняется на компактное хаусдорфово пространство.*

Если пренебречь требованием первой аксиомы счетности, мы можем сделать это пространство очень хорошим:

ТЕОРЕМА 2.22. *При СН существует наследственно сепарабельная (в любой конечной степени), счетно компактная топологическая группа, которая не уплотняется ни на какое компактное хаусдорфово пространство.*

Два результата подобного рода [19] были доказаны в ZFC:

ТЕОРЕМА 2.23. *Существует сепарабельная, счетно компактная топологическая группа, которая не уплотняется на компактное хаусдорфово пространство.*

ТЕОРЕМА 2.24. *Существует нормальное, счетно компактное пространство с первой аксиомой счетности, которое не уплотняется на компактное хаусдорфово пространство.*

Следующая задача, очевидным образом связанная с вопросом 2.19, была сформулирована в [19]:

ВОПРОС 2.25. *Верно ли (в ZFC или совместно считать), что если сепарабельное, счетно компактное, тихоновское пространство с первой аксиомой счетности уплотняется на компактное хаусдорфово пространство, то оно само компактно?*

Некоторые весьма любопытные результаты, полученные в 90-е годы, касаются понятия расщепляемости, являющегося обобщением и, в определенном смысле, релятивизацией понятия уплотняемости.

Пусть $\mathcal{P}$ некоторый класс пространств. Пространство X *расщепляемо над $\mathcal{P}$* , если для любого подмножества A пространства X найдутся пространства $Y_A \in \mathcal{P}$ и непрерывное отображение f_A пространства X на Y_A такие, что $A = f_A^{-1}(f_A(A))$ (тогда мы говорим, что f_A *расщепляет X вдоль A над Y_A*). Скажем, что пространство X *расщепляется над пространством Z* , если X расщепляемо над классом всех подпространств пространства Z . (Заметьте, что в определении расщепляемости f_A является отображением “на”.)

Связь между расщеплениями и уплотнениями очень простая: каждое уплотнение пространства X на пространство Y расщепляет X над Y вдоль каждого подмножества пространства X . Таким образом, если X уплотняется на Y , мы говорим, что X абсолютно расщепляется над Y .

Одной из главных проблем в теории расщепляемости является нахождение тех условий, при которых расщепляемость сводится к уплотняемости. В некоторых ситуациях имеет смысл поставить даже более сильный вопрос: когда расщепляемость про-

пространства X над классом пространств $\mathcal{P}$ влечет принадлежность самого X к классу $\mathcal{P}$? Например, как показано в [21], если псевдокомпактное пространство X расщепляется над классом всех метризуемых пространств, то X само метризуемо.

Мы здесь обсудим несколько проблем и результатов подобного рода (более подробный обзор можно найти в [13]).

В [10] было доказано, что каждое компактное хаусдорфово пространство, расщепляемое над пространством действительных чисел $\mathbb{R}$, гомеоморфно некоторому подпространству пространства $\mathbb{R}$. В связи с этим естественно задать следующий вопрос. Пусть L – линейно упорядоченное пространство и X – компактное пространство, расщепляемое над L . Верно ли тогда, что X допускает топологическое вложение в L ? Бузякова показала, что в общем случае ответ отрицателен [35]: существуют два 0-мерных метризуемых компакта X и Y такие, что X расщепляется над Y , но X не гомеоморфен никакому подпространству компакта Y . Теперь мы формулируем наш вопрос более осмотрительно:

ВОПРОС 2.26. *При каких ограничениях на X и Y верно следующее: если X расщепляется над Y , то X уплотняется на некоторое подпространство пространства Y ?*

А вот тесно связанный с предыдущим, но более конкретный вопрос:

ВОПРОС 2.27. *Пусть X – компактное пространство, расщепляемое над классом всех линейно упорядоченных пространств. Верно ли тогда, что X само линейно упорядочено?*

Напомним, что топологическое пространство X линейно упорядочено, если топология на X порождена некоторым линейным упорядочением на множестве элементов пространства X . Бузякова получила несколько тонких результатов в этом направлении [35]. В частности, она установила следующие три факта:

ТЕОРЕМА 2.28. *Пусть X – континуум (т.е. связное компактное пространство, не обязательно метризуемое), расщепляемый над классом линейно упорядоченных пространств. Тогда X само линейно упорядочено.*

ТЕОРЕМА 2.29. *Если континуум X мощности, не превосходящей 2^ω , расщепляется над линейно упорядоченным пространством L , то X гомеоморфен некоторому подпространству пространства L .*

СЛЕДСТВИЕ 2.30. *Если континуум с первой аксиомой счетности расщепляется над линейно упорядоченным пространством L , то он гомеоморфен некоторому подпространству пространства L .*

ВОПРОС 2.31. *Верна ли теорема 2.29 для всех континуумов?*

Ясно, что если нам даны два пространства X и Y такие, что каждое из них уплотняется на какое-либо метризуемое пространство, то и их произведение $X \times Y$ тоже уплотняется на метризуемое пространство. Поэтому естественно спросить, является ли расщепляемость над классом всех метризуемых пространств конечно-мультипликативным свойством. Оказывается (что довольно неожиданно), ответ отрицателен; это видно из следующего элегантного положительного результата (Бузякова, [32]):

ТЕОРЕМА 2.32. *Пространство X уплотняется на метризуемое пространство в том и только том случае, если для каждого метризуемого Y произведение $X \times Y$ расщепляется над классом всех метризуемых пространств.*

Легко видеть, что каждое пространство, которое уплотняется на метризуемое пространство, имеет G_δ -диагональ. Балог [27] показал, что в случае расщепляемости то же самое не верно:

ТЕОРЕМА 2.33. *Существует паракомпактное пространство X , расщепляемое над классом всех метризуемых пространств, диагональ которого не типа G_δ .*

Построить подобный пример в классе линделевых пространств нельзя (см. [5]).

В [12], [92] было рассмотрено, когда пространство расщепляется над $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$). В частности, Яшенко получил следующий результат:

ТЕОРЕМА 2.34. *Если X – тихоновское пространство, расщепляемое над $\mathbb{R}^n$, и $|C(X)| \leq 2^\omega$, то X уплотняется на некоторое подпространство пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.35 [92]. *Каждое компактное пространство, расщепляемое над $\mathbb{R}^n$, топологически вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Не каждый компакт, расщепляемый над $\mathbb{R}^2$, можно вложить в $\mathbb{R}^2$. Действительно, достаточно взять любой одномерный метризуемый компактный полиэдр X , который не вкладывается в $\mathbb{R}^2$, так как каждый такой компакт расщепляется над $\mathbb{R}^2$ (см. [12], [86]).

Идея расщепляемости, в действительности, очень общая. Можно рассмотреть естественные тополого-алгебраические версии расщепляемости или ее вариант, относящийся к частичным упорядочениям (как это сделано в [59]), или попытаться работать на категорном уровне.

Идея расщепляемости стоит, в частности, за недавно предложенным понятием *слабой нормальности* [13]. Пространство X называется слабо нормальным (или, в более общем контексте, слабо нормальным над пространством Y), если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A и B пространства X найдется непрерывное отображение f пространства X в действительную прямую $\mathbb{R}$ (соответственно, в Y) такое, что образы множеств A и B при этом отображении не пересекаются.

Плоскость Немыцкого является слабо нормальным, но не нормальным пространством. Некоторые результаты о нормальности могут быть обобщены на случай слабо нормальных пространств. Например, каждое псевдокомпактное слабо нормальное пространство счетно компактно [13]. А. П. Комбаров показал [54], что каждое компактное хаусдорфово пространство X такое, что $X^2 \setminus \Delta$ слабо нормально, удовлетворяет первой аксиоме счетности. Однако, очень интересный вопрос остается открытым:

ВОПРОС 2.36. *Всегда ли произведение нормального (слабо нормального тихоновского) пространства на отрезок I является слабо нормальным пространством?*

Ряд интересных результатов о расщепляемости и слабой нормальности был получен А. Якивчином [90], [91]. В частности, он доказал, что произведение двух совершенно нормальных пространств не обязано быть слабо нормальным. Якивчик также

обобщил классическую теорему Тамано. Он установил, что тихоновское пространство X паракомпактно в том и только том случае, если для некоторой (для любой) компактификации B пространства X произведение $X \times B$ нормально над классом всех метризуемых пространств. В теории расщепляемости Якивчик показал, что регулярное линейно связное пространство X расщепляется над классом сепарабельных метризуемых пространств, если и только если оно уплотняется на некоторое сепарабельное метризуемое пространство.

В заключение этого раздела приведем некоторые другие интересные результаты в общей теории отображений.

Значительный прогресс был сделан в решении следующего открытого вопроса, поставленного С. Мрувкой (см. [44]):

ВОПРОС 2.37. Пусть X – тихоновское пространство такое, что каждый его тихоновский непрерывный образ вещественно компактен. Верно ли, что X линделефово?

В [44] показано, что при ограничениях на X в вопросе 2.37 экстенс пространства X счетен и ответ положителен в случаях: если число Линделефа пространства X не превосходит 2^ω ; или X – пространство счетной тесноты; или X можно непрерывно отобразить на $X \times X$.

Следующий, по существу известный (см. его историю в [30]) результат получил в [30] интересное приложение к многозначным отображениям:

ТЕОРЕМА 2.38. Пусть X – полное по Чеху линделефово пространство и Y – тихоновское пространство точечно счетного типа. Предположим, что Y является образом пространства X при компактно накрывающем непрерывном отображении. Тогда Y также полно по Чеху. В действительности, при этих предположениях некоторое замкнутое подпространство пространства X совершенно и непрерывно отображается на Y .

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *компактно накрывающим*, если каждый компакт, лежащий в Y , содержится в образе некоторого компактного подпространства пространства X при отображении f .

Теорема 2.38 предлагает новую точку зрения на классические теоремы о сохранении полноты по Чеху при открытых отображениях (см. [45]).

Компактно накрывающие отображения и отображения, близкие к ним, глубоко изучены в недавней работе Г. Дебса и Ж. Сент-Рэймонда [40], которая содержит много новых идей и результатов.

Напомним, отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *индуктивно совершенным*, если существует замкнутое подпространство Z пространства X такое, что $f(Z) = Y$ и сужение f на Z совершенно. Мы говорим, что отображение f *счетно-компактно-накрывающее*, если каждое счетно компактное подпространство пространства Y является образом некоторого компакта, лежащего в X , при отображении f . Ясно, каждое индуктивно совершенное отображение является компактно-накрывающим. Следующий важный результат получен в [40]:

ТЕОРЕМА 2.39. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное счетно-компактно-накрывающее отображение сепарабельного метризуемого пространства X на сепарабельное метризуемое пространство Y . Предположим также, что для некоторого целого n все слои имеют самое большее n точек. Тогда f – индуктивно

совершенно.

Удивительно, что нельзя ослабить условие, наложенное на слои отображения f , до предположения, что они только конечны (см. [40]).

Интересно сравнить теорему 2.39 со следующим ярким результатом В. Юста и Х. Вика [51] (см. также [70]):

ТЕОРЕМА 2.40. *Каждое непрерывное счетно-компактно-накрывающее отображение сепарабельного метризуемого пространства X на счетное метризуемое пространство Y является индуктивно совершенным.*

Этот результат решил хорошо известную и долго стоявшую проблему Майкла [61].

С другой стороны, результат из [51], близкий к теореме 2.40, получающийся, если ограничение счетности на X заменить ограничением компактности на слои отображения f , не верен: контрпример к этому был построен в [39], и даже более сильный контрпример (с конечными слоями) предложен в [40].

§ 3. Некоторые результаты и открытые вопросы в C_p -теории

Если X – пространство, то $C_p(X)$ – пространство всех действительных непрерывных функций на X в топологии поточечной сходимости; кроме того, X в этом параграфе подразумевается тихоновским.

Пространства X и Y называются t -эквивалентными (l -эквивалентными), если пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ гомеоморфны (линейно гомеоморфны).

В последние годы было установлено множество интересных результатов о t -эквивалентности (см. [6], [8], [11]), но следующий вопрос остается все еще открытым:

ВОПРОС 3.1. *Сохраняется ли класс линделефовых пространств t -эквивалентностью?*

Вопрос 3.1 является, возможно, одной из интереснейших открытых проблем, касающихся t -эквивалентности. Наилучший результат в этом направлении был получен Н. В. Величко [43].

ТЕОРЕМА 3.2. *Класс линделефовых пространств сохраняется l -эквивалентностью.*

Конечно, l -эквивалентность является намного более сильным отношением, чем t -эквивалентность; например, компактность сохраняется l -эквивалентностью [5]. Любопытная особенность теоремы 3.2 в том, что Величко доказал ее только в счетном случае, и следующий вопрос остается нерешенным:

ВОПРОС 3.3. *Сохраняется ли число Линделефа l -эквивалентностью (t -эквивалентностью)?*

Одним из наиболее замечательных недавних достижений в теории l -эквивалентности является результат Р. Пола:

ТЕОРЕМА 3.4 [73]. *Существует бесконечный метризуемый компакт X , который не l -эквивалентен свободной топологической сумме X с самим собой.*

Пол показал, что существует бесконечное метризуемое пространство X такое, что $C_p(X)$ не равномерно гомеоморфно $C_p(X) \times C_p(X)$, т.е. X и $\{0, 1\}$ не u -эквивалентны. Это решает две проблемы из [6], но следующий вопрос остается открытым:

ВОПРОС 3.5. *Существует ли бесконечное метризуемое (компактное) пространство X такое, что $C_p(X)$ не гомеоморфно $C_p(X) \times C_p(X)$, т.е. X не t -эквивалентно $X \times \{0, 1\}$?*

В. Маршишевский [58] недавно решил другую трудную проблему из [6]:

ТЕОРЕМА 3.6. *Существует бесконечное компактное пространство X такое, что $C_p(X)$ нельзя непрерывно и линейно отобразить на $C_p(X) \times \mathbb{R}$.*

В частности, для этого пространства X , $C_p(X)$ и $C_p(X) \times \mathbb{R}$ не линейно гомеоморфны.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. *Существует бесконечное компактное пространство X такое, что пространство X^* , полученное добавлением одной новой изолированной точки к X , не l -эквивалентно X .*

Пространство X в следствии 3.7 не может быть метризуемым, так как каждое пространство X , содержащее нетривиальную сходящуюся последовательность, l -эквивалентно X^* [3].

ВОПРОС 3.8. *Пусть X – бесконечное пространство. Гомеоморфно ли тогда пространство $C_p(X)$ пространству $C_p(X) \times \mathbb{R}$? Что если X компактно?*

Одним из лучших результатов в C_p -теории является следующая теорема В. Г. Пестова [72]:

ТЕОРЕМА 3.9. *Если пространства X и Y l -эквивалентны, тогда $\dim(X) = \dim(Y)$.*

Теорема Пестова была распространена С. П. Гулько на случай равномерных гомеоморфизмов [48]:

ТЕОРЕМА 3.10. *Если равномерные пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ равномерно гомеоморфны, то $\dim(X) = \dim(Y)$.*

Благодаря теоремам 3.9 и 3.10 следующий вопрос, касающийся t -эквивалентности, становится весьма интересным:

ВОПРОС 3.11. *Являются ли пространства 2^ω и I t -эквивалентными? (2^ω – канторово пространство, а I – единичный отрезок.)*

ВОПРОС 3.12. *Являются ли пространства I и $I \times I$ t -эквивалентными? Являются ли пространства I и I^ω t -эквивалентными?*

Если в этих вопросах заменить t -эквивалентность на l -эквивалентность, то по теореме 3.9 ответ будет отрицателен. Вопросы 3.11 и 3.12 являются особыми случаями следующей общей проблемы:

ВОПРОС 3.13. *Пусть X и Y – любые два t -эквивалентные пространства. Верно ли, что $\dim(X) = \dim(Y)$? Что если предположить X и Y компактными? Что если X и Y метризуемые компактные пространства?*

Мы называем пространство Y t -образом пространства X , если $C_p(Y)$ гомеоморфно некоторому подпространству пространства $C_p(X)$. Это, очевидно, является обобщением понятия t -эквивалентности. Недавно некоторые интересные результаты о сохранении определенных кардинальных инвариантов в t -образах были получены О. Г. Окуновым [69]. Он доказал следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть Y является t -образом пространства X . Тогда:

- a) Если X наследственно линделефово, то Y также наследственно линделефово;
- b) Если X наследственно сепарабельно, то Y наследственно сепарабельно;
- c) Если спрэд пространства X счетен, то спрэд Y также счетен;
- d) Если для некоторого $n \in \omega$ X^n обладает свойствами, упомянутыми в a), b), c), то Y^n обладает тем же свойством.

Эта теорема верна для любого кардинала. Окунев доказал теорему 3.14, не выводя никаких теорем двойственности, характеризующих свойства X , упомянутые в теореме 3.14. С другой стороны, теорема 3.14 дает сильное предположение, что такого рода характеристика вполне возможна.

ПРОБЛЕМА 3.15. Охарактеризовать наследственную линделефовость, спрэд , наследственную плотность пространства X с помощью хорошо определенных топологических свойств пространства $C_p(X)$.

Классификация локально компактных 0-мерных сепарабельных метризуемых пространств по отношению к l -эквивалентности была дана в [22]. С другой стороны, два компактных полиэдра конечной положительной размерности l -эквивалентны в том и только том случае, если они имеют одинаковую размерность (Павловский, [7]). К. Кавамура и К. Морисита сделали другой важный и непростой шаг в теории l -эквивалентности: они показали, что любое компактное топологическое многообразие конечной размерности $n \geq 1$ l -эквивалентно n -мерному диску (и следовательно, любые два компактных многообразия одинаковой размерности l -эквивалентны [53]).

В [24] показано, что полная метризуемость сохраняется l -эквивалентностью в классе метризуемых пространств; конечно, в классе тихоновских пространств это уже не так [8].

Тонкий пример двух l -эквивалентных локально компактных счетных метризуемых пространств X и Y таких, что пространства $C_p^0(X)$ и $C_p^0(Y)$ не линейно гомеоморфны (т.е. X и Y не l^0 -эквивалентны), был предложен в [23]. Этот пример и результаты вокруг него, [23], показывают, что l^0 -эквивалентность ведет себя совершенно отлично от l -эквивалентности и заслуживает самостоятельного изучения.

Очевидно, следует также рассмотреть, какие теоремы о l -эквивалентности могут быть обобщены на случай, когда существует непрерывная линейная сюръекция пространства $C_p(X)$ на $C_p(Y)$. В каком отношении должны быть тогда свойства пространств X и Y ?

Очень интересный результат в этом направлении был получен в [56]: метризуемый компакт X имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда пространство $C_p(I)$ (где I – замкнутый единичный интервал $[0, 1]$) линейно и непрерывно отображается на $C_p(X)$. Это решает проблему 1046 из [6].

Важное место в C_p -теории занимает вопрос, как свойства пространства X отражаются в свойствах подпространств пространства $C_p(X)$. Главная проблема в этом направлении может быть сформулирована следующим образом:

ВОПРОС 3.16. Пусть $\mathcal{P}$ – класс пространств. Какое тихоновское пространство может быть вложено в $C_p(X)$ для некоторого $X \in \mathcal{P}$?

Хорошо известно, что не каждое счетное пространство может быть вложено в $C_p(X)$ для компакта X : даже простейшее счетное неметризуемое пространство

Фреше–Урысона с одной неизолированной точкой, полученное отождествлением предельных точек в свободной топологической сумме бесконечного счетного семейства сходящихся последовательностей, не имеет такого вложения. Это вытекает из следующего результата [8]:

ТЕОРЕМА 3.17. *Если X – компакт, то $C_p(X)$ имеет счетную веерную тесноту.*

Мы говорим, что пространство Y имеет счетную веерную тесноту, если для любой точки $x \in Y$ и любого счетного семейства $\{A_n : n \in \omega\}$ таких, что $x \in A_n$ для каждого $n \in \omega$, можно выбрать конечные множества $K_n \subset A_n$ так, что $x \in \bigcup \{K_n : n \in \omega\}$.

Следующий результат принадлежит Е. Г. Пыткееву [76]:

ТЕОРЕМА 3.18. *Пусть X – компакт и Y – подпространство пространства $C_p(X)$. Тогда Y – пространство Фреше–Урысона в том и только том случае, если оно является k -пространством.*

ПРОБЛЕМА 3.19. *Охарактеризовать компактные подпространства пространства $C_p(X)$, где X – любое линделефово пространство.*

Хорошо известно, что теснота пространства $C_p(X)$ счетна тогда и только тогда, когда X^n является линделефовым пространством для любого $n \in \omega$. Следовательно, если X – пространство стрелки, то теснота $C_p(X)$ несчетна. Тем не менее, можно ожидать, что каждая компактная часть пространства $C_p(X)$, где X – линделефово пространство, имеет более хорошую структуру, чем все пространство $C_p(X)$. Отметим, что все компактные подпространства пространства $C_p(X)$, где X – пространство стрелки, метризуемы, так как X сепарабельно.

ГИПОТЕЗА 3.20. *Если Y – компактное подпространство пространства $C_p(X)$, где X линделефово пространство, то теснота пространства Y счетна.*

При (PFA) (Proper Forcing Axiom) гипотеза 3.20 была подтверждена в [8]. Доказательство основывалось на следующем ZFC -результате: *если пространство ординалов $(\omega_1 + 1)$ можно вложить в $C_p(X)$, то X содержит замкнутое несчетное дискретное подпространство.*

Но я надеюсь, что гипотеза 3.20 верна и в ZFC . В действительности, при (PFA) если X линделефово, то каждое компактное подпространство F пространства $C_p(X)$ секвенциально [8]. Мы не можем ожидать, что это более сильное заключение будет верно в ZFC . В самом деле, при $V = L$ существует бесконечное компактное пространство X такое, что X^n наследственно сепарабельно для любого $n \in \omega$, тогда как в X нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности [50]. Тогда по теореме Величко–Зенора $C_p(X)$ – наследственно линделефово пространство [8]. С помощью отображения вычисления пространство X вкладывается топологически в $C_p(Y)$, где $Y = C_p(X)$.

ВОПРОС 3.21. *Совместимо ли с ZFC , что для любого линделефова X все компактные подпространства пространства $C_p(X)$ являются пространствами Фреше–Урысона?*

Например, неясно можно ли одноточечную компактификацию пространства Мрувки–Исбела Ψ (см. [45], [8]) вложить в $C_p(X)$, где X – линделефово.

ВОПРОС 3.22. *Когда все компактные подпространства пространства $C_p(X)$ являются ω -монолитными?*

Это так, когда X компактно [8]. С другой стороны, это не может быть верно в ZFC для всех линделефовых пространств X . Тем не менее, интересный результат о совместимости в этом направлении получил О. Г. Окунев [68]. Следующее утверждение является легким следствием результата Окунева [68]:

ТЕОРЕМА 3.23 ($MA + \neg CH$). *Если X^n линделефово для каждого $n \in \omega$, то каждое компактное подпространство пространства $C_p(X)$ является ω -монолитным.*

СЛЕДСТВИЕ 3.24 ($MA + \neg CH$). *Если X^n линделефово для каждого $n \in \omega$, то каждое компактное подпространство пространства $C_p(X)$ является пространством Фреше–Урысона.*

ВОПРОС 3.25. *Верно ли при $(MA + \neg CH)$, что если X линделефово, то каждое компактное подпространство пространства $C_p(X)$ является ω -монолитным? Пространством Фреше–Урысона?*

Результаты и вопросы, упомянутые выше, тесно связаны со следующей старой нерешенной проблемой [6]:

ГИПОТЕЗА 3.26. *Если X компактно и $C_p(X)$ линделефово, то $C_p(X) \times C_p(X)$ также линделефово.*

Вполне вероятно, что гипотеза 3.26 верна, если опустить условие компактности пространства X .

ТЕОРЕМА 3.27 (О. В. Сипачева, [83]; М. Сакаи, [80]). *Если X – сепарабельное линейно упорядоченное компактное пространство, то каждое линделефово подпространство пространства $C_p(X)$ обладает счетной сетью.*

Из теоремы 3.27 следует, что не каждое совершенно нормальное компактное пространство F можно вложить в $C_p(X)$ для некоторого линделефова пространства X (Сипачева, Сакаи). Действительно, мы легко заключаем из теоремы 3.27, что компакт “две стрелки” не вкладывается в $C_p(X)$ ни для какого линделефова пространства X . С помощью теоремы 3.27 доказывается следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 3.28. *Если X – сепарабельный монотонно нормальный компакт такой, что пространство $C_p(X)$ линделефово, то X метризуемо.*

СЛЕДСТВИЕ 3.29. *Каждый монотонно-нормальный компакт X такой, что $C_p(X)$ линделефово, является ω -монолитным.*

Следующий вопрос остается открытым:

ВОПРОС 3.30. *Пусть X – наследственно линделефово пространство и F – компактное подпространство пространства $C_p(X)$. Верно ли тогда, что теснота компакта F счетна?*

ВОПРОС 3.31. *Пусть X – линделефово пространство. Верно ли тогда, что $C_p(X)$ уплотняется на пространство счетной тесноты? Что если X наследственно линделефово?*

ВОПРОС 3.32. Пусть X – наследственно линделефово пространство. Верно ли тогда, что $C_p(X)$ уплотняется на наследственно сепарабельное пространство?

ТЕОРЕМА 3.33 [17]. Если X компактно, то каждое линейно линделефово подпространство Y пространства $C_p(X)$ является линделефовым.

ВОПРОС 3.34. Верно ли, что если X компактно, то каждое нормальное подпространство Y пространства $C_p(X)$ счетно паракомпактно?

Заметим также, что следующий вопрос Окунева остается нерешенным:

ВОПРОС 3.35. Верно ли в ZFC, что если $C_p(X)$ – линделефово, то теснота каждого компактного подпространства F пространства $C_p(X)$ счетна?

Пространство X называется *пространством Гротендика*, если для каждого подпространства Y пространства $C_p(X)$ и каждого подмножества A пространства Y таких, что A счетно-компактно в Y , замыкание A в Y компактно. Если это условие выполнено только для $Y = C_p(X)$, то мы говорим, что X – слабо гротендиково пространство. Довольно полный обзор о пространствах Гротендика содержится в [8], [16], [17]. Поэтому мы формулируем только несколько результатов и вопросов об этих пространствах. В частности, мы имеем (см. [16]):

ТЕОРЕМА 3.36. Каждое линделефово Σ -пространство является пространством Гротендика.

ВОПРОС 3.37. Является ли совершенный прообраз пространства Гротендика пространством Гротендика?

ВОПРОС 3.38. Является ли свободная топологическая сумма двух пространств Гротендика пространством Гротендика?

Заметим, что X – пространство Гротендика в том и только том случае, если оно слабо гротендиково и каждый компакт, лежащий в $C_p(X)$, Фреше–Урысона [17]. Поэтому вопросы о пространствах Гротендика порождают вопросы о свойствах сходимости в компактах, лежащих в $C_p(X)$, которые и сами по себе интересны.

ВОПРОС 3.39. Пусть X – такое пространство, что каждый компакт, лежащий в $C_p(X)$, имеет счетную тесноту (является пространством Фреше–Урысона) и F – компакт. Верно ли тогда, что все компакты, лежащие в $C_p(X \times F)$, имеют счетную тесноту (являются пространствами Фреше–Урысона)?

Вложения в C_p -пространства появляются естественным образом в теории непрерывных экстендеров.

Отображение ϕ пространства $C_p(Y)$ в $C_p(X)$ (где Y – подпространство пространства X) называется (*линейным*) *непрерывным экстендером* (из Y в X), если сужение $\phi(g)$ на Y совпадает с g для каждого $g \in C_p(Y)$ и отображение ϕ (линейно и) непрерывно [7].

Скажем, что подпространство Y *t-вложено* (*l-вложено*) в пространство X , если существует непрерывный (линейный) экстендер из Y в X . Хорошо известно, что каждое компактное метризуемое подпространство Y любого пространства X *l-вложено* в X .

Пространство D^τ является замкнутым подпространством куба I^τ . Естественно спросить, верно ли, что D^τ l -вложено, или, по крайней мере, t -вложено в I^τ . Ясно, что ответ — “да”, когда τ конечное натуральное число или $\tau = \omega$, так как в этом случае I^τ метризуемо и D^τ замкнуто в I^τ . А что если τ несчетно? Здесь мы приходим к одной из наиболее интересных открытых проблем. Сначала положительный результат [18]:

ТЕОРЕМА 3.40. *Для каждого несчетного τ D^τ не l -вложено в I^τ .*

Доказательство этого результата базируется на следующем общем утверждении:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.41. *Для любых кардиналов τ и λ и любого линейного непрерывного отображения f пространства $C_p(D^\tau)$ в $C_p(I^\lambda)$ подпространство $f(C_p(D^\tau))$ пространства $C_p(I^\lambda)$ обладает счетной сетью.*

ВОПРОС 3.42. *Верно ли, что D^{ω_1} t -вложено в I^{ω_1} ?*

ВОПРОС 3.43. *Является ли D^{ω_1} t -образом пространства I^{ω_1} ?*

ВОПРОС 3.44. *Пусть f — непрерывное отображение пространства $C_p(D^{\omega_1})$ в $C_p(I^{\omega_1})$. Верно ли тогда, что подпространство $f(C_p(D^{\omega_1}))$ пространства $C_p(I^{\omega_1})$ имеет счетную сеть?*

Несколько интересных задач связано с однородными пространствами. Топологическое пространство X называется однородным, если для любых двух точек x и y существует гомеоморфизм h пространства X на себя такой, что $h(x) = y$.

Каждое компактное пространство является ретрактом σ -компактного однородного пространства [67], тогда как не каждое компактное пространство является ретрактом компактного однородного пространства. Д. Моторов показал, что существует метризуемый компакт, который нельзя представить как ретракт однородного компактного пространства (см. [4]). С другой стороны, каждый метризуемый компакт автоматически l -вложен в любое компактное пространство, содержащее его в качестве собственного подпространства. Заметим, что каждое тихоновское пространство вкладывается в однородный компакт. Это наблюдение предлагает следующий вопрос:

ВОПРОС 3.45. *Верно ли, что каждый компакт может быть l -вложен (t -вложен) в однородное компактное пространство? Верно ли это для одноточечной компактификации несчетного дискретного пространства $D(\tau)$? Что если мощность $D(\tau)$ больше чем 2^ω ?*

ВОПРОС 3.46. *Верно ли, что каждое компактное пространство является l -образом (t -образом) некоторого однородного компакта?*

Если ответ на последний вопрос положителен, то существует однородный компакт X с числом Суслина, большим чем 2^ω . Действительно, если компакт Y является t -образом компакта X , то число Суслина пространства Y не превосходит числа Суслина пространства X ; это следует из характеристики числа Суслина как супремума весов всех компактов, лежащих в $C_p(X)$ [8]. Таким образом, положительный ответ на вопрос 3.46 решил бы знаменитую проблему Э. ван Дауэна (см. [42]) относительно числа Суслина однородных компактных пространств (может ли оно превосходить 2^ω).

Следующая версия проблемы универсального пространства самым естественным образом включает l -вложения и t -вложения.

Пусть τ – бесконечный кардинал. По теореме Тихонова каждый компакт веса, не превосходящего τ , можно вложить в I^τ в качестве замкнутого подпространства. Всегда ли можно выбрать это вложение так, чтобы оно было l -вложением или t -вложением? Ответ, очевидно, отрицателен, так как плотность t -вложенного пространства никогда не превосходит плотности всего пространства (см. [7]). Можно ли в теореме Тихонова заменить I^τ каким-нибудь другим компактом веса τ , который будет универсален в более сильном смысле, т.е. для которого в качестве такого вложения всегда можно выбрать t -вложение или l -вложение? Другими словами, мы имеем следующую интересную задачу:

ВОПРОС 3.47. Пусть τ – бесконечный кардинал. Верно ли, что существует компактное пространство $B(\tau)$ веса τ такое, что любой компакт веса, не превосходящего τ , можно l -вложить (t -вложить) в $B(\tau)$?

Заметим, что при $\tau = \omega$, ответ – “да”, – по теореме Дугунджи. Для любого несчетного τ , включая $\tau = \omega_1$, вопрос открыт.

Мы завершаем этот параграф вопросом, мотивированным общей идеей улучшения свойств пространств с помощью уплотнений.

Мы знаем, что $C_p(X)$ почти никогда не компактно и не σ -компактно (см. [8]).

ВОПРОС 3.48. Когда $C_p(X)$ можно уплотнить на компактное хаусдорфово пространство? Можно ли это сделать в случае, когда X – замкнутый единичный интервал?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alexandroff P. S. Über die Metrisation der in kleinen kompakten topologischen Räume // Math. Ann. 1924. V. 92. P. 294–301.
- [2] Alexandroff P. S., Urysohn P. S. Mémoire sur les espaces topologiques compacts // Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam. V. 14, 1929.
- [3] Архангельский А. В. Свойство паракомпактности в классе совершенно нормальных, локально бикompактных пространств // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. С. 1231–1234.
- [4] Архангельский А. В. Топологическая однородность. Топологические группы и их непрерывные образы // УМН. 1987. Т. 42. № 2. С. 69–105.
- [5] Arhangel'skiĭ A. V. Some problems and lines of investigation in General Topology // Comment. Math. Univ. Carolin. 1988. V. 29. № 4. P. 611–629.
- [6] Arhangel'skiĭ A. V. Problems in C_p -theory // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North-Holland. Ch. 31, 1990. P. 603–615.
- [7] Архангельский А. В. Пространства отображений и кольца непрерывных функций // Итоги науки и техники, Совр. пробл. матем. Фундам. напр.. Т. 51. М.: ВИНТИ, 1989. С. 81–171.
- [8] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [9] Arhangel'skiĭ A. V. The general concept of cleavability of a topological space // Topology Appl. 1992. V. 44. № 1–3. P. 27–36.
- [10] Arhangel'skiĭ A. V. Cleavability over reals // Topology Appl. 1992. V. 48. № 2. P. 163–178.
- [11] Arhangel'skiĭ A. V. C_p -theory // Recent progress in General Topology / ed. M. Hušek, J. van Mill. Amsterdam: North-Holland. Ch. 1, 1992. P. 1–56.
- [12] Arhangel'skiĭ A. V. On cleavability of topological spaces over R , R^n and R^ω // Ann. New York Acad. Sci. 1992. V. 659. P. 18–28.

- [13] Arhangel'skiĭ A. V. A survey of cleavability // *Topology Appl.* 1993. V. 54. №1–3. P. 141–163.
- [14] Arhangel'skiĭ A. V. On countably compact topologies on compact groups and on dyadic compacta // *Topology Appl.* 1994. V. 57. №2–3. P. 163–181.
- [15] Arhangel'skiĭ A. V. A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces // *Comment. Math. Univ. Carolin.* 1995. V. 36. №2. P. 303–325.
- [16] Arhangel'skiĭ A. V. On a Theorem of Grothendieck in C_p -theory // *Topology Appl.* 1997. P. 1–21.
- [17] Arhangel'skiĭ A. V. Embeddings in C_p -spaces // *Topology Appl.* 1997 (to appear).
- [18] Arhangel'skiĭ A. V., Cioban M. M. On continuous mappings of C_p -spaces and extenders // *Труды МИРАН.* 1996. Т. 212. С. 33–36.
- [19] Архангельский А. В., Федорчук В. В. Об уплотнениях счетно компактных пространств на компакты // *Фундамент. наука и прикл. матем.* 1995. Т. 4. С. 871–880.
- [20] Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
- [21] Архангельский А. В., Шахматов Д. Б. О точечной аппроксимации произвольных функций счетными семействами непрерывных функций // *Труды сем. Петровского.* 1988. Т. 13. С. 206–227, 259.
- [22] Baars J., de Groot J. An isomorphical classification of function spaces of zero-dimensional locally compact separable metric spaces // *Comment. Math. Univ. Carolin.* 1988. V. 29. P. 577–595.
- [23] Baars J., de Groot J., van Mill J., Pelant J. An example of l_p -equivalent spaces which are not l_p^* -equivalent // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1993. V. 119. №3. P. 963–969.
- [24] Baars J., de Groot J., Pelant J. Function spaces on completely metrizable spaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1993. V. 340. P. 871–879.
- [25] Balogh Z. A normal screenable nonparacompact space in ZFC (to appear).
- [26] Balogh Z. On collectionwise normality of locally compact spaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 323. P. 389–411.
- [27] Balogh Z. A paracompact Q -space without a G_δ -diagonal (to appear).
- [28] Banach S. Livre Ecosais, Problem 1. 17.VII.1935 // *Colloq. Math.* 1948. V. 1. №2. P. 150.
- [29] Bing R. H. Metrization of topological spaces // *Canad. J. Math.* 1951. V. 3. P. 175–186.
- [30] Bouziad A., Calbrix J. Čech-complete spaces and upper topology // *Topology Appl.* 1996. V. 70. P. 133–138.
- [31] Burke D. A nondevelopable locally compact Hausdorff space with a G_δ -diagonal // *Topology Appl.* 1972. V. 2. P. 287–291.
- [32] Бузякова Р. З. О расщепляемых пространствах // *Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех.* 1993. №6. С. 83–84.
- [33] Бузякова Р. З. О произведении нормальных пространств // *Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех.* 1994. №4. С. 81–82.
- [34] Бузякова Р. З. Об образах декартовых произведений при уплотнениях // *Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех.* 1996. №1. С. 17–19.
- [35] Бузякова Р. З. О расщепляемости компактов над линейно упорядоченными пространствами // *Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех.* 1996. №3.
- [36] Бузякова Р. З. Пример двух нормальных топологических групп, произведение которых не уплотняется на нормальное пространство // *Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех.* (в печати).
- [37] Buzyakova R. Z. A criterion that a pseudocompact space condenses onto a compact space // *Submitted to Questions Answers Gen. Topology* 1996.
- [38] Davis S. A non-developable Čech-complete space with a point-countable base // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1980. V. 78. P. 139–142.
- [39] Debs G., Saint Raymond J. Compact covering and game determinacy // *Topology Appl.* 1996. V. 68. P. 153–185.
- [40] Debs G., Saint Raymond J. Compact covering properties of finite-to-one mappings (to appear).
- [41] Delistathis G., Watson S. A regular space with a countable network and different dimensions // *Preprint.*

- [42] van Douwen E. K. Nonhomogeneity of products of preimages and π -weight // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 69. P. 183–192.
- [43] van Douwen E. K. A technique for constructing honest locally compact submetrizable examples // Topology Appl. 1992. V. 47. P. 179–201.
- [44] Eckertson F., Fleissner W., Korovin A., Levy R. Not realcompact images of not Lindelöf spaces // Topology Appl. 1994. V. 58. P. 115–125.
- [45] Engelking R. General Topology. Warsaw: PWN, 1977.
- [46] Gruenhage G., Koszmider P. The Arhangel'skiĭ–Tall problem: a consistent counterexample // Fund. Math. 1996. V. 149. P. 143–166.
- [47] Gruenhage G., Koszmider P. The Arhangel'skiĭ–Tall problem under Martin's axiom // Fund. Math. (to appear).
- [48] Gul'ko S. P. Uniformly homeomorphic spaces of functions // Proc. Steklov Inst. Math. 1993. V. 3. P. 87–93.
- [49] Heath R. W. On spaces with point-countable bases // Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Ser. 1965. V. 13. P. 393–395.
- [50] Иванов А. В. О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. №5. С. 1109–1112.
- [51] Just W., Wicke H. Some conditions under which tri-quotient or compact-covering maps are inductively perfect // Topology Appl. 1994. V. 55. P. 289–305.
- [52] Katetov M. On mappings of countable spaces // Colloq. Math. 1949. V. 2. P. 30–33.
- [53] Kawamura K., Morishita K. Linear topological classification of certain function spaces on manifolds and CW -complexes // Topology Appl. 1996. V. 69. №3. P. 265–282.
- [54] Комбаров А. П. О слабой нормальности пространства $X^2 \setminus \Delta$ // Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех. 1995. №3. С. 40–44.
- [55] Kulpa W. A minimization of 0-dimensional metric spaces // Colloq. Math. 1976. V. 36. №2. P. 215–216.
- [56] Leiderman A., Morris S. A., Pestov V. The free Abelian topological group and the free locally convex space on the unit interval // Preprint.
- [57] Marciszewski W. A countable X having a closed subspace A with $C_p(A)$ not a factor of $C_p(X)$ // Topology Appl. 1995. V. 64. P. 141–147.
- [58] Marciszewski W. A function space $C_p(X)$ not linearly homeomorphic to $C_p(X) \times R$ // Preprint, 1996.
- [59] Marron D. J. Splittability in ordered sets and in ordered spaces // Ph.D. Dissertation. Faculty of Science, Queens University of Belfast, 1996.
- [60] van Mill J., Pol R. A countable space with a closed subspace without measurable extender // Bull. Acad. Polon. Sci. 1993. V. 41. P. 279–283.
- [61] Michael E. Some problems // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 271–278.
- [62] Мищенко А. С. О финально компактных пространствах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. С. 1224–1227.
- [63] Nadler S. B., Quinn J., Reiter H. Results and problems concerning compactifications, compact subtopologies, and mappings // Fund. Math. 1975. V. 89. №1. P. 33–44.
- [64] Nagami K. Paracompactness and strong screenability // Nagoya Math. J. 1955. V. 8. P. 83–88.
- [65] Nikiel J. On continuous images of arcs and compact ordered spaces // Topology Proc. 1989. V. 14. P. 163–193, 279–280.
- [66] Nyikos P. On first countable, countably compact spaces 3: The problem of obtaining separable noncompact examples // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 127–162.
- [67] Окроменко Н. Г. О ретракциях однородных пространств // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. №3. С. 548–551.
- [68] Okunev O. G. On Lindelöf sets of continuous functions // Topology Appl. 1995. V. 63. P. 91–96.
- [69] Okunev O. G. Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants // Topology Appl. 1997 (to appear).

- [70] Островский А. В. Новый класс отображений, связанный с компактно накрывающими отображениями // Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех. 1994. № 4. С. 24–27.
- [71] Павлов О. Уплотнения степеней непсевдокомпактных пространств на σ -компактные пространства // Доклад на топологическом семинаре А. В. Архангельского. Москва, 1995.
- [72] Пестов В. Г. Совпадение размерностей $\dim$ l -эквивалентных топологических пространств // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 3. С. 553.
- [73] Pol R. On metrizable E with $C_p(E)$ not linearly homeomorphic to $C_p(E) \times C_p(E)$ // Matematika. 1995. V. 42. P. 49–55.
- [74] Пыткеев Е. Г. О супремуме топологий // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 4. С. 489–500.
- [75] Пыткеев Е. Г. К теории уплотнений на компакты // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 6. С. 1046–1048.
- [76] Пыткеев Е. Г. О секвенциальности пространств непрерывных функций // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 197–198.
- [77] Rudin M. E. A normal, screenable, non-paracompact space // Topology Appl. 1983. V. 15. P. 313–322.
- [78] Rudin M. E. Some conjectures // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 185–193.
- [79] Rudin M. E. The Abstract and the Talk at the Topology Conference in Prague, 1996.
- [80] Sakai M. On embeddings into $C_p(X)$ where X is Lindelöf // Comment. Math. Univ. Carolin. 1992. V. 33. P. 165–171.
- [81] Шахматов Д. В. О псевдокомпактных пространствах с точечно счетной базой // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 825–829.
- [82] Shakhmatov D. V. A pseudocompact Tychonoff space all countable subsets of which are closed and C^* -embedded // Topology Appl. 1986. V. 22. P. 139–144.
- [83] Сипачева О. В. О линделефовых подпространствах пространств функций над линейно упорядоченными сепарабельными компактами // Общая топология, пространства и функции. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 143–148.
- [84] Tall F. Tall's Problems // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 21–35.
- [85] Ткачук В. В. О бикомпактификациях // Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех. 1990.
- [86] Tkachuk V. V. A note on splittable spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. 1992. V. 33. № 3. P. 551–555.
- [87] Velichko N. V. Lindelöf property is preserved by l -equivalence // The Talk at 7th Prague Topology Symposium, 1991; // Preprint.
- [88] Watson S. Problems I wish I could solve // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 37–76.
- [89] Watson S. Locally compact normal spaces in the constructible universe // Canad. J. Math. 1982. V. 34. P. 1091–1096.
- [90] Якивчик А. Н. Слабо нормальные топологические пространства и произведения // Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех. 1994. № 6. С. 82.
- [91] Якивчик А. Н. Дополнение к теореме Тамано // Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех. 1994. № 6. С. 83–84.
- [92] Ященко И. В. Вложения в R^n и R^ω и расщепляемость // Вестник МГУ. Сер. 1 матем., мех. 1992. № 2. С. 107.
- [93] Yaschenko I. V. Cardinality of discrete families of open sets and one-to-one continuous mappings // Questions Answers Gen. Topology. 1992. V. 2. P. 24–26.

Поступила в редакцию
19.06.1997