Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Бак, Глобальные действия: алгебраический двойник топологического пространства, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 5, 71–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:09:41

ГЛОБАЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИЯ: АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ
ДВОЙНИК ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Э. БАК

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	71
2. Глобальные действия	73
3. Морфизмы и пространства морфизмов	80
4. Относительные действия и их пространства морфизмов	93

1. Введение

В настоящей статье вводится общая алгебраическая концепция пространства с движением. Такое пространство состоит из множества X , рассматриваемого вместе с семейством групповых действий $G_\alpha \curvearrowright X_\alpha$, где G_α — группа, действующая на подмножестве из $X_\alpha \subseteq X$. Допускается, что на данном подмножестве из X действует несколько различных групп. Групповые действия нумеруются элементами α из некоторого индексного множества Φ , называемого координатной системой. Мы структурируем множество групповых действий $\{G_\alpha \curvearrowright X_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$, снабжая Φ транзитивным рефлексивным отношением $\leq$ и требуя, чтобы группы G_α определяли функтор $G: \Phi \rightarrow \{\text{группы}\}$, $\alpha \mapsto G_\alpha$, удовлетворяющий следующему условию: если $\sigma \in G_\alpha$ и ρ — его образ в G_β при гомоморфизме $G_{\alpha \leq \beta}$, то для любого $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ выполняется равенство $\sigma x = \rho x$. Результирующая тройка (Φ, G, X) называется глобальным действием. Движение вводится с помощью понятия пути. Путь — это такая последовательность $x_0, \dots, x_p$ точек из X , что для каждого $0 \leq i \leq p-1$ найдется координата $\alpha_i \in \Phi$ со следующим свойством: $x_i, x_{i+1} \in X_{\alpha_i}$ и $\sigma_i x_i = x_{i+1}$ для некоторого $\sigma_i \in G_{\alpha_i}$. Оказывается, что существует такое глобальное действие L , называемое линейным действием, что пути в данном глобальном действии A определяются морфизмами из L в A . Мы будем использовать эту естественную и интуитивно ясную конструкцию для того, чтобы перенести в алгебру весь опыт работы с путями в топологических пространствах. Одним из следствий этой программы будет гомотопическая теория для алгебраических структур, включающая в себя естественное, интуитивно ясное и, в то же время, строгое понятие алгебраической деформации морфизмов. Для реализации этой цели необходимо создать две важные конструкции, и обе они находят отражение в настоящей статье. Прежде всего, требуется показать, как превратить в глобальное действие множество $\text{Mor}(A, B)$ всех морфизмов из глобального действия A в глобальное действие B . Такая конструкция позволяет продеформировать мор-

физм $f: A \rightarrow B$ в морфизм $g: A \rightarrow B$ с помощью пути из f в g . Во вторых, необходимо сформулировать для глобальных действий общее условие, гарантирующее, что экспоненциальное отображение $E: \text{Mog}(A, \text{Mog}(B, C)) \rightarrow \text{Mog}(A \times B, C)$ является изоморфизмом глобальных действий. В результате мы получаем, что цилиндрический метод для деформации морфизма f в морфизм g эквивалентен процедуре, использующей упоминавшиеся выше пути. С помощью этой эквивалентности можно развить основные конструкции и принципы алгебраической гомотопической теории, копирующие их топологические аналоги. Это будет сделано в следующей статье.

Чтобы применить алгебраическую гомотопическую теорию к деформации морфизмов в произвольных категориях, требуется понятие глобального объекта. Это понятие также вводится в настоящей статье. Оно обобщает на произвольную категорию понятие глобального действия и позволяет раскрыть глубину и перспективы этого понятия.

За пределами чистой математики глобальные объекты и действия доставляют новую среду и язык для моделирования проблем физики, химии, биологии и технических наук.

Статья организована следующим образом. Во втором параграфе вводится понятие глобального действия, которое иллюстрируется многочисленными примерами. Среди них упоминавшееся выше глобальное действие L , некоторые примеры, происходящие из геометрии, а также глобальные действия, которые мы назвали моделями Володина. Модели Володина будут использоваться в следующей статье для алгебраического определения высших K -групп Володина и для разработки алгебраических основ алгебраической K -теории. Затем мы вводим понятие глобального объекта и представления глобальных объектов глобальными действиями. Приведены несколько примеров, показывающих, что происходящие из геометрии глобальные действия, описанные в начале параграфа, являются представлениями глобальных симплициальных комплексов, т.е. глобальных объектов в категории (абстрактных) симплициальных комплексов. Параграф завершается двумя результатами, которые описывают functorиальную конструкцию для построения глобальных объектов из примитивных данных. Эта конструкция окажется весьма полезной для разработки теории деформаций морфизмов в произвольных категориях.

В третьем параграфе изучается понятие морфизма глобальных действий. Рассматривается общее понятие морфизма, а также два его важных частных случая – нормальные и регулярные морфизмы. Регулярные морфизмы доставляют нам самое сильное понятие морфизма и сохраняют все структурные элементы в определении глобальных действий. Общее понятие морфизма учитывает действия индивидуальных групп, но не отражает связей между действиями, задаваемых транзитивным рефлексивным отношением на координатной системе Φ и групповым функтором G . Нормальные морфизмы лежат где-то между регулярными и общими морфизмами. Все регулярные морфизмы нормальны; обратное, в общем случае, не верно.

Вначале мы определим общее понятие морфизма, а затем – регулярные морфизмы. Вводится понятие карты, которое используется для определения структуры глобального действия на множестве $\text{Mog}(A, B)$ всех морфизмов из глобального действия A в глобальное действие B . Как глобальное действие $\text{Mog}(A, B)$ является контравариантным функтором по первому аргументу, однако он не определен для всех морфизмов по второму аргументу. Мы вводим понятие нормального морфизма так, что $\text{Mog}(A, B)$ становится ковариантным функтором по второму аргументу относительно этих морфизмов. Это обстоятельство будет очень полезно для алгебраической гомотопической теории, поскольку оно позволит доказать, что алгебраические гомотопические груп-

пы функториальны относительно обширного класса нормальных морфизмов, называемых ∞ - L -морфизмами. Затем мы вводим глобальные действия с нижней гранью и сильной нижней гранью. Модели Володина, а также глобальные действия, происходящие из геометрии, являются естественными примерами глобальных действий с сильной нижней гранью. Показано, что любой морфизм, область значений которого – действие с нижней гранью или сильной нижней гранью, является ∞ -нормальным и что экспоненциальный морфизм $E: \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \times B, C)$ является ∞ -нормальным изоморфизмом для действия C с нижней гранью и регулярным изоморфизмом для действия C с сильной нижней гранью. Эти результаты также потребуются нам для разработки алгебраической гомотопической теории.

В четвертом параграфе вводятся понятия поддействия и относительного действия. Относительное действие – это пара, состоящая из глобального действия и его поддействия. Относительные действия являются неотъемлемой составной частью гомотопической теории глобальных действий. В четвертом параграфе для относительных действий полностью повторяется вся программа, которая была разработана в предыдущем параграфе для глобальных действий. Детали здесь не столь рутинны, как в случае топологических пространств. Дополнительные сложности возникают в связи с понятием относительной карты, которая нужна для задания относительной глобальной структуры на множестве $\text{Mor}(A, B)$ всех морфизмов из относительного действия A в относительное действие B . Относительные карты – более сложный объект, чем их абсолютный аналог, и эта дополнительная сложность проходит через весь параграф. Полученные в нем результаты полностью аналогичны результатам третьего параграфа.

Настоящая статья написана в элементарном стиле и является самозамкнутой. Для ее понимания требуются простейшие понятия, относящиеся к множествам, группам, симплициальным комплексам и категориям. Полезно знакомство с алгебраической топологией и алгебраической K -теорией.

Мне очень приятно выразить благодарность CONICET-DAAD и моему аргентинскому коллеге Гиермо Кортинасу за возможность прочесть курс по глобальным действиям и неабелевой K -теории в университетах Буэнос Айреса и Ла Платы в 1995 г. Я особо признателен Элизабет Д'Альфонсо, которая записала мои лекции – эти записи были очень полезны при подготовке настоящей статьи. Кроме того, я обязан Алексею Степанову, чьи конспекты моего семинара по глобальным действиям также были для меня очень полезны.

2. Глобальные действия

Глобальное действие – это алгебраический объект, который собирается или склеивается из различных групповых действий. Глобальное действие напоминает те хорошо известные математические объекты, которые получаются путем сборки из простых строительных блоков и, в результате, образуют сложные структуры. Примерами таких объектов являются симплициальные комплексы, строительными блоками которых служат симплексы, клеточные комплексы, составленные из замкнутых дисков, многообразия, в которых строительные блоки – это открытые диски фиксированной размерности, и алгебраические многообразия (соответственно, схемы), где строительные блоки – это аффинные алгебраические многообразия (соответственно, аффинные схемы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Глобальным действием называется семейство $\{G_\alpha X_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ групп G_α , действующих на подмножествах X_α некоторого множества $|X|$ и удовлетво-

ряющих следующим условиям.

(2.1.1) Множество индексов Φ снабжено транзитивным и рефлексивным отношением $\leq$. Если $\leq$ является отношением частичного порядка, т.е. если из условий $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$ вытекает, что $\alpha = \beta$, то глобальное действие называется *частично упорядоченным действием*.

Множество Φ с отношением $\leq$ будет часто рассматриваться как категория. В таком случае для любых двух объектов $\alpha, \beta \in \Phi$ существует по крайней мере один морфизм $\alpha \leq \beta$. Если одновременно $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то эти морфизмы считаются взаимно обратными.

(2.1.2) В общем случае функция $X: \Phi \rightarrow \{\text{подмножества из } |X|\}, \alpha \mapsto X_\alpha$, не имеет каких-либо специальных свойств. Если же отношение $\leq$ является отношением частичного порядка, а множество подмножеств из $|X|$ рассматривается как частично упорядоченное по включению, и если упомянутая функция X обращает порядок, то глобальное действие называется *контравариантным*.

(2.1.3) Сопоставление $G: \Phi \rightarrow \{\text{группы}\}, \alpha \mapsto G_\alpha$ является ковариантным функтором.

(2.1.4) *Условие согласованности*. Если $\alpha \leq \beta$, то группа G_α оставляет инвариантным множество $X_\alpha \cap X_\beta$ и для всех $\sigma \in G_\alpha$ и $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ выполняется соотношение $\sigma x = G_{\alpha \leq \beta}(\sigma)x$. (Отметим, что для пустого множества $X_\alpha \cap X_\beta$ условие согласованности выполняется автоматически.)

Множество Φ называется *координатной системой действия*, а любой элемент из Φ называется *координатой*. Функтор G называется *глобальным групповым функтором* действия, функция X называется *глобальной функцией множеств*, $|X|$ называется *обертывающим множеством*. Если α – некоторая координата, то G_α называется локальной группой, а X_α – локальным множеством, отвечающим α . Пусть $x \in |X|$. Будем говорить, что локальная группа G_α или же элемент $\sigma \in G_\alpha$ определены в точке x , если $x \in X_\alpha$. *Групповым элементом* глобального действия называем элемент некоторой локальной группы G_α .

ЗАМЕЧАНИЕ. Многие глобальные действия обладают дополнительным свойством: $|X| = \bigcup_{\alpha \in \Phi} X_\alpha$ или даже $|X| = X_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Phi$. Если же у глобального действия это свойство отсутствует, то его можно получить, добавив к Φ такой элемент $*$, что $* < \alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$, и затем положив $X_* = |X|$ и $G_* = \{1\}$. Однако это добавление может несколько изменить структуру глобального действия – мы убедимся в этом на примере ∞ -экспоненциального действия (3.18), а также при доказательстве теоремы 3.23.

Разрешается, чтобы для некоторых координат α выполнялось условие $X_\alpha = \emptyset$. Это удобно в некоторых конструкциях, поскольку отпадает необходимость проверять всякий раз, является ли X_α непустым множеством.

Приведем теперь несколько примеров, иллюстрирующих понятие глобального действия.

ПРИМЕР 2.2. Пусть G – группа, действующая на множестве $|X|$, и Φ – множество, индексирующее совокупность $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ всех ее подгрупп. Будем считать, что $G_\alpha = G_\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Частично упорядочим множество $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ по включению и зададим на Φ индуцированное отношение частичного порядка. Ясно, что соответствие $\alpha \mapsto G_\alpha$ задает функтор $\Phi \rightarrow \{\text{группы}\}$. Определим функцию $X: \Phi \rightarrow \{\text{подмножества из } |X|\}$, полагая $X_\alpha = |X|$ для всех $\alpha \in \Phi$. В результате мы получим глобальное контравариантное действие (Φ, G, X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Предположим, что в примере 2.2 в качестве множества $|X|$ взята сама группа G и что G действует на $|X|$ умножением. Кроме того, предположим, что $G_* = \{1\}$ для некоторого $*$ $\in \Phi$, множество $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ замкнуто относительно пересечений и что выполняется следующее условие: если G_α и G_β содержатся в некоторой подгруппе G_γ , то подгруппа $(G_\alpha, G_\beta) \subset G$, порожденная G_α и G_β совпадает с подгруппой G_γ . Тогда глобальное действие (Φ, G, X) называется *моделью Володина*. (Это название объясняется тем, что К-группы Володина для колец или для колец с инволюцией представляют собой алгебраические гомотопические группы некоторых моделей Володина, см. §6. Замкнутость множества $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ относительно пересечений используется при доказательстве совпадения алгебраических гомотопических групп модели Володина с обычными гомотопическими группами.)

Пусть U – некоторое множество. Положим

$$\text{Perm}(U) = \text{Aut}_{\text{sets}}(U)$$

$$f \text{ Perm}(U) = \{\sigma \in \text{Perm}(U) \mid \sigma \text{ оставляет неподвижными почти все элементы из } U\}.$$

Если U – линейно упорядоченное множество, обозначим через $c \text{ Perm}(U)$ циклическую подгруппу из $\text{Perm}(U)$, порожденную перестановкой, которая переводит каждый элемент из U , за исключением последнего, в следующий за ним элемент, а последний элемент – в первый.

ПРИМЕР 2.4. В этом примере мы рассмотрим так называемое *линейное действие*; оно будет играть важную роль в гомотопической теории глобальных действий. Пусть $\Phi = \mathbb{Z} \cup \{*\}$. Зададим на Φ структуру частично упорядоченного множества, считая элементы из $\mathbb{Z}$ несравнимыми и $*$ $\leq n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Положим $|X| = \mathbb{Z}$ и зададим функцию $X: \Phi \rightarrow \{\text{подмножества } |X|\}$, правилом $\alpha = n \mapsto \{n, n+1\}$, $\alpha = * \mapsto |X|$, а функтор $G: \Phi \rightarrow \{\text{группы}\}$ – правилом $\alpha = n \mapsto G_\alpha = \text{Perm}(\{n, n+1\})$, $\alpha = * \mapsto G_\alpha = \{1\}$. Тогда тройка (Φ, G, X) является контравариантным действием.

Рассмотренный пример допускает следующее обобщение.

ПРИМЕР 2.5. Пусть S – абстрактный симплицальный комплекс и $|X|$ – множество вершин S . Если α – подкомплекс из S , обозначим через X_α множество его вершин. Назовем подкомплекс α простым, если X_α допускает разбиение на такие подмножества из U , что каждому конечному подмножеству из U отвечает симплекс и что вершины любого симплекса из α лежат в некотором U . Ясно, что если α – простой подкомплекс, то такое разбиение единственно; мы обозначим его через $\text{Part}(X_\alpha)$. Определим теперь Φ как множество всех простых подкомплексов из S . Частично упорядочим Φ , полагая $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда $X_\alpha \supseteq X_\beta$ и каждый элемент из $\text{Part}(X_\beta)$ является объединением элементов из $\text{Part}(X_\alpha)$. Очевидно, что подкомплекс с множеством вершин $|X|$ представляет собой наименьший элемент в Φ . Для $\alpha \in \Phi$ положим

$$G_\alpha = \prod_{U \in \text{Part}(X_\alpha)} \text{Perm}(U),$$

$$fG_\alpha = \prod_{U \in \text{Part}(X_\alpha)} f \text{ Perm}(U).$$

На множествах X_α существует каноническое действие групп G_α (соответственно fG_α), определяемое действием каждой из групп перестановок $\text{Perm}(U)$ (соответственно $f \text{ Perm}(U)$) на своем множестве U . Положим по определению

$$\text{gl}(S) = (\Phi, G, X),$$

$$f \text{ gl}(S) = (\Phi, fG, X).$$

Тогда $\text{gl}(S)$ и $f \text{gl}(S)$ являются глобальными действиями; мы назовем их *симплициальными действиями*.

Линейно упорядочим вершины $|X|$ симплициального комплекса S и обозначим через $c\Phi$ подмножество в Φ , состоящее из тех простых подкомплексов α , у которых $\text{Part}(X_\alpha)$ содержит только конечные множества. Ясно, что наименьший элемент $*$ из Φ лежит в $c\Phi$. Зададим на $c\Phi$ новое частичное упорядочение, полагая $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha = *$. Таким образом, если $\alpha \neq * \neq \beta$, то или $\alpha = \beta$, или же α и β несравнимы. Пусть $\alpha \in c\Phi$. Положим

$$\begin{aligned} (cX)_\alpha &= X_\alpha, \\ cG_\alpha &= \prod_{U \in \text{Part}(X_\alpha)} c \text{Perm}(U), \\ c \text{gl}(S) &= (c\Phi, cG, cX). \end{aligned}$$

Тройка $c \text{gl}(S)$ называется *циклическим симплициальным действием*.

Чтобы подготовиться к более сложным примерам, напомним некоторые понятия из теории категорий.

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория, O – объект из $\mathcal{C}$ и $O' \rightarrow O$ – подобъект объекта O . Говорят, что автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O)$ *оставляет O' инвариантным*, если найдется такой автоморфизм $\rho \in \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O')$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} O' & \xrightarrow{\quad} & O \\ \rho \downarrow & & \downarrow \sigma \\ O' & \xrightarrow{\quad} & O \end{array}$$

Ясно, что если автоморфизм ρ существует, то он определяется единственным образом. Множество всех автоморфизмов объекта O , оставляющих инвариантным подобъект O' , образует подгруппу

$$\text{Stab}_O(O')$$

в $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(O)$, называемую *стабилизатором O' в O* . Существует канонический гомоморфизм

$$\begin{aligned} \text{Stab}_O(O') &\rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O'), \\ \sigma &\mapsto \rho. \end{aligned}$$

Пусть P – некоторый объект из $\mathcal{C}$. Назовем *P -точкой* в $\mathcal{C}$ элемент $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, O)$, где O – произвольный объект. Для фиксированного P понятие P -точки позволяет связать с любым объектом O из $\mathcal{C}$ *подстилающее множество* $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, O)$ всех его *P -точек*. Более того, для любого множества $\mathcal{P}$ объектов из $\mathcal{C}$ (в предположении, что никакие два различных объекта из $\mathcal{P}$ не изоморфны) можно определить *подстилающее множество $\mathcal{P}$ -точек* объекта O как $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, O)$. Если $O' \rightarrow O$ – подобъект, то существует каноническое вложение множеств

$$\mathcal{P}\text{-точки}(O') \subseteq \mathcal{P}\text{-точки}(O).$$

Обобщим теперь понятие глобального действия, определив так называемый глобальный объект, и разовьем метод для построения глобальных объектов из простых данных. Это позволит нам получить много содержательных примеров глобальных объектов и глобальных действий и даст возможность применить методы глобальных действий к различным задачам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория. *Глобальный объект* в $\mathcal{C}$ состоит из множества $\{O_\alpha \twoheadrightarrow O \mid \alpha \in \Phi\}$ подобъектов $O_\alpha \twoheadrightarrow O$ объекта O и множества $\{G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha) \mid \alpha \in \Phi\}$ групп G_α и гомоморфизмов $G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha)$, удовлетворяющих следующим условиям.

(2.6.1) Множество Φ снабжено транзитивным рефлексивным отношением $\leq$. Если $\leq$ является отношением частичного порядка, то глобальный объект называется *частично упорядоченным объектом*.

(2.6.2) Функция $O : \Phi \longrightarrow \{\text{подобъекты}(O)\}$, $\alpha \mapsto (O_\alpha \twoheadrightarrow O)$, в общем случае не имеет каких-либо специальных свойств. Если же отношение $\leq$ является отношением частичного порядка, а на множестве подобъектов в O задано каноническое транзитивное рефлексивное отношение, индуцированное включением подобъектов, и если функция O обращает отношения, то глобальный объект называется *контравариантным*.

(2.6.3) Сопоставление $G : \Phi \longrightarrow \{\text{группы}\}$, $\alpha \mapsto G_\alpha$, является ковариантным функцией.

(2.6.4) *Условие согласованности.* Если $\alpha \leq \beta$, то в категории $\mathcal{C}$ существуют расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} O_\alpha \cap O_\beta & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & O_\alpha \\ \varphi_\beta \downarrow & & \downarrow \\ O_\beta & \xrightarrow{\quad} & O \end{array}$$

и такой (однозначно определенный) гомоморфизм $G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha \cap O_\beta)$, что морфизмы φ_α и φ_β G_α -эквивариантны.

С точки зрения этого определения глобальное действие есть не что иное, как глобальное множество (глобальный объект в категории множеств).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть (Φ, G, O) – глобальный объект в категории $\mathcal{C}$ и P – множество объектов из $\mathcal{C}$. Назовем P -представлением глобального объекта (Φ, G, O) множество $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Phi, X_\alpha \subseteq P\text{-точки}(O_\alpha), X_\alpha \text{ является } G_\alpha\text{-инвариантным}\}$. *Каноническое P -представление* глобального объекта (Φ, G, O) – это множество $\{P\text{-точки } O_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$. Легко проверить, что тройка (Φ, G, X) является глобальным действием. Каноническое P -представление контравариантного объекта является контравариантным действием, для произвольного же P -представления это свойство, вообще говоря, не выполняется.

ПРИМЕР 2.8. Пусть $\mathcal{C}$ – категория абстрактных симплициальных комплексов, S – некоторый объект из $\mathcal{C}$. Определим множество Φ так же, как в примере 2.5 и для каждого $\alpha \in \Phi$ положим $S_\alpha = \alpha$. Таким образом, S_α – это простой подкомплекс комплекса S . Пусть G_α и fG_α определены так же, как в 2.5. Тогда G_α и fG_α являются подгруппами групп автоморфизмов $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(S_\alpha)$. Без труда проверяется, что (Φ, G, S) и (Φ, fG, S) – глобальные симплициальные комплексы. Кроме того, если P – симплициальный комплекс ровно с одной вершиной, то каноническое представление объекта (Φ, G, S) (соответственно (Φ, fG, S)) есть не что иное, как глобальное действие $\text{gl}(S)$ (соответственно $f\text{gl}(S)$), определенное в 2.5.

Пусть множество $c\Phi$ определено так же, как в примере 2.5. Для каждого $\alpha \in c\Phi$ положим $(cS)_\alpha = \alpha$. Тогда тройка $(c\Phi, cG, cS)$ является глобальным симплициальным комплексом, а его каноническое P -представление есть глобальное действие $c\text{gl}(S)$, определенное в 2.5.

Следующий метод построения глобальных объектов из локальных данных обобщает пример 2.2 и оказывается весьма полезным в приложениях.

КОНСТРУКЦИЯ–ЛЕММА 2.9. Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория и O – объект из $\mathcal{C}$.

(2.9.1) Глобальные данные для O состоят из множества подобъектов $\{O_\alpha \rightarrowtail O \mid \alpha \in \Phi\}$ и множества подгрупп $\{G_\alpha \subseteq \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha) \mid \alpha \in \Phi\}$.

(2.9.2) Для фиксированных глобальных данных определим транзитивное рефлексивное отношение $\leq_{cc}$ на Φ , называемое каноническим контравариантным отношением. Будем считать, что $\alpha \leq_{cc} \beta$ тогда и только тогда, когда существует такая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} O_\alpha & \xrightarrow{\quad} & O \\ \uparrow & \nearrow & \\ O_\beta & & \end{array}$$

что $G_\alpha \subseteq \text{Stab}_{O_\alpha}(O_\beta)$ и образ канонического гомоморфизма $G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\beta)$ лежит в G_β . Прямая проверка показывает, что тройка (Φ, G, O) является глобальным объектом с контравариантным функтором $O: \Phi \rightarrow \{\text{подобъекты в } O\}$. Кроме того, если $\leq$ – такое транзитивное отношение на Φ , что $((\Phi, \leq), G, O)$ – глобальный объект с контравариантным функтором $O: \Phi \rightarrow \{\text{подобъекты в } O\}$, то тождественное отображение $\Phi \rightarrow \Phi$ является морфизмом $(\Phi, \leq) \rightarrow (\Phi, \leq_{cc})$ частично упорядоченных множеств.

(2.9.3) Оставляя без изменения глобальные данные, определим на Φ рефлексивное отношение $\leq_{cr}$, называемое каноническим отношением. Положим по определению, что $\alpha \leq_{cr} \beta$ тогда и только тогда, когда в категории $\mathcal{C}$ найдется такое расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} O_\beta \cap O_\alpha & \xrightarrow{\quad} & O_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ O_\beta & \xrightarrow{\quad} & O \end{array}$$

что группы G_α и G_β содержатся в $\text{Stab}_{O_\alpha}(O_\beta \cap O_\alpha)$, канонический гомоморфизм $G_\beta \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\beta \cap O_\alpha)$ инъективен и образ $(G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\beta \cap O_\alpha))$ содержится в образе предыдущего гомоморфизма. Следовательно, если $\alpha \leq_{cr} \beta$, то существует такой единственный гомоморфизм $G_\alpha \rightarrow G_\beta$, что морфизм $O_\beta \cap O_\alpha \rightarrow O_\beta$ является G_α -эквивариантным. Пусть $\leq$ – некоторое транзитивное рефлексивное подотношение отношения $\leq_{cr}$, например, определенное выше отношение $\leq_{cc}$. Предположим, что Φ наделено отношением $\leq$. Прямая проверка показывает, что тройка (Φ, G, O) – глобальный объект. Более того, если $\leq$ – произвольное транзитивное рефлексивное отношение на Φ , такое что $((\Phi, \leq), G, O)$ – глобальный объект, то тождественное отображение $\Phi \rightarrow \Phi$ является морфизмом отношений $(\Phi, \leq) \rightarrow (\Phi, \leq_{cr})$. В частности, таким морфизмом является $(\Phi, \leq_{cc}) \rightarrow (\Phi, \leq_{cr})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственными утверждениями, которые нужно доказать, являются утверждения, касающиеся отношений $\leq_{cc}$ из (2.9.2) и $\leq_{cr}$ из (2.9.3). Поскольку доказательства в том и другом случае аналогичны, мы ограничимся лишь отношением $\leq_{cc}$. Предположим, что $\alpha \leq \beta$. Из контравариантности следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
O_\alpha & \xrightarrow{\quad} & O \\
\uparrow & \nearrow & \\
O_\beta & &
\end{array}$$

В силу условия согласованности (2.6.4) морфизм $O_\beta \rightarrow O_\alpha$ является G_α -эквивариантным. Но это означает, что группа G_α оставляет инвариантным подобъект O_β . Далее, ясно, что образ гомоморфизма $G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha)$ должен лежать в G_β , поскольку существует ровно один гомоморфизм $G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha)$, для которого $O_\beta \rightarrow O_\alpha$ является G_α -эквивариантным морфизмом. Следовательно, $\alpha \leq_{cc} \beta$, что и требовалось доказать.

Пусть Ψ – некоторое множество индексов, O – объект категории $\mathcal{C}$ и $O: \Psi \rightarrow \{\text{подобъекты в } (O)\}$, $\alpha \mapsto (O_\alpha \rightarrow O)$ – соответствующая функция. Обозначим через $\text{Sub}_\Psi(O)$ категорию, объектами которой являются семейства $\{O_\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$, а морфизмами – те единственные морфизмы подобъектов $O_\alpha \rightarrow O_\beta$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
O_\alpha & \xrightarrow{\quad} & O_\beta \\
& \searrow & \nearrow \\
& O &
\end{array}$$

Если $S \subseteq \text{Sub}_\Psi(O)$ – некоторая подкатегория и если в $\mathcal{S}$ существует копредел $\text{colim } S$, то имеется канонический морфизм $\text{colim } S \rightarrow O$.

Следующий метод построения глобальных объектов является обобщением метода, изложенного в примере 2.8.

КОНСТРУКЦИЯ–ЛЕММА 2.10. Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория и O – ее объект.

(2.10.1) Рассмотрим множество $\{O_\alpha \rightarrow O \mid \alpha \in \Phi\}$ всех подобъектов $O_\alpha \rightarrow O$ объекта O . Для каждого $\alpha \in \Phi$ обозначим через $\{O_{\alpha,i} \rightarrow O_\alpha \mid (\alpha,i) \in \Phi_\alpha\}$ множество подобъектов $O_{\alpha,i} \rightarrow O_\alpha$ объекта O_α , обладающих следующим свойством: в $\text{Sub}_{\Phi_\alpha}(O_\alpha)$ найдется подкатегория $S_\alpha \subseteq \text{Sub}_{\Phi_\alpha}(O_\alpha)$, для которой в $\mathcal{S}$ существует копредел $\text{colim}(S_\alpha)$, причем канонический морфизм $\text{colim}(S_\alpha) \rightarrow O_\alpha$ является изоморфизмом. Положим $G_\alpha = \{\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha) \mid \sigma \in \text{Stab}_{O_\alpha}(O_{\alpha,i}) \forall (\alpha,i) \in \Phi_\alpha\}$. Тогда множества $\{O_\alpha \rightarrow O \mid \alpha \in \Phi\}$ и $\{G_\alpha \subseteq \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha) \mid \alpha \in \Phi\}$ определяют глобальные данные в смысле (2.9.1).

(2.10.2) Отправляясь от этих глобальных данных, определим на Φ следующее транзитивное рефлексивное отношение $\leq_{cc}$. Будем считать, что $\alpha \leq_{cc} \beta$ в том и только в том случае, когда найдется такая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
O_\alpha & \xrightarrow{\quad} & O \\
\uparrow & \nearrow & \\
O_\beta & &
\end{array}$$

что для каждого $(\beta,j) \in \Phi_\beta$ объект $O_{\beta,j}$ является копределом семейства подобъектов $O_{\alpha,i} \rightarrow O_{\beta,j}$, входящих в следующий коммутативный квадрат:

$$\begin{array}{ccc}
O_{\alpha,i} & \xrightarrow{\quad} & O_\alpha \\
\downarrow & & \downarrow \\
O_{\beta,j} & \xrightarrow{\quad} & O_\beta
\end{array}$$

Из этого определения вытекает, что $G_\alpha \subseteq \text{Stab}_{O_\alpha}(O_\beta)$ и образ канонического гомоморфизма $G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\beta)$ содержится в G_β . Применяя (2.9.2), мы

получаем, что тройка (Φ, G, O) является глобальным объектом с контравариантным O .

(2.10.3) Используя те же самые глобальные данные, что и выше, введем на Φ рефлексивное отношение $\leq_{cr}$. По определению $\alpha \leq_{cr} \beta$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{C}$ найдется такое расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} O_\alpha \cap O_\beta & \xrightarrow{\quad} & O_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ O_\beta & \xrightarrow{\quad} & O \end{array}$$

что $O_\beta \cap O_\alpha$ является копределом семейства подобъектов $O_{\alpha,i} \rightarrow O_\alpha \cap O_\beta$ (соответственно $O_{\beta,j} \rightarrow O_\alpha \cap O_\beta$), для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} O_\alpha \cap O_\beta & \xrightarrow{\quad} & O_\alpha \\ \uparrow & \nearrow & \\ O_{\alpha,i} & & \end{array}$$

соответственно

$$\begin{array}{ccc} O_\alpha \cap O_\beta & \xrightarrow{\quad} & O_\beta \\ \uparrow & \nearrow & \\ O_{\beta,j} & & \end{array}$$

канонический гомоморфизм $G_\beta \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha \cap O_\beta)$ инъективен и образ $(G_\alpha \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(O_\alpha \cap O_\beta))$ содержится в образе предыдущего гомоморфизма. Пусть $\leq$ – некоторое транзитивное рефлексивное подотношение отношения $\leq_{cr}$, например, определенное выше отношение $\leq_{cc}$. Снабдим Φ этим отношением $\leq$. Применяя (2.9.3), мы получаем, что тройка (Φ, G, O) является глобальным объектом. Кроме того, тождественное отображение $\Phi \rightarrow \Phi$ индуцирует морфизм отношений $(\Phi, \leq) \rightarrow (\Phi, \leq_{cr})$.

3. Морфизмы и пространства морфизмов

В этом параграфе мы определим понятие морфизма глобальных действий и выделим два важных специальных класса морфизмов – так называемые нормальные и регулярные морфизмы. На множестве $\text{Mor}(A, B)$ всех морфизмов из глобального действия A в глобальное действие B мы зададим структуру глобального действия, превращающую $\text{Mor}(\cdot, \cdot)$ в контравариантный функтор по первому аргументу относительно всех морфизмов и в ковариантный функтор по второму аргументу относительно нормальных морфизмов.

Регулярные морфизмы – самые “жесткие” из всех морфизмов и сохраняют все существенные структурные элементы в определении глобального действия. Два регулярно изоморфных глобальных действия по-существу идентичны. С другой стороны, изоморфные регулярные действия могут резко различаться, так как их структуры не обязаны быть взаимно однозначными. Например, такие действия могут иметь различные высшие алгебраические гомотопические группы, поскольку конструкция таких групп является функториальной только относительно некоторого класса морфизмов, содержащего регулярные морфизмы. Этот класс называется классом ∞ - L -нормальных морфизмов и будет также определен ниже.

Понятие морфизма зависит от понятий пути, локального пути и локального репера.

Пусть A – глобальное действие. Обозначим через Φ_A его координатную систему, G_A – глобальный групповой функтор, X_A – глобальную функцию множеств и через $|A|$ – обертывающее множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть A – глобальное действие.

(3.1.1) *Путем* в A называется такая последовательность точек $x_0, \dots, x_p$ из $|A|$, что для каждого i ($0 \leq i \leq p-1$) существует групповой элемент g_i , определенный в x_i и удовлетворяющий соотношению $g_i x_i = x_{i+1}$. Если $0 = p$, то подразумевается, что x_0 лежит в некотором локальном множестве $(X_A)_\alpha$.

(3.1.2) *Локальным путем* в $\alpha \in \Phi_A$ называется такой путь $x_0, \dots, x_p$ в A , что все $x_i \in (X_A)_\alpha$ и все $g_i \in (G_A)_\alpha$. (Очевидно, что если $x_0, \dots, x_p$ – локальный путь и π – произвольная подстановка из $(p+1)$ элемента, то $x_{\pi(x_0)}, \dots, x_{\pi(x_p)}$ – также локальный путь.)

(3.1.3) Пусть $x \in (X_A)_\alpha$. *Локальным репером* в точке x для индекса α или, короче, α -репером в x называется такая последовательность точек $x = x_0, \dots, x_p$ из $(X_A)_\alpha$, что для каждого i ($1 \leq i \leq p$) существует элемент $g_i \in (G_A)_\alpha$, для которого $g_i x = x_i$. (Очевидно, что $x, x_1, \dots, x_p$ является α -репером в x тогда и только тогда, когда $x, x_1, \dots, x_p$ – локальный путь в α .)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Морфизмом* $f: A \rightarrow B$ глобальных действий называется функция $f: |A| \rightarrow |B|$, которая сохраняет локальные реперы или, что эквивалентно, локальные пути. Это означает, что если $x_0, \dots, x_p$ – некоторый α -репер в точке x_0 , то $f(x_0), \dots, f(x_p)$ является β -репером для некоторого $\beta \in \Phi_B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Регулярным морфизмом* $\eta: A \rightarrow B$ глобальных действий называется тройка $(\eta_\Phi, \eta_G, \eta_X)$, удовлетворяющая следующим условиям.

(3.3.1) $\eta_\Phi: \Phi_A \rightarrow \Phi_B$ – функция, сохраняющая отношения, т.е. ковариантный функтор.

(3.3.2) $\eta_G: G_A \rightarrow (G_B)_{\eta_\Phi(\cdot)}$ – естественное преобразование функтором на Φ_A , где $(G_B)_{\eta_\Phi(\cdot)}$ означает композицию η_Φ и G_B .

(3.3.3) $\eta_X: |A| \rightarrow |B|$ – такая функция, что $\eta_X((X_A)_\alpha) \subseteq (X_B)_{\eta_\Phi(\alpha)}$ для всех $\alpha \in \Phi_A$.

(3.3.4) Для каждого $\alpha \in \Phi_A$, пара $(\eta_G, \eta_X): (G_A)_\alpha \curvearrowright (X_A)_\alpha \rightarrow (G_B)_{\eta_\Phi(\alpha)} \curvearrowright (X_B)_{\eta_\Phi(\alpha)}$ является морфизмом групповых действий, т.е. для всех $\sigma \in (G_A)_\alpha$ и $x \in (X_A)_\alpha$ выполняется соотношение $\eta_X(\alpha)(g\sigma) = \eta_G(\alpha)(\sigma)(\eta_X(\alpha)(x))$. (Отсюда следует, в частности, что регулярный морфизм является морфизмом глобальных действий в смысле определения 3.2).

Регулярным изоморфизмом $\eta: A \rightarrow B$ называется регулярный морфизм, для которого существует регулярный морфизм $\eta': B \rightarrow A$ (называемый *регулярным обратным* для η) со следующими свойствами: η'_Φ является обратным для η_Φ , η'_G – обратным для η_G , и для каждого $\alpha \in \Phi_A$ композиция $\eta'_G(\eta_\Phi(\alpha))$ является обратной для $\eta_G(\alpha)$.

Разумеется, регулярный морфизм, являющийся изоморфизмом, в общем случае не будет регулярным изоморфизмом.

Для того чтобы задать на множестве $\text{Mor}(A, B)$ всех морфизмов из глобального действия A в глобальное действие B структуру глобального действия, нам понадобится понятие карты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть A и B – глобальные действия. Назовем A -*картой* в B пару (f, β) , состоящую из морфизма глобальных действий $f: A \rightarrow B$ и функции $\beta: |A| \rightarrow \Phi_B$, подчиненных следующим условиям.

(3.4.1) $f(x) \in (X_B)_{\beta(x)}$ для $x \in |A|$.

(3.4.2) Если $x, x_1, \dots, x_p$ – некоторый α -репер в точке $x \in |A|$, то $f(x), f(x_1), \dots, f(x_p)$ является b -репером в точке $f(x)$ для некоторого $b \geq \beta(x), \beta(x_1), \dots, \beta(x_p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ–ЛЕММА 3.5. Пусть (f, β) – некоторая A -карта в B . Для

$$\sigma = (\sigma_x) \in \prod_{x \in |A|} (G_B)_{\beta(x)}$$

положим

$$\sigma f: |A| \rightarrow |B|, \quad x \mapsto \sigma_x f(x).$$

Тогда σf есть морфизм $A \rightarrow B$ глобальных действий, а $(\sigma f, \beta)$ – некоторая A -карта в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\sigma_x \in (G_B)_{\beta(x)}$, то композиция $\sigma f(x) \in (X_B)_{\beta(x)}$. Следовательно, пара $(\sigma f, \beta)$ удовлетворяет условию (3.4.1). Поэтому, чтобы доказать лемму, достаточно проверить выполнение условия (3.4.2). Пусть $x_0, \dots, x_p$ – локальный репер в точке $x_0 \in |A|$. По определению, $f(x_0), \dots, f(x_p)$ является b -репером в точке $f(x_0)$ для некоторого $b \geq \beta(x_0), \dots, \beta(x_p)$. Обозначим через $\rho_{x_0}, \dots, \rho_{x_p}$ соответственно образы элементов $\sigma_{x_0}, \dots, \sigma_{x_p}$ из $(G_B)_b$ при канонических гомоморфизмах $(G_B)_{\beta(x_i)} \rightarrow (G_B)_b$ ($0 \leq i \leq p$). Очевидно, что $\rho_{x_0} f(x_0), \dots, \rho_{x_p} f(x_p)$ является b -репером в точке $\rho_{x_0} f(x_0)$. Но согласно (2.1.4) имеет место равенство $\rho_{x_i} f(x_i) = \sigma_{x_i} f(x_i)$. Следовательно, $\sigma f(x_0), \dots, \sigma f(x_p)$ является b -репером в точке $\sigma f(x_0)$ при $b \geq \beta(x_0), \dots, \beta(x_p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть (f, β) – некоторая A -карта в B . Назовем A -репером в f на карте (f, β) множество таких морфизмов $f = f_0, f_1, \dots, f_p: A \rightarrow B$, для которых существуют элементы $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \prod_{x \in |A|} (G_B)_{\beta(x)}$, удовлетворяющие соотношениям $\sigma_i f = f_i$ ($1 \leq i \leq p$). (В силу леммы 3.5 последовательность $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ является A -репером в любом f_i на карте (f_i, β) для $0 \leq i \leq p$.)

В дальнейшем для нас окажется весьма полезным следующее утверждение.

ЛОКАЛЬНО–ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЕММА 3.7. Пусть (f, β) – некоторая A -карта в B . Последовательность $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ является A -репером в f на карте (f, β) тогда и только тогда, когда для любого $x \in |A|$ последовательность $f(x), f_1(x), \dots, f_p(x)$ представляет собой локальный репер в точке $f(x)$ для $\beta(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является тривиальным следствием леммы 3.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. A -нормальным морфизмом $g: B \rightarrow C$ глобальных действий называется морфизм, сохраняющий A -реперы. Более подробно, если $f, f_1, \dots, f_p$ – произвольный A -репер в f на карте (f, β) , то $gf, gf_1, \dots, gf_p$ является A -репером в gf на некоторой A -карте (gf, γ) в C . Нормальным морфизмом $g: B \rightarrow C$ называется морфизм, сохраняющий A -реперы для любого глобального действия A . Наконец, A -нормальный (соответственно, нормальный) изоморфизм – это A -нормальный (соответственно, нормальный) морфизм, обладающий A -нормальным (соответственно, нормальным) обратным.

В общем случае A -нормальный (соответственно, нормальный) морфизм, являющийся изоморфизмом в обычном смысле, не имеет A -нормального (соответственно, нормального) обратного.

ЛЕММА 3.9. Регулярный морфизм является нормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta: B \rightarrow C$ – регулярный морфизм. Если (f, β) – некоторая A -карта в B , то прямая проверка показывает, что $(\eta_X f, \eta_\Phi \beta)$ является A -картой в C . Пусть $f, f_1, \dots, f_p$ – какой-либо A -репер в f на карте (f, β) , а элементы $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \prod_{x \in |A|} (G_B)_{\beta(x)}$ таковы, что $\sigma_i f = f_i$ ($1 \leq i \leq p$). Для $\sigma = (\sigma_x) \in \prod_{x \in |A|} (G_B)_{\beta(x)}$ положим

$$\eta_G(\sigma) = (\eta_G(\beta(x))(\sigma_x)) \in \prod_{x \in |A|} (G_C)_{\eta_\Phi(\beta(x))}.$$

Тогда в силу (3.3.4) имеет место равенство

$$\eta_G(\sigma_i)(\eta_X f) = \eta_X f_i, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Стало быть, последовательность $\eta_X f, \eta_X f_1, \dots, \eta_X f_p$ является A -репером в $\eta_X f$ на карте $(\eta_X f, \eta_\Phi \beta)$.

Зададим теперь на множестве морфизмов $\text{Mor}(A, B)$ структуру глобального действия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Пусть A и B – глобальные действия и $|\text{Mor}(A, B)|$ – множество всех морфизмов из A в B . Обозначим через $\text{Mor}(A, B)$ глобальное действие

$$(\Phi_{(A, B)}, G_{(A, B)}, X_{(A, B)})$$

с обертывающим множеством $|\text{Mor}(A, B)|$, определяемое следующим образом. Прежде всего, положим

$$\Phi_{(A, B)} = \{\beta: |A| \rightarrow \Phi_B\}$$

и зададим на $\Phi_{(A, B)}$ транзитивное рефлексивное отношение правилом

$$\beta \leq \beta' \iff \beta(x) \leq \beta'(x) \forall x \in |A|.$$

Для $\beta \in \Phi_{(A, B)}$ положим

$$(G_{(A, B)})_\beta = \prod_{x \in |A|} (G_B)_{\beta(x)}.$$

Если $\beta \leq \beta'$, то для каждого $x \in |A|$ существует функториально определенный гомоморфизм $(G_B)_{\beta(x)} \rightarrow (G_B)_{\beta'(x)}$ и, следовательно, гомоморфизм $(G_{(A, B)})_\beta \rightarrow (G_{(A, B)})_{\beta'}$, функториальный по β . Для $\beta \in \Phi_{(A, B)}$ положим

$$(X_{(A, B)})_\beta = \{f: |A| \rightarrow |B| \mid (f, \beta) \text{ есть } A\text{-карта в } B\}.$$

Согласно лемме 3.5, если $\sigma \in (G_{(A, B)})_\beta$ и $f \in (X_{(A, B)})_\beta$, то $\sigma f \in (X_{(A, B)})_\beta$, следовательно, существует действие группы $(G_{(A, B)})_\beta$ на $(X_{(A, B)})_\beta$.

Без труда проверяется, что для $\text{Mor}(A, B)$ выполнены все аксиомы глобального действия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. Функтор $\text{Mor}(\ , \ )$ принимает значения в категории глобальных действий и является контравариантным и регулярным по первому аргументу относительно всех морфизмов и ковариантным по второму аргументу относительно нормальных морфизмов. Более точно, имеют место следующие утверждения.

(3.11.1) Пусть C – глобальное действие и $f: A \rightarrow B$ – морфизм глобальных действий. Тогда f определяет регулярный морфизм.

$$\eta = \text{Mor}(f, 1_C): \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C),$$

который строится следующим образом. Зададим, прежде всего, сохраняющий отношения морфизм

$$\eta_\Phi: \Phi_{(B,C)} \rightarrow \Phi_{(A,C)}$$

формулой

$$\eta_\Phi(\beta) = \beta f.$$

Далее, определим естественное преобразование

$$\eta_G: G_{(B,C)} \rightarrow G_{(A,C)}.$$

Для этого достаточно определить морфизмы

$$\begin{array}{ccc} \eta_G(\beta): & (G_{(B,C)})_\beta & \longrightarrow & (G_{(A,C)})_{\eta_\Phi(\beta)} \\ & \parallel & & \parallel \\ & \prod_{y \in |B|} (G_C)_{\beta(y)} & & \prod_{x \in |A|} (G_C)_{\beta f(x)} \end{array}$$

Зададим $\eta_G(\beta)|_{(G_C)_{\beta(y)}}$ как диагональный гомоморфизм

$$(G_C)_{\beta(y)} \rightarrow \prod_{x \in |A|, f(x)=y} (G_C)_{\beta f(x)}$$

(пустое произведение групп, которое может появиться в правой части, считается тривиальной группой). Наконец, определим отображение

$$\eta_X: |\text{Mor}(B, C)| \rightarrow |\text{Mor}(A, C)|,$$

полагая

$$\eta_X(g) = gf.$$

Тогда $\eta = (\eta_\Phi, \eta_G, \eta_X)$ – морфизм глобальных действий.

(3.11.2) Пусть A – глобальное действие и $g: B \rightarrow C$ – морфизм глобальных действий. Тогда функция

$$\text{Mor}(1_A, g): |\text{Mor}(A, B)| \rightarrow |\text{Mor}(A, C)|$$

задает морфизм глобальных действий $\text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$ тогда и только тогда, когда морфизм g является A -нормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (3.11.1) доказывается прямой проверкой. Детали оставляются читателю. Докажем утверждение (3.11.2). Пусть (f, β) – некоторая A -карта в B и $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ – произвольный A -репер на (f, β) . Из определения вытекает, что $f_0, f_1, \dots, f_p$ – локальный β -репер в глобальном действии $\text{Mor}(A, B)$; обратно, любой локальный репер в $\text{Mor}(A, B)$ есть в то же время A -репер на некоторой A -карте в B . Следовательно, функция $\text{Mor}(1_A, g): |\text{Mor}(A, B)| \rightarrow |\text{Mor}(A, C)|$ является морфизмом глобальных действий тогда и только тогда, когда она сохраняет A -реперы, что, в свою очередь, эквивалентно A -нормальности отображения g .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть B – некоторое глобальное действие. Обозначив через $\Phi_{B'}$ подкатегорию в Φ_B , состоящую из объектов, исчерпывающих объекты в Φ_B , мы получим глобальное действие $B' = (\Phi_{B'}, G_B, X_B)$. На первый взгляд это действие очень похоже на B . В самом деле, тождественное отображение $|B| \rightarrow |B|$ определяет регулярный морфизм $B' \rightarrow B$, являющийся изоморфизмом глобальных действий. Однако, в общем случае, $B' \rightarrow B$ не является регулярным изоморфизмом. Структурное различие между B' и B можно выявить, сравнивая глобальные действия $\text{Mor}(A, B')$ и $\text{Mor}(A, B)$ с помощью канонического морфизма $\text{Mor}(A, B') \rightarrow \text{Mor}(A, B)$. Множество A -карт в B' в общем случае меньше, чем множество A -карт в B , вследствие чего область определения локальной группы $(G_{(A, B')})_\beta$ меньше области определения соответствующей группы $(G_{(A, B)})_\beta$, т.е. $(X_{(A, B')})_\beta \subsetneq (X_{(A, B)})_\beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12. Пусть $g: B \rightarrow C$ – морфизм глобальных действий. Последовательность $A_n, \dots, A_1$ глобальных действий называется *нормальной цепью* длины n для g , если g является A_1 -нормальным и для каждого i , $1 \leq i \leq n-1$, морфизм $\text{Mor}(1_{A_{i-1}}, \dots, \text{Mor}(1_{A_1}, g)) \dots : \text{Mor}(A_i, \text{Mor}(A_{i-1}, \dots, \text{Mor}(A_1, B))) \rightarrow \text{Mor}(A_i, \text{Mor}(A_{i-1}, \dots, \text{Mor}(A_1, C)))$ A_{i+1} -нормален. Пусть $\mathcal{N}$ – некоторый класс нормальных действий. Морфизм g называется *n - $\mathcal{N}$ -нормальным*, если любая последовательность из n объектов, принадлежащих $\mathcal{N}$, образует нормальную цепь для g . Морфизм g называется *$\mathcal{N}$ -нормальным* (соответственно, *∞ - $\mathcal{N}$ -нормальным*), если он 1 - $\mathcal{N}$ -нормален (соответственно, n - $\mathcal{N}$ -нормален для всех $n > 0$). Если $\mathcal{N} = \{A\}$ (соответственно, $\mathcal{N}$ состоит из всех глобальных действий), то мы будем называть морфизм глобальных действий *∞ - A -нормальным* (соответственно, *∞ -нормальным*).

Если термином *t -морфизм* обозначить одно из введенных выше понятий нормальности, то *t -изоморфизмом* называется t -морфизм, обладающий обратным t -морфизмом.

Чтобы связать с морфизмом $g: A \rightarrow B$ глобальных действий длинную точную последовательность алгебраических гомотопических групп, мы будем полагать, что этот морфизм ∞ - L -нормален, где L – линейное действие, определенное в примере 2.4.

ЛЕММА 3.13. Пусть $g: B \rightarrow C$ – регулярный морфизм. Тогда для любого глобального действия A морфизм

$$\text{Mor}(1_A, g): \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$$

также регулярен и, следовательно, g является ∞ -нормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.9) и (3.11.2) морфизм

$$\text{Mor}(1_A, g): \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$$

корректно определен. Пусть $(\eta_\Phi, \eta_G, \eta_X = g)$ – регулярная структура для g . Определим регулярную структуру $(\mu_\Phi, \mu_g, \mu_X = \text{Mor}(1_A, g))$ для морфизма $\text{Mor}(1_A, g)$ следующим образом.

Координатный морфизм

$$\mu_\Phi: \Phi_{(A,B)} \rightarrow \Phi_{(A,C)}$$

зададим правилом

$$\beta \mapsto \eta_\Phi \beta.$$

Определим естественное преобразование

$$\mu_G: G_{(A,B)} \rightarrow G_{(A,C)}$$

с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (G_{(A,B)})_\beta & \xrightarrow{\mu_G(\beta)} & (G_{(A,C)})_{\mu_\Phi(\beta)} \\ \parallel & & \parallel \\ \prod_{x \in |A|} (G_{(A,B)})_{\beta(x)} & \xrightarrow{\prod_{x \in |A|} \eta_G(\beta(x))} & \prod_{x \in |A|} (G_{(A,C)})_{\eta_\Phi(\beta(x))} \end{array}$$

Прямая проверка показывает, что $(\mu_\Phi, \mu_G, \text{Mor}(1_A, g))$ – регулярный морфизм.

Тот факт, что g является ∞ -нормальным морфизмом, получается индукцией из только что доказанного результата.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.14. Пусть N – один из типов морфизмов, определенных в 3.12 (n - $\mathcal{N}$ -нормальный морфизм, ∞ -нормальный морфизм и т. д.). Глобальное действие называется N -действием, если каждый его морфизм является N -морфизмом. Например, ∞ -нормальное действие обладает тем свойством, что каждый его морфизм является ∞ -нормальным.

Займемся теперь экспоненциальным законом. Для этого нам понадобится понятие произведения глобальных действий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ–ЛЕММА 3.15. Пусть A и B – глобальные действия. Их произведение $A \times B$ строится следующим образом:

$$\Phi_{A \times B} = \Phi_A \times \Phi_B$$

$$u(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta') \Leftrightarrow \alpha \leq \alpha' \text{ и } \beta \leq \beta';$$

$$G_{A \times B} = G_A \times G_B,$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|,$$

$$X_{A \times B} = X_A \times X_B.$$

Для любой координаты $(\alpha, \beta) \in \Phi_{A \times B}$ существует очевидное действие группы $(G_{A \times B})_{(\alpha, \beta)}$ на $(X_{A \times B})_{(\alpha, \beta)}$, задаваемое покомпонентно. Легко видеть, что $A \times B$ удовлетворяет универсальному свойству произведений.

Ниже мы будем использовать следующие обозначения. Пусть S и T – некоторые множества. Положим

$$(S, T) = \text{Mor}_{\text{sets}}(S, T).$$

Если U – еще одно множество, то существует такой канонический изоморфизм множеств

$$(3.16) \quad \begin{array}{c} E: (U, (S, T)) \xrightarrow{\cong} (U \times S, T), \\ f \mapsto Ef, \end{array}$$

что $Ef(u, s) = f(u)(s)$. Очевидно, что обратным к нему является функция

$$\begin{array}{c} E': (U \times S, T) \longrightarrow (U, (S, T)), \\ f \mapsto E'f, \end{array}$$

где $(E'f(u))(s) = f(u, s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.17. Пусть A , B и C – глобальные действия. Регулярный морфизм

$$E: \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \times B, C)$$

определяется следующим образом. Обозначим структурные компоненты глобального действия $\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))$ через $(\Phi_{(A, (B, C))}, G_{(A, (B, C))}, X_{(A, (B, C))})$. Определим

$$\begin{array}{ccc} E_\Phi: & \Phi_{(A, (B, C))} & \longrightarrow & \Phi_{(A \times B, C)} \\ & \parallel & & \parallel \\ & (|A|, (|B|, \Phi_C)) & & (|A| \times |B|, \Phi_C) \end{array}$$

как экспоненциальный изоморфизм (3.16). Ясно, что E_Φ сохраняет транзитивное рефлексивное отношение. Далее, определим естественное преобразование

$$E_G: G_{(A, (B, C))} \rightarrow (G_{(A \times B, C)})_{E_\Phi(\cdot)}$$

так, чтобы отображение

$$\begin{array}{ccc} E_G(\alpha): & (G_{(A, (B, C))})_\alpha & \longrightarrow & (G_{(A \times B, C)})_{E_\Phi(\alpha)} \\ & \parallel & & \parallel \\ & \prod_{x \in |A|} (\prod_{y \in |B|} (G_C)_{\alpha(x)(y)}) & & \prod_{(x, y) \in |A| \times |B|} (G_C)_{(E_\Phi \alpha)(x, y)} \end{array}$$

тождественно переводило сомножитель $(G_C)_{\alpha(x)(y)}$ на сомножитель $(G_C)_{(E_\Phi \alpha)(x, y)} = (G_C)_{\alpha(x)(y)}$. Без труда проверяется, что образ композиции отображений

$$|\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))| \rightarrow (|A|, (|B|, |C|)) \xrightarrow{(3.16)} (|A| \times |B|, |C|)$$

лежит в $|\text{Mor}(A \times B, C)|$, поэтому определим

$$E_X: |\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))| \rightarrow |\text{Mor}(A \times B, C)|$$

как результирующее отображение. Прямые вычисления показывают, что тройка

$$E = (E_\Phi, E_G, E_X)$$

является регулярным морфизмом. (В общем случае E не является изоморфизмом (соответственно, регулярным изоморфизмом), поскольку E_X не обязано быть сюръективным (соответственно, $E_X((X_{(A, (B, C))})_\alpha)$ не покрывают все множества $(X_{(A \times B, C)})_{E_\Phi(\alpha)}$.)

Пусть $A_n, \dots, A_1$ – произвольная последовательность глобальных действий. Итерируя изложенную выше процедуру, можно для любого $n \geq 2$ следующим образом получить регулярный морфизм

$$E_n: \text{Mor}(A_n, \text{Mor}(A_{n-1}, \dots, \text{Mor}(A_1, C))) \rightarrow \text{Mor}(A_n \times \dots \times A_1, C).$$

Для $n = 2$ этот морфизм был определен выше. Предположим, что $n > 2$ и что морфизм уже определен для любого натурального числа N , где $2 \leq N \leq n-1$. Обозначим через E_{n-1} соответствующий морфизм для последовательности $A_{n-1}, \dots, A_1$. Определим теперь морфизм E_n для последовательности $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1$ как композицию регулярного морфизма $\text{Mor}(1_{A_n}, E_{n-1})$ (см. (3.13)) и регулярного морфизма

$$E_2: \text{Mor}(A_n, \text{Mor}(A_{n-1} \times \dots \times A_1, B)) \rightarrow \text{Mor}(A_n \times \dots \times A_1, B).$$

Следующая конструкция поможет нам справиться с проблемой нахождения обратного для морфизма E_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.18. Пусть $\mathcal{P}$ – некоторый класс глобальных действий, замкнутый относительно конечных произведений. Глобальное действие C называется ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным, если морфизм

$$E: \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \times B, C)$$

является ∞ - $\mathcal{P}$ -нормальным для всех пар $A, B \in \mathcal{P}$. Глобальное действие C называется *регулярно ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным*, если E – регулярный изоморфизм для всех пар $A, B \in \mathcal{P}$. Если класс $\mathcal{P}$ состоит из всех конечных произведений A на себя (соответственно, $\mathcal{P}$ содержит все такие глобальные действия A , что $|A| = \bigcup_{\alpha \in \Phi_A} X_\alpha$), то ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальное действие C называется *∞ - A -экспоненциальным* (соответственно, *∞ -экспоненциальным*).

ЛЕММА 3.19. *Предположим, что глобальное действие C является ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным (соответственно, регулярно ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным). Тогда для любой последовательности $A_n, \dots, A_1 \in \mathcal{P}$, в которой $n \geq 2$, морфизм E_n из определения 3.17 является ∞ - $\mathcal{P}$ -нормальным (соответственно регулярным) изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 2$ утверждение следует из определений. Применяя индукцию, предположим, что утверждение справедливо для $n - 1$. По определению $E_n = E_2 \text{Mor}(1, E_{n-1})$. Но E_2 и $\text{Mor}(1, E_{n-1})$ суть ∞ - $\mathcal{P}$ -изоморфизмы (соответственно, регулярные изоморфизмы). Этим завершается шаг индукции.

Следующее условие дает полезный критерий, гарантирующий, что глобальное действие ∞ -нормально и либо ∞ -экспоненциально или же регулярно ∞ -экспоненциально.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.20. Пусть A – глобальное действие. Если $\Delta \subseteq \Phi_A$, положим

$$\Phi_A^{\geq \Delta} = \{\alpha \in \Phi_A \mid \alpha \geq \beta \ \forall \beta \in \Delta\}.$$

Назовем A *действием с сильной нижней гранью*, если для любого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Phi_A$ и любого конечного непустого множества $U \subseteq |A|$, таких что $(X_A)_\beta \cap U \neq \emptyset$ для всех $\beta \in \Delta$, множество $\{\alpha \in \Phi_A^{\geq \Delta} \mid U - \text{некоторый } \alpha\text{-репер}\}$ либо пусто, либо состоит из инициального элемента. Назовем A *действием с нижней гранью*, если оно удовлетворяет приведенным выше условиям по меньшей мере для $\Delta = \emptyset$.

В следующей лемме формулируются условия, при наличии которых глобальное действие обладает сильной нижней гранью. Тем самым, доказываемся, что если финальный объект в пространстве морфизмов является действие с нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью), то само пространство морфизмов наследует это свойство.

ЛЕММА 3.21. *Пусть A – глобальное действие. Рассмотрим следующие условия.*

(3.21.1) *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi_A$. Тогда $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ и для всех $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ имеет место включение $(G_A)_\alpha(x) \subseteq (G_A)_\beta(x)$.*

(3.21.2) *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi_A$. Тогда $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ и существует такое $x \in X_\alpha \cap X_\beta$, что $(G_A)_\alpha(x) \subseteq (G_A)_\beta(x)$.*

(3.21.3) *Пусть $\Psi \subseteq \Phi_A$. Тогда для каждого $x \in \bigcap_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ найдется такое $\beta \in \Phi_A$, что имеет место равенство $\bigcap_{\alpha \in \Psi} (G_A)_\alpha(x) = (G_A)_\beta(x)$.*

Если A удовлетворяет условиям (3.21.2) и (3.21.3), то оно является действием с сильной нижней гранью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U локальный репер и $\Delta \subseteq \Phi_A$ – такое конечное множество, что для каждого $\delta \in \Delta$ пересечение $X_\delta \cap U$ не пусто. Положим $\Psi = \{\alpha \in \Phi_A \mid U \text{ – локальный } \alpha\text{-репер}\}$. Если $u \in U$, то $U \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Psi} (G_A)_\alpha(u) = (G_A)_\beta(u)$ для некоторого $\beta \in \Phi_A$ в силу условия (3.21.3). Очевидно, что U является локальным β -репером. Так как $(G_A)_\beta(u) \subseteq (G_A)_\alpha(u)$, то из (3.21.2) вытекает, что $\beta \leq \alpha$ для всех $\alpha \in \Psi$. Поэтому, если $\Delta = \emptyset$, то все доказано. Если же $\Delta \neq \emptyset$, мы должны доказать, что $\delta \leq \beta$ для любого $\delta \in \Delta$. Пусть $u \in X_\delta \cap U$. Так как $\delta \leq \alpha$ для любого $\alpha \in \Psi$, то из (3.21.2) следует, что $(G_A)_\delta(u) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Psi} (G_A)_\alpha(u) = (G_A)_\beta(u)$. Это означает, что $\delta \leq \beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В то время как симплицальные действия $\text{gl}(S)$ и $f \text{ gl}(S)$ из (2.5) и произвольная модель Володина (2.3) удовлетворяют условию сильной нижней грани, только лишь модель Володина удовлетворяет условиям доказанной выше леммы.

ЛЕММА 3.22. Пусть B – действие с нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью). Тогда для любого глобального действия A функтор $\text{Mor}(A, B)$ также является действием с нижней гранью (соответственно, с сильной нижней гранью).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \subseteq |\text{Mor}(A, B)|$ – конечное непустое подмножество. Рассмотрим такое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Phi_{(A, B)}$, что для каждого $\delta \in \Delta$ пересечение $(X_{(A, B)})_\delta \cap U$ не пусто. Положим $\Psi = \{\beta \in \Phi_{(A, B)} \mid U \text{ – некоторый } \beta\text{-репер}, \delta \leq \beta \ \forall \delta \in \Delta\}$ и будем считать, что $\Psi \neq \emptyset$. Мы должны показать, что Ψ имеет инициальный элемент. С этой целью положим для каждого $x \in |A|$

$$U(x) = \{f(x) \mid f \in U\}, \quad \Delta(x) = \{\delta(x) \mid \delta \in \Delta\}, \quad \Psi(x) = \{\beta(x) \mid \beta \in \Psi\}.$$

По предположению для каждого $x \in |A|$ найдется такая координата $b_x \in \Phi_B$, что $U(x)$ является b_x -репером и $\delta(x) \leq b_x \leq \beta(x)$ для всех $\delta \in \Delta$ и $\beta \in \Psi$. Рассмотрим отображение $\gamma: |A| \rightarrow \Phi_B$, $x \mapsto b_x$. Ясно, что $\delta \leq \gamma \leq \beta$ для всех $\delta \in \Delta$ и $\beta \in \Psi$. Пусть $u \in U$. Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что пара (u, γ) является A -картой. Возьмем некоторый элемент $\beta \in \Psi$. Так как пара (u, β) является A -картой и $\gamma \leq \beta$, то очевидно, что (u, γ) – также A -карта.

Следующая теорема является главным результатом работы.

ТЕОРЕМА 3.23. Любое действие с нижней гранью является ∞ -нормальным и ∞ -экспоненциальным. Действие с сильной нижней гранью является ∞ -нормальным и регулярно ∞ -экспоненциальным.

В доказательстве теоремы 3.23 несколько раз будет использоваться следующая лемма.

ЛЕММА 3.24. Пусть A и B – глобальные действия, (f, β) – некоторая A -карта в B и $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ – некоторый A -репер на карте (f, β) . Если $x_0, \dots, x_q \in |A|$ – локальный репер в A , то множество $\{f_i(x_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ является локальным b -репером для некоторого $b \in \Phi_B$ такого, что $b \geq \beta_{x_0}, \dots, \beta_{x_q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (f_0, β) является A -картой в B , то из определения вытекает, что множество $f_0(x_0), \dots, f_0(x_q)$ есть локальный b -репер для некоторого $b \in \Phi_B$, удовлетворяющего условию $b \geq \beta_{x_0}, \dots, \beta_{x_q}$. Стало быть, группа $(G_B)_b$ транзитивно действует на $f_0(x_0), \dots, f_0(x_q)$. Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что $(G_B)_b$ транзитивно действует на $\{f_i(x_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$. Поскольку $f_0, \dots, f_p$ является A -репером на карте (f, β) , группа $(G_{(A, B)})_\beta$ действует на нем

транзитивно. Поэтому для любого $x \in |A|$ группа $(G_B)_{\beta_x}$ транзитивно действует на $f_0(x), \dots, f_p(x)$. Используя канонический гомоморфизм $(G_B)_{\beta_{x_j}} \rightarrow (G_B)_b$ и замечая, что $f_0(x_j) \in (X_B)_b$, мы заключаем, что группа $(G_B)_b$ транзитивно действует на $f_0(x_j), \dots, f_p(x_j)$. Так как это имеет место для каждого $j, : 0 \leq j \leq q$, а группа $(G_B)_b$ транзитивно действует на $f_0(x_0), \dots, f_p(x_q)$, то она транзитивно действует и на $\{f_i(x_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.23. Пусть C – действие с нижней гранью. Покажем, что C является ∞ -нормальным. В силу леммы 3.22 мы должны доказать, что C является A -нормальным для любого глобального действия A . Пусть $g: B \rightarrow C$ – морфизм глобальных действий, (f, β) – некоторая A -карта в B и $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ – произвольный репер на (f, β) . Покажем, что $gf_0, \dots, gf_p$ является A -репером в C .

Построим, прежде всего, такую координату $(\gamma: |A| \rightarrow \Phi_C) \in \Phi_{(A, C)}$, что (gf, γ) есть A -карта в C . Для $x \in |A|$ положим $U(x) = \{gf_0(x), \dots, gf_p(x)\}$. Согласно локально-глобальной лемме 3.7 набор $f_0(x), \dots, f_p(x)$ является локальным репером в B . Поскольку g – морфизм, отсюда следует, что $U(x)$ – локальный репер в C . Так как C обладает нижней гранью, то множество $\Psi(x) = \{c \in \Phi_C \mid U(x) \text{ есть } c\text{-репер}\}$ имеет инициальный элемент c_x . Определим $\gamma: |A| \rightarrow \Phi_C$ полагая $\gamma(x) = c_x$. Проверим теперь, что (gf, γ) есть A -карта в C . Пусть $x_0, \dots, x_q$ – некоторый локальный репер в A . Согласно лемме 3.24 множество $\{f_i(x_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ представляет собой локальный репер в B . Стало быть, множество $\{gf_i(x_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ является локальным c -репером для некоторого $c \in \Phi_C$. Ясно, что $\gamma(x_j) = c_{x_j} \leq c$, поскольку c_{x_j} – инициальный элемент в $\Psi(x_j)$. А это означает, что (gf, γ) есть A -карта в C . По лемме 3.7 множество $f_0, \dots, f_p$ является A -репером на (f, γ) тогда и только тогда, когда $f_0(x), \dots, f_p(x)$ – локальный $\gamma(x)$ -репер для всех $x \in |A|$. Так как это свойство вытекает из определения $\gamma(x)$, то тем самым мы доказали, что глобальное действие C является A -нормальным.

Пусть снова C – действие с нижней гранью. Покажем теперь, что C является ∞ -экспоненциальным. Рассмотрим такие глобальные действия A и B , что $|A| = \bigcup_{\alpha \in \Phi_A} (X_A)_\alpha$ и $|B| = \bigcup_{\beta \in \Phi_B} (X_B)_\beta$. Пусть $E: \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \times B, C)$ – морфизм из определения 3.17. Докажем, что E имеет ∞ -нормальный обратный. Согласно лемме 3.22 $\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))$ является действием с нижней гранью и поэтому, как мы только что показали, оно должно быть ∞ -нормальным. Следовательно, если у E существует обратный морфизм, то он обязательно будет ∞ -нормальным. Поэтому нам достаточно доказать, что морфизм E обладает обратным. Имеется очевидный кандидат для такого обратного морфизма, а именно теоретико-множественное отображение

$$E': |\text{Mor}(A \times B, C)| \rightarrow (A, (B, C)), \quad f \mapsto E'f,$$

где $(E'f(x))(y) = f(x, y)$. Покажем, что $E'f \in |\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))|$ и что результирующее отображение

$$E': |\text{Mor}(A \times B, C)| \rightarrow |\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))|$$

определяет морфизм $\text{Mor}(A \times B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))$ глобальных действий.

Из теоретико-множественного определения отображения E' очевидно, что E' будет обратным для E . Покажем, что $E'f: |A| \rightarrow (B, C)$ определяет морфизм $A \rightarrow \text{Mor}(B, C)$ глобальных действий. Для этого нам нужно проверить следующие свойства:

- (i) если $x \in |A|$, то отображение $E'f(x): |B| \rightarrow |C|$, $y \mapsto (E'f(x))(y)$ задает морфизм глобальных действий $B \rightarrow C$;

(ii) результирующее отображение $E'f: |A| \rightarrow |\text{Mog}(B, C)|$, $x \mapsto E'f(x)$ задает морфизм глобальных действий $A \rightarrow \text{Mog}(B, C)$.

Пусть $x \in |A|$ и $y_0, \dots, y_q$ – некоторый локальный репер в B . Так как $|A| = \bigcup_{\alpha \in \Phi_A} (X_A)_\alpha$, то x – локальный репер в A и, стало быть, $(x, y_0), \dots, (x, y_q)$ – локальный репер в $A \times B$. Следовательно, $f(x, y_0), \dots, f(x, y_q)$ – локальный репер в C . Поскольку $f(x, y_j) = (E'f(x))(y_j)$, $0 \leq j \leq q$, мы получаем, что $(E'f(x))(y_0), \dots, (E'f(x))(y_q)$ – локальный репер в C . А это означает, что $E'f(x): B \rightarrow C$ – морфизм глобальных действий.

Рассмотрим теперь в A локальный репер $x_0, \dots, x_p$ и покажем, что $E'f(x_0), \dots, E'f(x_p)$ – локальный репер в $\text{Mog}(B, C)$. Каждый элемент $y \in |B|$ является локальным репером в B , поскольку $|B| = \bigcup_{\beta \in X_B} (X_B)_\beta$. Следовательно, $(x_0, y), \dots, (x_p, y)$ – локальный репер в $A \times B$ и $f(x_0, y), \dots, f(x_p, y)$ – локальный репер в C . Так как C обладает нижней гранью, то множество $\{c \in \Phi_C \mid f(x_0, y), \dots, f(x_p, y) \text{ является } c\text{-репером}\}$ имеет инициальный элемент c_y . Определим отображение $\gamma: |B| \rightarrow \Phi_C$ полагая $\gamma(y) = c_y$. Покажем, что $(E'f(x_0), \gamma)$ является B -картой в C . Предположив на мгновение, что это доказано, мы получим из локально-глобальной леммы 3.7, что множество $E'f(x_0), \dots, E'f(x_p)$ является B -репером на $(E'f(x_0), \gamma)$. Но тогда, по определению, $E'f(x_0), \dots, E'f(x_p)$ – локальный репер в $\text{Mog}(B, C)$, а это – как раз то свойство, которое мы доказывали.

Итак, покажем, что $(E'f(x_0), \gamma)$ является B -картой в C . Пусть $y_0, \dots, y_q$ – некоторый локальный репер в B . Нам нужно доказать, что множество $(E'f(x_0))(y_0), \dots, (E'f(x_0))(y_q)$ является локальным c -репером для такой координаты $c \in \Phi_C$, что $c \geq \gamma(y_0), \dots, \gamma(y_q)$. Так как $x_0, \dots, x_p$ – локальный репер в A и $y_0, \dots, y_q$ – локальный репер в B , то множество $\{(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ является локальным репером в $A \times B$. Следовательно, $\{f(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ – локальный c -репер для некоторого $c \in \Phi_C$. Но по определению функции γ мы имеем $c \geq \gamma(y_j)$ для всех j , $0 \leq j \leq q$.

Докажем теперь, что функция

$$E': |\text{Mog}(A \times B, C)| \rightarrow |\text{Mog}(A, \text{Mog}(B, C))|$$

задает морфизм $\text{Mog}(A \times B, C) \rightarrow \text{Mog}(A, \text{Mog}(B, C))$ глобальных действий. Пусть $f = f_0, f_1, \dots, f_p \in |\text{Mog}(A \times B, C)|$ – локальный репер в $\text{Mog}(A \times B, C)$. Мы должны показать, что $E'f_0, \dots, E'f_p$ является локальным репером в $\text{Mog}(A, \text{Mog}(B, C))$. Для каждого элемента (x, y) из $A \times B$ множество $f_0(x, y), \dots, f_p(x, y)$ в силу леммы 3.7 является локальным репером в C . Так как C обладает нижней гранью, то множество $\{c \in \Phi_C \mid f_0(x, y), \dots, f_p(x, y) \text{ есть } c\text{-репер}\}$ имеет инициальный элемент $c_{(x, y)}$. Определим отображение $\gamma: |A| \rightarrow (|B|, \Phi_C)$, полагая $\gamma(x) = c_{(x, \_)}$. Мы утверждаем, что $(E'f_0, \gamma)$ является A -картой в $\text{Mog}(B, C)$. В самом деле, из определения γ и леммы 3.7 следует, что множество $E'f_0, \dots, E'f_p$ является A -репером на $(E'f, \gamma)$. Но это означает, что $E'f_0, \dots, E'f_p$ – локальный репер в $\text{Mog}(A, \text{Mog}(B, C))$, и следовательно, E' задает морфизм глобальных действий $\text{Mog}(A \times B, C) \rightarrow \text{Mog}(A, \text{Mog}(B, C))$.

Займемся теперь доказательством того, что $(E'f, \gamma)$ является A -картой. Пусть $x_0, \dots, x_q$ – локальный репер в A . Мы должны показать, что $E'f(x_0), \dots, E'f(x_q)$ является локальным δ -репером в $\text{Mog}(B, C)$ для некоторого $\delta: |B| \rightarrow \Phi_C$, удовлетворяющего условиям $\delta \geq \gamma(x_0), \dots, \gamma(x_q)$. Так как $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ – локальный репер в $\text{Mog}(A \times B, C)$, то в C найдется такая $A \times B$ -карта (f_0, ε) , что $f_0, \dots, f_p$ является $A \times B$ -репером на (f_0, ε) . Для любого фиксированного $y \in |B|$ пара $(f_0(\_, y), \varepsilon(\_, y))$ является A -картой в C , а $f_0(\_, y), \dots, f_p(\_, y)$ – A -репером на $(f_0(\_, y), \varepsilon(\_, y))$. Поскольку

$x_0, \dots, x_q$ – локальный репер в A , из леммы 3.24 вытекает, что множество $\{f_i(x_j, y) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ является локальным репером. Так как C обладает нижней гранью, то множество $\{c \in \Phi_C \mid \{f_i(x_j, y) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\} \subseteq c\}$ – локальный репер в C имеет инициальный элемент d_y . Ясно, что $d_y \geq (\gamma(x_j))(y)$ ($0 \leq j \leq q$). Определим отображение $\delta: |B| \rightarrow \Phi_C$ полагая $\delta(y) = d_y$. В силу сказанного $\delta \geq \gamma(x_j)$ ($0 \leq j \leq q$). Поскольку $(Ff(x_j))(y) = f_0(x_j, y)$ ($0 \leq j \leq q$) и множество $\{f_i(x_j, y) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ является $\delta(y)$ -репером, то $(Ff(x_0))(y), \dots, (Ff(x_q))(y)$ – также $\delta(y)$ -репер. Поэтому, согласно лемме 3.7 множество $Ff(x_0), \dots, Ff(x_q)$ является репером на $(Ff(x_0), \delta)$, в предположении, что $(Ff(x_0), \delta)$ есть B -карта в C . Доказательством этого факта мы сейчас и займемся.

Пусть $y_0, \dots, y_r$ – некоторый локальный репер в B . Мы должны показать, что множество $(Ff(x_0))(y_0), \dots, (Ff(x_0))(y_r)$ является c -репером для некоторого $c \in \Phi_C$, удовлетворяющего условиям $c \geq \delta(y_0), \dots, \delta(y_r)$. Так как множество $\{(x_j, y_k) \mid 0 \leq j \leq q, 0 \leq k \leq r\}$ есть локальный репер в $A \times B$ и $f_0, \dots, f_p$ есть $A \times B$ -репер в C , то из леммы 3.24 следует, что множество $\{f_i(x_j, y_k) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q, 0 \leq k \leq r\}$ является c -репером для некоторого $c \in \Phi_C$. Из определения отображения δ очевидно, что $c \geq \delta(y_0), \dots, \delta(y_r)$. Поскольку $(Ff(x_0))(y_k) = f_0(x_0, y_k)$ ($0 \leq k \leq r$) и $\{f_i(x_j, y_k) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q, 0 \leq k \leq r\}$ есть c -репер, ясно, что $(Ff(x_0))(y_0), \dots, (Ff(x_0))(y_r)$ – также c -репер. Этим завершается доказательство ∞ -экспоненциальности глобального действия C .

Наконец, предположим, что C – глобальное действие с сильной нижней гранью. Мы должны доказать, что C регулярно ∞ -экспоненциальное действие. Для этого достаточно показать, что определенный выше морфизм

$$E: \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \times B, C)$$

имеет регулярный обратный морфизм E' . Существуют очевидные кандидаты для компонент (E'_Φ, E'_G, E'_X) этого морфизма. Прежде всего отображение

$$(3.25) \quad E'_X: \text{Mor}(A \times B, C) \longrightarrow |\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))|$$

можно задать формулой

$$E'_X f = E' f,$$

где отображение $f \mapsto E' f$ было определено выше.

Определим теперь

$$E'_\Phi: \Phi_{(A \times B, C)} \longrightarrow \Phi_{(A, (B, C))}$$

как отображение множеств, обратное к E_Φ (см. (3.16)). И, наконец, определим естественное преобразование

$$E'_G: G_{(A \times B, C)} \longrightarrow (G_{(A, (B, C))})_{E'_\Phi(\cdot)}$$

так, чтобы

$$\begin{array}{ccc} E'_G(\alpha): & (G_{(A \times B, C)})_\alpha & \longrightarrow & (G_{(A, (B, C))})_{E'_\Phi(\alpha)} \\ & \parallel & & \parallel \\ & \prod_{(x, y) \in |A| \times |B|} (G_C)_{\alpha(x, y)} & & \prod_{x \in |A|} (\prod_{y \in |B|} (G_C)_{E'_\Phi(\alpha)(x)(y)}) \end{array}$$

тождественно отображало сомножитель $(G_C)_{\alpha(x, y)}$ на сомножитель $(G_C)_{E'_\Phi(\alpha)(x)(y)} = (G_C)_{\alpha(x, y)}$. Если E' – регулярный морфизм, то из построения очевидно, что он является регулярным обратным для регулярного морфизма E .

Из свойств, которые нужно проверить для доказательства регулярности E' , не очевидным, пожалуй, является лишь включение

$$E'_X(X_{(A \times B, C)})_\alpha \subseteq (X_{(A, (B, C))})_{E'_\Phi(\alpha)}, \quad \alpha \in \Phi_{(A \times B, C)}.$$

Для доказательства этого включения достаточно показать, что если (f, α) – некоторая $(A \times B)$ -карта в C , то $(E'_X(f), E'_\Phi(\alpha))$ является A -картой в $\text{Mor}(B, C)$. Пусть $x_0, \dots, x_p$ – некоторый локальный репер в A . Мы должны показать, что $E'_X(f)(x_0), \dots, E'_X(f)(x_p)$ является γ -репером в $\text{Mor}(B, C)$ для некоторого $\gamma: |B| \rightarrow \Phi_C$, удовлетворяющего условиям $\gamma \geq E'_\Phi(\alpha)(x_i)$ ($0 \leq i \leq p$). Для любого $y \in |B|$ элементы $(x_0, y), \dots, (x_p, y)$ образуют локальный репер в $A \times B$. Стало быть, $f(x_0, y), \dots, f(x_p, y)$ – локальный репер в C . Из существования у глобального действия C сильной нижней грани вытекает, что множество $\{c \in \Phi_C \mid f(x_0, y), \dots, f(x_p, y) \text{ есть } c\text{-репер}, c \geq E'_\Phi(\alpha)(x_i)(y) \text{ } (0 \leq i \leq p)\}$ имеет инициальный элемент c_y . Определим отображение $\gamma: |B| \rightarrow \Phi_C$, полагая $\gamma(y) = c_y$. Ясно, что $\gamma \geq E'_\Phi(\alpha)(x_i)$ ($0 \leq i \leq p$). Мы должны показать, что $(E'_X(f)(x_0), \gamma)$ есть B -карта в C . Предположим, что это сделано. Тогда из леммы 3.7 и из того факта, что $E'_X(f)(x_0)(y), \dots, E'_X(f)(x_p)(y)$ является $\gamma(y)$ -репером для любого $y \in |B|$ следует, что $E'_X(f)(x_0), \dots, E'_X(f)(x_p)$ есть B -репер на карте $(E'_X(f)(x_0), \gamma)$. Но это означает, что $E'_X(f)(x_0), \dots, E'_X(f)(x_p)$ является γ -репером в $\text{Mor}(B, C)$ и теорема, тем самым, полностью доказана.

Итак, нам осталось показать, что $(E'_X(f)(x_0), \gamma)$ есть B -карта в C . Пусть $y_0, \dots, y_q$ – некоторый локальный репер в B . Тогда множество $\{(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ есть локальный репер в $A \times B$. Следовательно, множество $\{f(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$ является локальным c -репером для некоторого $c \in \Phi$, удовлетворяющего условиям $c \geq \alpha(x_i, y_j) = E'_\Phi(\alpha)(x_i)(y_j)$ ($0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q$). Так как $E'_X(f)(x_0)(y_j) = f(x_0, y_j)$ ($0 \leq j \leq q$), то очевидно, что множество $E'_X(f)(x_0)(y_0), \dots, E'_X(f)(x_0)(y_q)$ является c -репером и $c \geq E'_\Phi(\alpha)(x_0)(y_j)$ ($0 \leq j \leq q$).

4. Относительные действия и их пространства морфизмов

Для того чтобы развить гомотопическую теорию глобальных действий, нам понадобятся пунктированные действия и, более общо, относительные действия. В этом параграфе мы введем соответствующие понятия и определения. Заметим, что относительные действия устроены более сложно, чем их топологические двойники, и поэтому при работе с ними требуется определенная осторожность. Главный результат параграфа – это относительный вариант экспоненциального закона, доказанного в теореме 3.23.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть A – глобальное действие. *Поддействие* в A – это такое глобальное действие B , что $|B| \subseteq |A|$, причем указанное включение индуцирует морфизм глобальных действий $B \rightarrow A$. Если B – поддействие в A , то мы обозначаем этот факт как $B \subseteq A$. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\mathcal{N}$ – некоторый класс глобальных действий. Поддействие $B \subseteq A$ называется n - $\mathcal{N}$ -нормальным (соответственно, *регулярным*), если канонический морфизм $B \rightarrow A$ является n - $\mathcal{N}$ -нормальным (соответственно, *регулярным*). *Собственное поддействие* – это такое регулярное поддействие, что канонический морфизм $\Phi_B \rightarrow \Phi_A$ инъективен. *Стандартным поддействием* называется такое собственное поддействие $B \subseteq A$, что $\Phi_B = \{\alpha \in \Phi_A \mid (X_A)_\alpha \cap |B| \neq \emptyset\}$, Φ_B – полная подкатегория в Φ_A и для всех $\alpha \in \Phi_B$ имеют место равенства $(X_B)_\alpha = (X_A)_\alpha \cap |B|$, $(G_B)_\alpha = \text{Stab}_{G_A}((X_B)_\alpha) := \{\sigma \in (G_A)_\alpha \mid \sigma(X_B)_\alpha = (X_B)_\alpha\}$.

Имеет место следующее очевидное утверждение.

ЛЕММА 4.2. Пусть A – глобальное действие. Если $Y \subseteq |A|$, то существует и единственно такое глобальное действие B , что $|B| = Y$ и B является стандартным поддействием в A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть A – глобальное действие. Отмеченной точкой для A называется такое поддействие $B \subseteq A$, что $|B|$ содержит ровно одну точку. Любая отмеченная точка является ∞ -нормальным поддействием. Отмеченная точка называется *регулярной*, *собственной*, или *стандартной*, если таковым является соответствующее поддействие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Относительное глобальное действие – это такая упорядоченная пара $A = (A^{(1)}, A^{(2)})$ глобальных действий, что $A^{(2)}$ есть ∞ -нормальное поддействие в $A^{(1)}$. Относительное глобальное действие A называется *регулярным*, *собственным*, или *стандартным*, если таковым является соответствующее поддействие $A^{(2)} \subseteq A^{(1)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Пунктированное глобальное действие – это такое относительное глобальное действие $A = (A^{(1)}, A^{(2)})$, что $A^{(2)}$ – отмеченная точка для $A^{(1)}$. Оно называется *регулярным*, *собственным*, или *стандартным*, если такова его отмеченная точка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Морфизм относительных действий $f: A \rightarrow B$ – это такой морфизм глобальных действий $f: A^{(1)} \rightarrow B^{(1)}$, что $|A^{(2)}|$ переходит в $|B^{(2)}|$ и индуцирует морфизм $A^{(2)} \rightarrow B^{(2)}$. Морфизм относительных действий $f: A \rightarrow B$ называется *регулярным*, если морфизмы $f: A^{(i)} \rightarrow B^{(i)}$, $i = 1, 2$, глобальных действий несут фиксированную регулярную структуру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Пусть A – относительное действие. Пара $U = (U^{(1)}, U^{(2)})$ локальных реперов состоит из таких локальных реперов $U^{(i)}$ в $A^{(i)}$, $i = 1, 2$, что $U^{(2)} \subseteq U^{(1)}$. Пара $(U^{(1)}, U^{(2)})$ называется *полной*, если $U^{(2)} = U^{(1)} \cap |A^{(2)}|$. Говорят, что $(U^{(1)}, U^{(2)})$ – пара реперов в точке $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) \in \Phi_{A^{(1)}} \times \Phi_{A^{(2)}}$, если $U^{(i)}$ – локальный репер в точке $\alpha^{(i)}$. Пара локальных реперов $(U^{(1)}, U^{(2)})$ в точке $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ называется *относительным локальным репером* в $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ или $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ -*относительным локальным репером*, если $(G_{A^{(2)}})_{\alpha^{(2)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\alpha^{(1)}}(u)$ для некоторого и, следовательно, для любого $u \in U^{(2)}$.

Чтобы определить относительную A -карту в B , где A и B – относительные действия, необходимо ввести глобальную структуру на множестве $\text{Mor}(A, B)$ всех морфизмов из A в B . Отметим, что если $|A^{(2)}| = \emptyset = |B^{(2)}|$, то понятие относительной карты будет совпадать с понятием карты для глобальных действий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Пусть A и B – относительные действия. Относительная A -карта, или просто A -карта, в B состоит из морфизма относительных действий $f: A \rightarrow B$ и функции $\beta: |A^{(1)}| \rightarrow \Phi_{B^{(1)}} \cap \Phi_{B^{(2)}}$, для которых выполняются следующие условия.

(4.8.0) Пусть $|A^{(1)} \setminus (2)| = |A^{(1)}| \setminus |A^{(2)}|$. Тогда функция β переводит $|A^{(1)} \setminus (2)|$ в $\Phi_{B^{(1)}}$ и $|A^{(2)}|$ в $\Phi_{B^{(2)}}$.

(4.8.1) Если $x \in |A^{(1)} \setminus (2)|$, то $f(x) \in (X_{B^{(1)}})_{\beta(x)}$. Если $x \in |A^{(2)}|$, то $f(x) \in (X_{B^{(2)}})_{\beta(x)}$.

(4.8.2) Если $(U^{(1)}, U^{(2)})$ – полная пара локальных реперов в A , то $(fU^{(1)}, fU^{(2)})$ – такой относительный локальный репер в некоторой точке $(b^{(1)}, b^{(2)}) \in \Phi_{B^{(1)}} \times \Phi_{B^{(2)}}$, что $\beta(u) \leq b^{(1)}$ для всех $u \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}$ и $\beta(u) \leq b^{(2)}$ для всех $u \in U^{(2)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ–ЛЕММА 4.9. Пусть A и B – относительные действия и (f, β) – некоторая A -карта в B .

Для

$$\sigma = (\sigma_x) \in \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} (G_{B^{(1)}})_{\beta(x)} \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{B^{(2)}})_{\beta(x)}$$

положим

$$\sigma f: |A^{(1)}| \rightarrow |B^{(1)}|, \quad x \mapsto \sigma_x f(x).$$

Тогда σf – морфизм относительных действий $A \rightarrow B$ и $(\sigma f, \beta)$ – некоторая A -карта в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что пара $(\sigma f, \beta)$ удовлетворяет условиям (4.8.0) и (4.8.1). Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить условие (4.8.2). Пусть $(\{x_0, \dots, x_p\}, \{x_0, \dots, x_q\})$, $q \leq p$, – некоторая полная пара локальных реперов в A . По определению, $f(x_0), \dots, f(x_p)$ является $b^{(1)}$ -репером для некоторого $b^{(1)} \in \Phi_{B^{(1)}}$, $b^{(1)} \geq \beta(x_{q+1}), \dots, \beta(x_p)$ а $f(x_0), \dots, f(x_q)$ является $b^{(2)}$ -репером для некоторого $b^{(2)} \in \Phi_{B^{(2)}}$, $b^{(2)} \geq \beta(x_0), \dots, \beta(x_q)$, причем $(G_{B^{(2)}})_{b^{(2)}} f(x_0) \subseteq (G_{B^{(1)}})_{b^{(1)}} f(x_0)$. Отсюда следует, что $\sigma_{x_0} f(x_0), \dots, \sigma_{x_p} f(x_p)$ является $b^{(1)}$ -репером, $\sigma_{x_0} f(x_0), \dots, \sigma_{x_q} f(x_q)$ является $b^{(2)}$ -репером и

$$(G_{B^{(2)}})_{b^{(2)}} (\sigma_{x_0} f(x_0)) \subseteq (G_{B^{(1)}})_{b^{(1)}} (\sigma_{x_0} f(x_0)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Пусть A и B – относительные действия и (f, β) – некоторая A -карта в B . (Относительным) A -репером в точке f на карте (f, β) называется такое множество морфизмов $f = f_0, f_1, \dots, f_p: A \rightarrow B$, для которого существуют элементы

$$\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} (G_{B^{(1)}})_{\beta(x)} \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{B^{(2)}})_{\beta(x)},$$

удовлетворяющие соотношениям $\sigma_i f = f_i$, $1 \leq i \leq p$. (В силу леммы 4.9 множество $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ является также A -репером в точке f_i на карте (f_i, β) для любого i ($0 \leq i \leq p$).)

Следующее полезное утверждение представляет собой аналог леммы 3.7.

ЛОКАЛЬНО–ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЕММА 4.11. Пусть A и B – относительные действия и (f, β) – некоторая A -карта в B . Множество $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ является A -репером в точке f на карте (f, β) тогда и только тогда, когда для каждого $x \in |A^{(1)}|$ элементы $f(x), f_1(x), \dots, f_p(x)$ образуют локальный (не относительно локальный) репер в $f(x)$ для $\beta(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является тривиальным следствием леммы 4.9.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.12. Пусть A , B и C – относительные действия. Морфизм $g: B \rightarrow C$ называется A -нормальным морфизмом относительных действий, если $g: B^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$ сохраняет $A^{(1)}$ -реперы и $g: B \rightarrow C$ сохраняет A -реперы. (Напомним, что это означает следующее: если $f, f_1, \dots, f_p$ – некоторый A -репер в точке f на карте (f, β) , то $gf, gf_1, \dots, gf_p$ является A -репером в точке gf на некоторой A -карте (gf, γ) в C .) Нормальным морфизмом относительных действий $g: B \rightarrow C$ называется морфизм, который сохраняет A -реперы для любого относительного действия A . Наконец, A -нормальный (соответственно, нормальный) изоморфизм – это такой

A -нормальный (соответственно, нормальный) морфизм, для которого существует A -нормальный (соответственно, нормальный) обратный.

В общем случае A -нормальный (соответственно, нормальный) морфизм, являющийся изоморфизмом в обычном смысле, не обязан быть A -нормальным (соответственно, нормальным) изоморфизмом.

ЛЕММА 4.13. *Любой регулярный морфизм относительных действий является нормальным морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta: B \rightarrow C$ – некоторый регулярный морфизм относительных действий. Если (f, β) – произвольная A -карта в B , то прямая проверка показывает, что $(\eta_X f, \eta_\Phi \beta)$ является A -картой в C . Пусть $f, f_1, \dots, f_p$ – какой либо A -репер в точке f на карте (f, β) и элементы

$$\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} (G_{B^{(1)}})_{\beta(x)} \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{B^{(2)}})_{\beta(x)}$$

таковы, что $\sigma_i f = f_i$, $1 \leq i \leq p$. Для

$$\sigma = (\sigma_x) \in \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} (G_{B^{(1)}})_{\beta(x)} \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{B^{(2)}})_{\beta(x)}$$

положим

$$\eta_G(\sigma) = (\eta_G(\beta(x))(\sigma_x)) \in \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} (G_{C^{(1)}})_{\eta_\Phi \beta(x)} \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{C^{(2)}})_{\eta_\Phi \beta(x)}.$$

Тогда согласно (3.3.4) имеет место соотношение $\eta_G(\sigma_i)(\eta_X f) = \eta_X f_i$, $1 \leq i \leq p$. Следовательно, множество $\eta_X f, \eta_X f_1, \dots, \eta_X f_p$ является A -репером в точке $\eta_X f$ на карте $(\eta_X f, \eta_\Phi \beta)$.

Зададим теперь структуру относительного действия на множестве $\text{Mor}(A, B)$ всех морфизмов из относительного действия A в относительное действие B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.14. Пусть A и B – относительные действия. Определим относительное действие

$$\text{Mor}(A, B) = (\text{Mor}(A, B)^{(1)}, \text{Mor}(A, B)^{(2)})$$

следующим образом. Прежде всего положим

$$\text{Mor}(A, B)^{(2)} = \text{Mor}(A^{(1)}, B^{(2)}).$$

Зададим $\text{Mor}(A, B)^{(1)}$ как глобальное действие с обертывающим множеством $|\text{Mor}(A, B)|$ и глобальной структурой

$$(\Phi_{(A, B)^{(1)}}, G_{(A, B)^{(1)}}, X_{(A, B)^{(1)}}),$$

определяемой следующими правилами.

$$\Phi_{(A, B)^{(1)}} = \{\beta: |A| \rightarrow \Phi_{B^{(1)}} \cup \Phi_{B^{(2)}} \mid (4.8.0) \text{ удовлетворены}\}.$$

Наделим множество $\Phi_{(A, B)^{(1)}}$ транзитивным рефлексивным отношением, полагая $\beta \leq \beta' \Leftrightarrow \beta(x) \leq \beta'(x) \forall x \in |A^{(1)}|$. Для $\beta \in \Phi_{(A, B)^{(1)}}$, определим $(G_{(A, B)^{(1)}})_\beta$ как

$$(G_{(A, B)^{(1)}})_\beta = \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} (G_{B^{(1)}})_{\beta(x)} \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{B^{(2)}})_{\beta(x)}.$$

Если $\beta \leq \beta'$, то для каждого $x \in |A^{(1)} \setminus (2)|$ существует функториально определенный гомоморфизм $(G_{B^{(1)}})_{\beta(x)} \rightarrow (G_{B^{(1)}})_{\beta'(x)}$ и для каждого $x \in |A^{(2)}|$ – функториально определенный гомоморфизм $(G_{B^{(2)}})_{\beta(x)} \rightarrow (G_{B^{(2)}})_{\beta'(x)}$. Следовательно, определен гомоморфизм $(G_{(A,B)})_{\beta} \rightarrow (G_{(A,B)})_{\beta'}$, функториально зависящий от β . Для $\beta \in \Phi_{(A,B)^{(1)}}$ положим

$$(X_{(A,B)^{(1)}})_{\beta} = \{f: |A^{(1)}| \rightarrow |B^{(1)}| \mid (f, \beta) \text{ есть } A\text{-карта в } B\}.$$

Если $\sigma \in (G_{(A,B)^{(1)}})_{\beta}$ и $f \in (X_{(A,B)^{(1)}})_{\beta}$, то из леммы 4.9 следует, что $\sigma f \in (X_{(A,B)^{(1)}})_{\beta}$. Это означает, что на $(X_{(A,B)^{(1)}})_{\beta}$ задано действие группы $(G_{(A,B)^{(1)}})_{\beta}$. Легко проверяется, что пара $(\text{Mor}(A, B)^{(1)}, \text{Mor}(A, B)^{(2)})$ удовлетворяет всем условиям для относительного действия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.15. *Как функтор, принимающий значения в относительных действиях, $\text{Mor}(\ , \ )$ контравариантен и регулярен относительно всех морфизмов по первому аргументу при условии, что для второго аргумента допускаются только регулярные относительные действия, и ковариантен относительно всех нормальных морфизмов по второму аргументу. Более подробно, имеют место следующие утверждения.*

(4.15.1) Пусть C – регулярное относительное действие и $f: A \rightarrow B$ – морфизм относительных действий. Тогда f следующим образом определяет регулярный морфизм

$$\eta = \text{Mor}(f, 1_C): \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C).$$

Обозначим через $\nu: \Phi_{C^{(1)}} \rightarrow \Phi_{C^{(2)}}$ каноническое отображение и зададим сохраняющий отношения морфизм

$$\eta_{\Phi^{(1)}}: \Phi_{(B,C)^{(1)}} \rightarrow \Phi_{(A,C)^{(1)}},$$

полагая

$$\eta_{\Phi^{(1)}}(\beta) = \beta \circ f,$$

где

$$\beta \circ f(x) = \begin{cases} \beta(f(x)), & \text{если } x \in |A^{(1)} \setminus (2)| \text{ и } f(x) \notin B^{(2)}, \\ \nu\beta(f(x)), & \text{если } x \in |A^{(1)} \setminus (2)| \text{ и } f(x) \in B^{(2)}, \\ \beta(f(x)), & \text{если } x \in |A^{(2)}|. \end{cases}$$

Определим естественное преобразование

$$\eta_{G^{(1)}}: G_{(B,C)^{(1)}} \rightarrow G_{(A,C)^{(1)}}$$

как семейство

$$\begin{array}{ccc} \eta_{G^{(1)}}(\beta): (G_{(B,C)^{(1)}})_{\beta} & \longrightarrow & (G_{(A,C)^{(1)}})_{\eta_{\Phi^{(1)}}(\beta)} \\ \parallel & & \parallel \\ \prod_{y \in |B^{(1)} \setminus (2)|} (G_{C^{(1)}})_{\beta(y)} \times \prod_{y \in |B^{(2)}|} (G_{C^{(2)}})_{\beta(y)} & & \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} (G_{C^{(1)}})_{\beta \circ f(x)} \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{C^{(2)}})_{\beta \circ f(x)} \end{array}$$

где

$$\eta_{G^{(1)}}(\beta)|_{(G_{C^{(i)}})_{\beta(y)}}$$

($i = 1$, если $y \notin |B^{(2)}|$), и $i = 2$, если $y \in |B^{(2)}|$) – диагональный гомоморфизм

$$(G_{C^{(2)}})_{\beta(y)} \longrightarrow \prod_{x \in |A^{(1)}|, f(x)=y} (G_{C^{(i)}})_{\beta \circ f(x)}.$$

Прямая проверка показывает, что тройка

$$\eta^{(1)} = (\eta_{\Phi^{(1)}}, \eta_{G^{(1)}}, \eta_X)$$

определяет регулярный морфизм глобальных действий

$$\eta^{(1)}: \text{Mor}(B, C)^{(1)} \rightarrow \text{Mor}(A, C)^{(1)}$$

и что ограничение $\eta^{(2)} = \eta_X|_{\text{Mor}(B, C)^{(2)}}$ задает морфизм глобальных действий

$$\eta^{(2)}: \text{Mor}(B, C)^{(2)} \rightarrow \text{Mor}(A, C)^{(2)}.$$

Используя (3.11.1), наделим $\eta^{(2)}$ регулярной структурой. Тогда пара

$$\eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$$

является регулярным морфизмом относительных действий

$$\eta: \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C).$$

Кроме того, $\text{Mor}(B, C)$ и $\text{Mor}(A, C)$ являются регулярными относительными действиями, регулярные структуры на которых индуцированы регулярной структурой на C .

(4.15.2) Пусть A – относительное действие и $g: B \rightarrow C$ – морфизм относительных действий. Функция

$$\text{Mor}(1_A, g): |\text{Mor}(A, B)^{(1)}| \rightarrow |\text{Mor}(A, C)^{(1)}|$$

задает морфизм глобальных действий $\text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$ тогда и только тогда, когда g является A -нормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (4.15.1) В этом пункте все доказано. (4.15.2) Пусть (f, β) – некоторая A -карта в B , (f', β') – некоторая $A^{(1)}$ -карта в $B^{(2)}$, $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ – какой-либо A -репер на (f, β) и $f' = f'_0, f'_1, \dots, f'_p$ – какой-либо $A^{(1)}$ -репер на (f', β') . Из определения следует, что $f_0, \dots, f_p$ является также локальным β -репером в глобальном действии $\text{Mor}(A, B)^{(1)}$; обратно, любой локальный репер в $\text{Mor}(A, B)^{(1)}$ есть в то же время A -репер на некоторой A -карте в B . Аналогично, $f'_0, \dots, f'_p$ – локальный β' -репер в глобальном действии $\text{Mor}(A, B)^{(2)}$, и любой локальный репер в $\text{Mor}(A, B)^{(2)}$ является $A^{(1)}$ -репером на некоторой $A^{(1)}$ -карте в $B^{(2)}$. Следовательно, функция $\text{Mor}(1_A, g): |\text{Mor}(A, B)^{(1)}| \rightarrow |\text{Mor}(A, C)^{(1)}|$ определяет морфизм относительных действий $\text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$ тогда и только тогда, когда $\text{Mor}(1_A, g)$ сохраняет A -реперы, а $\text{Mor}(1_A, g)^{(2)}: |\text{Mor}(A, B)^{(2)}| \rightarrow |\text{Mor}(A, C)^{(2)}|$ сохраняет $A^{(1)}$ -реперы. В свою очередь, это условие выполняется тогда и только тогда, когда морфизм g является A -нормальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.16. Пусть $g: B \rightarrow C$ – морфизм относительных действий. Последовательность $A_n, \dots, A_1$ относительных действий называется *нормальной цепью* длины n для g , если морфизм g является A_1 -нормальным и если для любого i , $0 \leq i \leq n-1$, морфизм

$$\text{Mor}(1_{A_{i-1}}, \dots, \text{Mor}(1_{A_1}, g)) \dots):$$

$$\text{Mor}(A_i, \text{Mor}(A_{i-1}, \dots, \text{Mor}(A_1, B)) \dots) \rightarrow \text{Mor}(A_i, \text{Mor}(A_{i-1}, \dots, \text{Mor}(A_1, C)) \dots)$$

является A_{i+1} -нормальным. Пусть $\mathcal{N}$ – некоторый класс относительных действий. Морфизм g называется n - $\mathcal{N}$ -нормальным, если каждая последовательность из n объектов, принадлежащих $\mathcal{N}$, образует нормальную цепь для g . Морфизм g называется $\mathcal{N}$ -нормальным (соответственно, ∞ - $\mathcal{N}$ -нормальным), если он 1 - $\mathcal{N}$ -нормален (соответственно, n - $\mathcal{N}$ -нормален для всех $n > 0$). Если $\mathcal{N} = \{A\}$ (соответственно, $\mathcal{N}$ – класс всех относительных действий), мы будем называть соответствующий морфизм ∞ - A -нормальным (соответственно, ∞ -нормальным).

Если термином t -морфизм обозначить один из определенных выше вариантов нормального или регулярного морфизма, то t -изоморфизмом называется t -морфизм, обладающий обратным t -морфизмом.

ЛЕММА 4.17. Пусть $g: B \rightarrow C$ – регулярный морфизм относительных действий. Тогда для любого относительного действия A морфизм $\text{Mor}(1_A, g): \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$ регулярен и, следовательно, g является ∞ -нормальным морфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4.13 и предложению 4.15.2 морфизм

$$\text{Mor}(1_A, g): \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$$

определен корректно. Пусть $(\eta_\Phi, \eta_G, \eta_X = g)$ – регулярная структура морфизма g . Зададим регулярную структуру $(\mu_\Phi, \mu_g, \mu_X = \text{Mor}(1_A, g))$ для морфизма $\text{Mor}(1_A, g)$.

Определим, прежде всего, координатные морфизмы, полагая

$$\begin{aligned} \mu_{\Phi(1)}: \Phi_{(A,B)(1)} &\rightarrow \Phi_{(A,C)(1)}, & \beta &\mapsto \eta_{\Phi(1)}\beta, \\ \mu_{\Phi(2)}: \Phi_{(A,B)(2)} &\rightarrow \Phi_{(A,C)(2)}, & \beta &\mapsto \eta_{\Phi(2)}\beta. \end{aligned}$$

Далее, определим естественное преобразование

$$\mu_{G(1)}: G_{(A,B)(1)} \rightarrow G_{(A,C)(1)}$$

с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (G_{(A,B)(1)})_\beta & \xrightarrow{\mu_{G(1)}(\beta)} & (G_{(A,C)(1)})_{\mu_{\Phi(1)}(\beta)} \\ \parallel & & \parallel \\ G^1 \times G^2 & \xrightarrow{\tau} & G^3 \times G^4 \end{array}$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus \{2\}|} \eta_{G(1)}(\beta(x)) \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} \eta_{G(1)}(\beta(x)), \\ G^1 &= \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus \{2\}|} (G_{B(1)})_{\beta(x)}, & G^2 &= \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{B(2)})_{\beta(x)}, \\ G^3 &= \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus \{2\}|} (G_{C(1)})_{\eta_{\Phi(1)}(\beta(x))}, & G^4 &= \prod_{x \in |A^{(2)}|} (G_{C(2)})_{\eta_{\Phi(2)}(\beta(x))}. \end{aligned}$$

Кроме того, зададим естественное преобразование

$$\mu_{G^{(2)}} : G_{(A,B)^{(2)}} \rightarrow G_{(A,C)^{(2)}}$$

так же, как в доказательстве леммы 3.13.

Прямая проверка показывает, что $(\mu_\Phi, \mu_G, \text{Mor}(1_A, g))$ является регулярным морфизмом. Тот факт, что морфизм g является ∞ -нормальным, получается отсюда элементарной индукцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.18. Пусть N – название одного из типов морфизмов, определенных в 4.16. Относительное действие называется N -действием, если каждый его морфизм является N -морфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.19. Пусть A и B – относительные действия. Определим относительное действие

$$A \bowtie B$$

следующим образом:

$$(A \bowtie B)^{(1)} = A^{(1)} \times B^{(1)}.$$

Обертывающее множество для $(A \bowtie B)^{(2)}$ задается формулой

$$|(A \bowtie B)^{(2)}| = |A^{(1)}| \times |B^{(2)}| \cup |A^{(2)}| \times |B^{(1)}|,$$

где объединение берется внутри множества $|A^{(1)}| \times |B^{(1)}|$. Координатная система для $(A \bowtie B)^{(2)}$ есть

$$\Phi_{(A \bowtie B)^{(2)}} = \Phi_{A^{(1)}} \times \Phi_{B^{(2)}} \cup \Phi_{A^{(2)}} \times \Phi_{B^{(1)}},$$

где на сей раз рассматривается несвязное объединение. Морфизмы между элементами определяются покоординатно. Глобальный групповой функтор для $(A \bowtie B)^{(2)}$ определяется правилом

$$(G_{(A \bowtie B)^{(2)}})_{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} (G_{A^{(1)}})_\alpha \times (G_{B^{(2)}})_\beta & \text{если } (\alpha, \beta) \in \Phi_{A^{(1)}} \times \Phi_{B^{(2)}}, \\ (G_{A^{(2)}})_\alpha \times (G_{B^{(1)}})_\beta & \text{если } (\alpha, \beta) \in \Phi_{A^{(2)}} \times \Phi_{B^{(1)}}. \end{cases}$$

Глобальная функция множества для $(A \bowtie B)^{(2)}$ определяется правилом

$$(X_{(A \bowtie B)^{(2)}})_{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} (X_{A^{(1)}})_\alpha \times (X_{B^{(2)}})_\beta & \text{если } (\alpha, \beta) \in \Phi_{A^{(1)}} \times \Phi_{B^{(2)}}, \\ (X_{A^{(2)}})_\alpha \times (X_{B^{(1)}})_\beta & \text{если } (\alpha, \beta) \in \Phi_{A^{(2)}} \times \Phi_{B^{(1)}}. \end{cases}$$

Группа $(G_{(A \bowtie B)^{(2)}})_{(\alpha, \beta)}$ действует на множестве $(X_{(A \bowtie B)^{(2)}})_{(\alpha, \beta)}$ покоординатно.

Далее мы будем использовать обозначение $(S, T) = \text{Mor}_{\text{sets}}(S, T)$, где S и T – некоторые множества. Это обозначение было введено в определении 3.16.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.20. Пусть A, B и C – относительные действия. Регулярный морфизм

$$E : \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \bowtie B, C)$$

определяется следующим образом. Обозначим структурные компоненты относительного действия $\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))$ через $(\Phi_{(A, (B, C))}, G_{(A, (B, C))}, X_{(A, (B, C))})$. Определим $E_{\Phi^{(1)}}$ так, чтобы имела место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{(A, (B, C))^{(1)}} & \xrightarrow{E_{\Phi^{(1)}}} & \Phi_{(A \bowtie B, C)^{(1)}} \\ \cap \parallel & & \cap \parallel \\ (|A^{(1)}|, (|B^{(1)}|, \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}})) & \xrightarrow{(3.16)} & (|A^{(1)}| \times |B^{(1)}|, \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}}) \end{array}$$

Ясно, что $E_{\Phi(1)}$ сохраняет транзитивное рефлексивное отношение. Определим $E_{\Phi(2)}$ так же, как в (3.17), т.е. так, чтобы имела место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{(A,(B,C))^{(2)}} & \xrightarrow{E_{\Phi(2)}} & \Phi_{(A \bowtie B, C)^{(2)}} \\ \parallel & & \parallel \\ (|A^{(1)}|, (|B^{(1)}|, \Phi_{C^{(2)}})) & \xrightarrow{(3.16)} & (|A^{(1)}| \times |B^{(1)}|, \Phi_{C^{(2)}}) \end{array}$$

Зададим естественное преобразование

$$E_{G^{(1)}}: G_{(A,(B,C))^{(1)}} \rightarrow (G_{(A \bowtie B, C)^{(1)}})_{E_{\Phi(1)}} ( )$$

так, чтобы гомоморфизм

$$E_{G^{(1)}}(\alpha): (G_{(A,(B,C))^{(1)}})_{\alpha} \longrightarrow (G_{(A \bowtie B, C)^{(1)}})_{E_{\Phi(1)}}(\alpha)$$

тождественно отображал сомножитель из

$$\begin{aligned} (G_{(A,(B,C))^{(1)}})_{\alpha} &= \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} \left[\left(\prod_{y \in |B^{(1)} \setminus (2)|} (G_{C^{(1)}})_{\alpha(x)(y)} \right) \times \left(\prod_{y \in |B^{(2)}|} (G_{C^{(2)}})_{\alpha(x)(y)} \right) \right] \\ &\times \prod_{x \in |A^{(2)}|} \left[\prod_{y \in |B^{(1)}|} (G_{C^{(2)}})_{\alpha(x)(y)} \right] \end{aligned}$$

с индексом $\alpha(x)(y)$ на сомножитель из

$$\begin{aligned} (G_{(A \bowtie B, C)^{(1)}})_{\alpha} &= \prod_{(x,y) \in |A^{(1)} \setminus (2)| \times |B^{(1)} \setminus (2)|} (G_{C^{(1)}})_{(E_{\Phi(1)} \alpha)(x,y)} \\ &\times \prod_{(x,y) \in |(A \bowtie B)^{(2)}|} (G_{C^{(2)}})_{(E_{\Phi(1)} \alpha)(x,y)} \end{aligned}$$

с индексом $(E_{\Phi(1)} \alpha)(x, y)$. Определим естественное преобразование

$$E_{G^{(2)}}: G_{(A,(B,C))^{(2)}} \rightarrow G_{(A \bowtie B, C)^{(2)}}$$

так же, как в определении 3.17, т.е. так, чтобы гомоморфизм

$$E_{G^{(2)}}(\alpha): (G_{(A,(B,C))^{(2)}})_{\alpha} \rightarrow (G_{(A \bowtie B, C)^{(2)}})_{E_{\Phi(2)}}(\alpha)$$

тождественно отображал сомножитель из

$$(G_{(A,(B,C))^{(2)}})_{\alpha} = \prod_{x \in |A^{(1)}|} \left(\prod_{y \in |B^{(1)}|} (G_{C^{(2)}})_{\alpha(x)(y)} \right)$$

с индексом $\alpha(x)(y)$ на сомножитель из

$$(G_{(A \bowtie B, C)^{(2)}})_{E_{\Phi(2)}}(\alpha) = \prod_{(x,y) \in |A^{(1)}| \times |B^{(1)}|} (G_{C^{(2)}})_{(E_{\Phi(2)} \alpha)(x,y)}$$

с индексом $(E_{\Phi(2)}\alpha)(x, y)$. Прямая проверка показывает, что образ композиции отображений

$$|\mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C))^{(1)}| \longrightarrow (|A^{(1)}|, (|B^{(1)}|, |C^{(1)}|)) \xrightarrow{(3.16)} (|A^{(1)}| \times |B^{(1)}|, |C^{(1)}|)$$

лежит в $|\mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}|$. Поэтому определим

$$E_X: |\mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C))^{(1)}| \rightarrow |\mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}|$$

как результирующее отображение. Легко видеть, что тройка

$$E^{(1)} = (E_{\Phi(1)}, E_{G(1)}, E_X)$$

является регулярным морфизмом глобальных действий

$$E^{(1)}: \mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C))^{(1)} \rightarrow \mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}.$$

В общем случае $E^{(1)}$ не является изоморфизмом (соответственно, регулярным изоморфизмом), поскольку отображение E_X не обязано быть сюръективным (соответственно, $E_X((X_{(A, (B, C))^{(1)}})_\alpha)$ не обязано совпадать с $(X_{(A \bowtie B, C)^{(1)}})_{E_{\Phi(1)}(\alpha)}$). Пусть

$$E_{X^{(2)}} = E_X|_{|\mathrm{Mor}(A, (B, C))^{(2)}|}$$

и

$$E^{(2)} = (E_{\Phi(2)}, E_{G(2)}, E_{X^{(2)}}).$$

Тогда в силу 3.17

$$\begin{array}{ccc} E^{(2)}: & \mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C))^{(2)} & \longrightarrow \mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)^{(2)} \\ & \parallel & \parallel \\ & \mathrm{Mor}(A^{(1)}, \mathrm{Mor}(B^{(1)}, C^{(2)})) & \longrightarrow \mathrm{Mor}(A^{(1)} \times B^{(1)}, C^{(2)}) \end{array}$$

является регулярным морфизмом глобальных действий. Непосредственно проверяется, что пара

$$E = (E^{(1)}, E^{(2)})$$

представляет собой регулярный морфизм

$$E: \mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C)) \rightarrow \mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)$$

относительных действий.

Пусть $A_n, \dots, A_1$ – произвольная последовательность глобальных действий. Итерируя описанную выше процедуру, определим для любого $n \geq 2$ регулярный морфизм

$$E_n: \mathrm{Mor}(A_n, \mathrm{Mor}(A_{n-1}, \dots, \mathrm{Mor}(A_1, C)) \dots) \rightarrow \mathrm{Mor}(A_n \bowtie \dots \bowtie A_1, C)$$

следующим образом. Для $n = 2$ морфизм был определен выше. Предположим поэтому, что $n > 2$ и что морфизм уже определен для любого натурального числа N , где $2 \leq N \leq n - 1$. Пусть E_{n-1} – соответствующий морфизм для последовательности $A_{n-1}, \dots, A_1$. Определим морфизм E_n для последовательности $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1$ как композицию регулярного морфизма $\mathrm{Mor}(1_{A_n}, E_{n-1})$ (см. (4.17)) и регулярного морфизма

$$E_2: \mathrm{Mor}(A_n, \mathrm{Mor}(A_{n-1} \bowtie \dots \bowtie A_1, B)) \rightarrow \mathrm{Mor}(A_n \bowtie \dots \bowtie A_1, B).$$

Займемся теперь проблемой нахождения обратного морфизма для E_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.21. Пусть $\mathcal{P}$ – некоторый класс относительных действий, замкнутый относительно конечного числа операций $\bowtie$. Относительное действие C называется ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным, если морфизм E является ∞ - $\mathcal{P}$ -нормальным морфизмом для всех пар $A, B \in \mathcal{P}$. Действие C называется *регулярно- ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным*, если E регулярный изоморфизм для всех пар $A, B \in \mathcal{P}$. Если класс $\mathcal{P}$ состоит из всех конечных $\bowtie$ -произведений некоторого относительного действия A (соответственно, из всех таких относительных действий A , что $|A^{(i)}| = \bigcup_{\alpha \in \Phi_{A^{(i)}}} (X_{A^{(i)}})_{\alpha}$, $i = 1, 2$), то ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальное действие C называется ∞ – A -экспоненциальным (соответственно, ∞ -экспоненциальным).

ЛЕММА 4.22. *Предположим, что относительное действие C является ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным (соответственно, регулярно ∞ - $\mathcal{P}$ -экспоненциальным). Тогда для любой последовательности $A_n, \dots, A_1 \in \mathcal{P}$, $n \geq 2$, морфизм E_n из определения 4.20 является ∞ - $\mathcal{P}$ -нормальным (соответственно, регулярным) изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в точности совпадает с доказательством леммы 3.19.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.23. Пусть A и B – относительные действия. Морфизм $f: A \rightarrow B$ называется *четким*, если он сохраняет относительные локальные реперы. Более подробно, если $U^{(i)} \subseteq |A^{(i)}|$ ($i = 1, 2$) – такие непустые подмножества, что $U^{(2)} \subseteq U^{(1)}$ и пара $(U^{(1)}, U^{(2)})$ образует относительный локальный репер в A , то пара $(fU^{(1)}, fU^{(2)})$ образует относительный локальный репер в B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.24. Относительное действие A называется *сильным четким действием*, если выполняется следующее условие.

(4.24.1) Пусть $\Delta^{(2)} \subseteq \Phi_{A^{(2)}}$ – произвольное конечное множество и $U^{(i)} \subseteq |A^{(i)}|$ ($i = 1, 2$) – такие непустые конечные подмножества, что $U^{(2)} \subseteq U^{(1)}$. Предположим, что для каждого $\delta^{(2)} \in \Delta^{(2)}$ пересечение $(X_{A^{(2)}})_{\delta^{(2)}} \cap U^{(2)}$ не пусто. Кроме того, предположим, что $U^{(i)}$ – такой локальный репер с точки $\alpha^{(i)} \in \Phi_{A^{(i)}}$ ($i = 1, 2$), что $(G_{A^{(2)}})_{\delta^{(2)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\alpha^{(1)}}(u)$ для всех $\delta^{(2)} \in \Delta^{(2)}$, $\delta^{(2)} \leq \alpha^{(2)}$, $u \in (X_{A^{(2)}})_{\delta^{(2)}} \cap U^{(2)}$. Тогда существует такой элемент $\beta^{(2)} \in \Phi_{A^{(2)}}$, что $\delta^{(2)} \leq \beta^{(2)} \leq \alpha^{(2)}$ для всех $\delta^{(2)} \in \Delta^{(2)}$ и $(U^{(1)}, U^{(2)})$ является относительным локальным репером в точке $(\alpha^{(1)}, \beta^{(2)})$.

Относительное действие A называется *четким действием*, если условие (4.24.1) выполняется по меньшей мере для $\Delta^{(2)} = \emptyset$.

Подпространство $B \subseteq A$ глобального действия A называется *четким* (соответственно, *сильным четким*) *подпространством*, если пара (A, B) представляет собой четкое (соответственно, сильное четкое) относительное действие.

Ясно, что пунктированное действие является сильным четким относительным действием.

ЛЕММА 4.25. *Пусть $f: A \rightarrow B$ – морфизм относительных действий, причем B является четким. Тогда f – четкий морфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторый относительный репер $(U^{(1)}, U^{(2)})$ в A . Так как f – морфизм относительных действий, то пара $(fU^{(1)}, fU^{(2)})$ удовлетворяет условию (4.24.1) для $\Delta^{(2)} = \emptyset$. Следовательно, $(fU^{(1)}, fU^{(2)})$ – относительный локальный репер в B .

Следующее условие дает нам полезный критерий, гарантирующий, что относительное действие является либо ∞ -нормальным, либо ∞ -экспоненциальным, либо регулярно ∞ -экспоненциальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.26. Относительное действие A называется *действием с сильной нижней гранью*, если $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ – действия с сильной нижней гранью и выполнено следующее условие.

(4.26.1) Пусть $\Delta^{(i)} \subseteq \Phi_{A^{(i)}} (i = 1, 2)$ – произвольные конечные подмножества и $U^{(i)} \subseteq |A^{(i)}| (i = 1, 2)$ – такие непустые конечные подмножества, что $U^{(2)} \subseteq U^{(1)}$. Предположим, что для каждого $\delta^{(i)} \in \Delta^{(i)}$ пересечение $(X_{A^{(i)}})_{\delta^{(i)}} \cap U^{(i)}$ не пусто. Кроме того, предположим, что не пусты множества $\Psi^{(1)} = \{\alpha^{(1)} \in \Phi_{A^{(1)}}^{\geq \Delta^{(1)}} \mid U^{(1)} \text{ есть } \alpha^{(1)}\text{-репер, } \delta^{(1)} \leq \alpha^{(1)} \forall \delta^{(1)} \in \Delta^{(1)}, (G_{A^{(2)}})_{\delta^{(2)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\alpha^{(1)}}(u) \forall \delta^{(2)} \in \Delta^{(2)} \text{ и } u \in (X_{A^{(2)}})_{\delta^{(2)}} \cap U^{(2)}\}$ и $\Psi^{(2)} = \{\alpha^{(2)} \in \Phi_{A^{(2)}} \mid U^{(2)} \text{ есть } \alpha^{(2)}\text{-репер, } \delta^{(2)} \leq \alpha^{(2)} \forall \delta^{(2)} \in \Delta^{(2)}\}$. Тогда множества $\Psi^{(i)} (i = 1, 2)$ содержат такой инициальный элемент $\beta^{(i)}$, что $(G_{A^{(2)}})_{\beta^{(2)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\beta^{(1)}}(u)$ для $u \in U^{(2)}$.

Относительное действие A называется *действием с нижней гранью*, если $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ – действия с нижней гранью и условие (4.26.1) выполнено по меньшей мере для пары множеств $(\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}) = (\emptyset, \emptyset)$.

Легко видеть, что имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4.27. *Стандартное пунктированное действие A является относительным действием с нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью) тогда и только тогда, когда $A^{(1)}$ – глобальное действие с нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью).*

ЛЕММА 4.28. *Относительное действие A обладает нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью) тогда и только тогда, когда оно является четким, (соответственно, сильным четким) и $A^{(i)} (i = 1, 2)$ – глобальное действие с нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$) Предположим, что выполнены предположения, фигурирующие в условии (4.24.1). Мы должны показать, что тогда справедливо заключение этого условия, необходимое для четких или сильно четких действий. Пусть $\Delta^{(1)} = \emptyset$ и $\Psi^{(i)} (i = 1, 2)$ – множества, определенные в (4.26.1). Так как элементы $\alpha^{(i)}$, описанные в определении (4.24.1), лежат в множествах $\Psi^{(i)} (i = 1, 2)$, то эти множества непусты. Пусть $\beta^{(i)} \in \Psi^{(i)}$ – инициальные элементы множеств $\Psi^{(i)}$, существование которых гарантируется условием (4.26.1). Из определения инициальности следует, что $\beta^{(i)} \leq \alpha^{(i)}$. Кроме того, заключение условия (4.26.1) гласит, что $U^{(2)}$ является $\beta^{(2)}$ -репером, $\delta^{(2)} \leq \beta^{(2)}$ для всех $\delta^{(2)} \in \Delta^{(2)}$ и что $(G_{A^{(2)}})_{\beta^{(2)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\beta^{(1)}}(u)$ для всех $u \in U^{(2)}$. Так как $\beta^{(1)} \leq \alpha^{(1)}$, то $(G_{A^{(1)}})_{\beta^{(1)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\alpha^{(1)}}(u)$. Следовательно, A – четкое или сильно четкое действие.

$\Leftarrow$) Предположим, что выполнены предположения, фигурирующие в условии (4.26.1). Мы должны показать, что A – действие с нижней гранью или сильной нижней гранью. Так как по предположению A является четким действием, то найдется такой элемент $\delta^{(2)} \in \Phi_{A^{(2)}}$, что $\delta^{(2)} \leq \gamma^{(2)} \leq \beta^{(2)}$ для всех $\delta^{(2)} \in \Delta^{(2)}$ и $(G_{A^{(2)}})_{\gamma^{(2)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\beta^{(1)}}(u)$ для всех $u \in U^{(2)}$. Это означает, что $\gamma^{(2)} \in \Psi^{(2)}$. Однако, поскольку $\beta^{(2)}$ – инициальный элемент в $\Psi^{(2)}$, то мы имеем $\beta^{(2)} \leq \gamma^{(2)}$ и, следовательно, $(G_{A^{(2)}})_{\gamma^{(2)}}(u) = (G_{A^{(2)}})_{\beta^{(2)}}(u)$. Поэтому $(G_{A^{(2)}})_{\beta^{(2)}}(u) \subseteq (G_{A^{(1)}})_{\beta^{(1)}}(u)$ для всех $u \in U^{(2)}$. Таким образом, A – действие с нижней гранью или сильной нижней гранью.

Суммируем теперь несколько простых, но полезных фактов.

ЛЕММА 4.29.

(4.29.1) Пусть A – глобальное действие. Если $U \subseteq V \subseteq |A|$ и V – локальный репер, то множество U также является локальным репером.

(4.29.2) Пусть $f: A \rightarrow B$ – морфизм глобальных действий, и элементы $\beta, \gamma \in \Phi_{(A,B)}$ таковы, что $f(x) \in \beta(x) \cap \gamma(x)$ для всех $x \in |A|$. Предположим, что $\beta \leq \gamma$ и (f, γ) является A -картой в B . Тогда (f, β) – также A -карта в B .

(4.29.3) Пусть A – относительное действие. Если множества $U^{(i)} \subseteq V^{(i)} \subseteq |A^{(i)}|$ ($i = 1, 2$) таковы, что $U^{(2)} \subseteq U^{(1)}$ и пара $(V^{(1)}, V^{(2)})$ является относительным локальным репером, то пара $(U^{(1)}, U^{(2)})$ – также относительный локальный репер.

(4.29.4) Пусть $f: A \rightarrow B$ – морфизм относительных действий и элементы $\beta^{(1)}, \gamma^{(1)} \in \Phi_{(A,B)^{(1)}}$ таковы, что $f(x) \in \beta^{(1)}(x) \cap \gamma^{(1)}(x)$ для всех $x \in |A^{(1)}|$. Предположим, что $\beta \leq \gamma$ и (f, γ) является A -картой в B . Тогда (f, β) – также A -карта в B .

ЛЕММА 4.30. Пусть B – некоторое относительное действие с нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью). Тогда для любого относительного действия A морфизмы $\text{Mor}(A, B)$ также образуют действие с нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{Mor}(A, B)^{(2)} = \text{Mor}(A^{(1)}, B^{(2)})$, то из леммы 3.22 вытекает, что $\text{Mor}(A, B)^{(2)}$ является действием с нижней гранью (соответственно, с сильной нижней гранью).

Покажем теперь, что $\text{Mor}(A, B)^{(1)}$ также обладает нижней гранью (соответственно, сильной нижней гранью). Пусть $U^{(1)} \subseteq |\text{Mor}(A, B)^{(1)}|$ – некоторое конечное непустое подмножество. Обозначим через $\Delta^{(1)} \subseteq \Phi_{(A,B)^{(1)}}$ такое конечное подмножество, что для каждого $\delta \in \Delta^{(1)}$ пересечение $(X_{(A,B)^{(1)}})_{\delta} \cap U^{(1)}$ не пусто. Положим $\Psi^{(1)} = \{\beta \in \Phi_{(A,B)^{(1)}} \mid U^{(1)} \text{ есть } \beta\text{-репер}, \delta \leq \beta \forall \delta \in \Delta^{(1)}\}$ и будем считать, что $\Psi^{(1)} \neq \emptyset$. Мы должны показать, что множество $\Psi^{(1)}$ имеет инициальный элемент. Для каждого $x \in |A^{(1)}|$ положим $U^{(1)}(x) = \{f(x) \mid f \in U^{(1)}\}$, $\Delta^{(1)}(x) = \{\delta(x) \mid \delta \in \Delta^{(1)}\}$ и $\Psi^{(1)}(x) = \{\beta(x) \mid \beta \in \Psi^{(1)}\}$. По предположению для каждого $x \in |A^{(1)}|$ найдется такая координата $b_x \in \Phi_{B^{(1)}} \cup \Phi_{B^{(2)}}$, что $U^{(1)}(x)$ является b_x -репером и $\delta(x) \leq b_x \leq \beta(x)$ для всех $\delta \in \Delta^{(1)}$ и $\beta \in \Psi^{(1)}$. Аналогичным образом, для каждого $x \in |A^{(2)}|$ существует такая координата $b_x \in \Phi_{B^{(2)}}$, что $U^{(1)}(x)$ является b_x -репером и $\delta(x) \leq b_x \leq \beta(x)$ для всех $\delta \in \Delta^{(1)}$ и $\beta \in \Psi^{(1)}$. Пусть $\gamma: |A^{(1)}| \rightarrow \Phi_{B^{(1)}} \cup \Phi_{B^{(2)}}$ – отображение, задаваемое правилом $x \mapsto b_x$. Ясно, что $\gamma \in \Phi_{(A,B)^{(1)}}$ и $\delta \leq \gamma \leq \beta$ для всех $\delta \in \Delta^{(1)}$, $\beta \in \Psi^{(1)}$. Рассмотрим какой-либо элемент $u \in U$. Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что пара (u, γ) является A -картой. Пусть $\beta \in \Psi^{(1)}$. Так как (u, β) является A -картой и $\gamma \leq \beta$, то из (4.29.4) следует, что (u, γ) также является A -картой.

Докажем, наконец, что выполнено условие (4.26.1). Пусть $\Delta^{(i)}, U^{(i)}$ и $\Psi^{(i)}$ такие же, как в (4.26.1). Для $x \in |A^{(1)}|$ определим множества $\Delta^{(i)}(x)$, $U^{(i)}(x)$ и $\Psi^{(i)}(x)$ так же, как это было сделано несколькими строками выше. При фиксированном x набор $\Delta^{(i)}(x)$, $U^{(i)}(x)$, $\Psi^{(i)}(x)$ удовлетворяет условию (4.26.1) применительно к действию B . Пусть $b_x^{(i)} \in \Psi^{(i)}(x)$ – инициальный элемент, существование которого гарантируется этим условием. Положим

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}: |A^{(1)}| &\rightarrow \Phi_{B^{(1)}} \cup \Phi_{B^{(2)}}, & x &\mapsto b_x^{(1)}, \\ \gamma^{(2)}: |A^{(1)}| &\rightarrow \Phi_B^{(2)}, & x &\mapsto b_x^{(2)}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\gamma^{(i)} \in \Phi_{(A,B)^{(i)}}$, $\delta^{(i)} \leq \gamma^{(i)} \leq \beta^{(i)}$ для всех $\delta^{(i)} \in \Delta^{(i)}$, $\beta^{(i)} \in \Psi^{(i)}$, и что $(G_{(A,B)^{(2)}})_{\gamma^{(2)}}(u) \subseteq (G_{(A,B)^{(1)}})_{\gamma^{(1)}}(u)$ для всех $u \in U^{(2)}$. Кроме того, для каждого $u \in U^{(1)}$ пара $(u, \gamma^{(1)})$ является A -картой в B , поскольку для любого $\beta^{(1)}$ такова пара $(u, \beta^{(1)})$; если же $u \in U^{(2)}$, то пара $(u, \gamma^{(2)})$ является $A^{(1)}$ -картой в $B^{(2)}$, поскольку для любого $\beta^{(2)} \in \Psi^{(2)}$ такова пара $(u, \beta^{(2)})$.

Следующее утверждение является главным результатом этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4.31. *Относительное действие с нижней гранью ∞ -нормально и ∞ -экспоненциально. Относительное действие с сильной нижней гранью ∞ -нормально и регулярно ∞ -экспоненциально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что действие C обладает нижней гранью. Докажем, что C является ∞ -нормальным. Согласно лемме 4.30 для этого достаточно показать, что C является A -нормальным для любого относительного действия A . Пусть $g: B \rightarrow C$ – морфизм относительных действий. Так как $C^{(2)}$ как глобальное действие ∞ -нормально, то морфизм $g: B^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$ является ∞ -нормальным и поэтому $A^{(1)}$ -нормальным. Пусть (f, β) – некоторая A -карта в B и $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ – произвольный A -репер на (f, β) . Мы должны показать, что $gf_0, \dots, gf_p$ является A -репером в C . Вначале мы построим такую относительную координату $(\gamma: |A^{(1)}| \rightarrow \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}}) \in \Phi_{(A,C)^{(1)}}$, для которой пара (gf, γ) будет A -картой в C .

Положим $F^{(1)} = \{f_0, \dots, f_p\}$. Для $x \in |A^{(1)}|$ обозначим через $F^{(1)}(x)$ множество $\{f_0(x), \dots, f_p(x)\}$. Согласно локально-глобальной лемме 4.11 множество $F^{(1)}(x)$ является локальным репером в $B^{(1)}$ или $B^{(2)}$, в зависимости от того, находится ли x в $|A^{(1)} \setminus (2)|$ или же в $|A^{(2)}|$. Следовательно, $gF^{(1)}(x)$ – локальный репер в $C^{(1)}$ или $C^{(2)}$ в зависимости от x . Пусть $\Psi^{(1)}(x) = \{c \in \Phi_{C^{(i)}} \mid gF^{(1)}(x) \text{ является локальным репером в } C^{(i)}, i = 1, \text{ если же } x \in |A^{(1)} \setminus (2)|, i = 2, \text{ если же } x \in |A^{(2)}|\}$. Поскольку действие $C^{(i)}$ обладает нижней гранью, множество $\Psi^{(1)}(x)$ имеет инициальный элемент c_x . Определим отображение $\gamma: |A^{(1)}| \rightarrow \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}}$ правилом $x \mapsto c_x$.

Покажем, что пара (gf, γ) является A -картой в C . Пусть $(U^{(1)}, U^{(2)})$ – полная пара локальных реперов в A . Тогда в силу леммы 3.24 $(F^{(1)}U^{(1)}, F^{(1)}U^{(2)})$ является парой локальных реперов в B . Следовательно, $(gF^{(1)}U^{(1)}, gF^{(1)}U^{(2)})$ – пара локальных реперов в C . Так как действие C удовлетворяет условию (4.28), то пара $(gF^{(1)}U^{(1)}, gF^{(1)}U^{(2)})$ представляет собой относительный локальный репер в некоторой точке $(c^{(1)}, c^{(2)}) \in \Phi_{C^{(1)}} \times \Phi_{C^{(2)}}$. Согласно (4.29.4), это означает, что $(gfU^{(1)}, gfU^{(2)})$ – относительный локальный репер в $(c^{(1)}, c^{(2)})$. Но из определения отображения γ , мы знаем, что для каждого $x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}$ (соответственно, $x \in U^{(2)}$) выполнено соотношение $\gamma(x) = c_x \leq c^{(1)}$ (соответственно, $\gamma(x) = c_x \leq c^{(2)}$). Это показывает, что пара (gf, γ) является A -картой в C .

Из определения γ немедленно вытекает, что $gf = gf_0, gf_1, \dots, gf_p$ есть A -репер на (gf, γ) . Тем самым, мы показали, что действие C является A -нормальным.

Докажем теперь, что действие C является ∞ -экспоненциальным. Пусть A и B – такие глобальные действия, что $|A^{(i)}| = \bigcup_{\alpha \in \Phi_{A^{(i)}}} (X_{A^{(i)}})_{\alpha}$ и $|B^{(i)}| = \bigcup_{\beta \in \Phi_{B^{(i)}}} (X_{B^{(i)}})_{\beta}$. Рассмотрим морфизм

$$E: \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \bowtie B, C),$$

определенный в 4.20, и докажем, что он обладает ∞ -нормальным обратным. По лемме 4.30 $\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))$ является действием с нижней гранью и, стало быть, оно

обязано быть ∞ -нормальным. Таким образом, если обратный морфизм для E существует, то он ∞ -нормален. Поэтому достаточно показать, что морфизм E допускает обратный. Существует очевидный кандидат для этого обратного морфизма, а именно отображение множеств

$$E': |\mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}| \rightarrow (A, (B, C)), \quad f \mapsto E'f,$$

где $(E'f(x))(y) = f(x, y)$. Покажем, что $E'f \in |\mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C))^{(1)}|$ и что результирующее отображение $E': |\mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}| \rightarrow |\mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C))^{(1)}|$ определяет морфизм глобальных действий $\mathrm{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)} \rightarrow \mathrm{Mor}(A, \mathrm{Mor}(B, C))^{(1)}$. Из теоретико-множественных свойств E' будет следовать, что E' является обратным для E .

Вначале докажем, что отображение $E'f: |A^{(1)}| \rightarrow (B, C)$ определяет морфизм глобальных действий $A^{(1)} \rightarrow \mathrm{Mor}(B, C)^{(1)}$. Нам нужно проверить два свойства:

- 1) если $x \in |A^{(1)}|$, то $E'f(x): |B^{(1)}| \rightarrow |C|^{(1)}$, $y \mapsto (E'f(x))(y)$ определяет морфизм относительных действий $B \rightarrow C$;
- 2) результирующее отображение $E'f: |A^{(1)}| \rightarrow |\mathrm{Mor}(B, C)^{(1)}|$, $x \mapsto E'f(x)$ определяет морфизм глобальных действий $A^{(1)} \rightarrow \mathrm{Mor}(B, C)^{(1)}$.

Доказательство того, что правило $y \mapsto (E'f(x))(y)$ задает морфизм глобальных действий $B^{(1)} \rightarrow C^{(1)}$, в точности совпадает с аналогичным доказательством из теоремы 3.23. Более того, очевидно, что морфизм $E'f(x): B^{(1)} \rightarrow C^{(1)}$ переводит $|B^{(2)}|$ в $|C^{(2)}|$. Поэтому, повторяя приведенные выше рассуждения, мы получаем, что $E'f(x)|_{|B^{(2)}|}$ является морфизмом глобальных действий $B^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$. Следовательно, $E'f(x): B \rightarrow C$ – морфизм относительных действий.

Пусть теперь $x_0, \dots, x_p$ – локальный репер в $A^{(1)}$. Мы должны показать, что $E'f(x_0), \dots, E'f(x_p)$ – локальный репер в $\mathrm{Mor}(B, C)^{(1)}$. Каждый элемент в $y \in |B^{(1)}|$ служит локальным репером в $B^{(1)}$, поскольку $|B^{(1)}| = \bigcup_{\beta \in \Phi_{B^{(1)}}} (X_{B^{(1)}})_{\beta}$. Следовательно, $(x_0, y), \dots, (x_p, y)$ – локальный репер в $(A \bowtie B)^{(1)}$. Но это означает, что множество $f(x_0, y), \dots, f(x_p, y)$ является локальным репером в $C^{(1)}$, причем если $y \in B^{(2)}$, то $f(x_0, y), \dots, f(x_p, y)$ – локальный репер в $C^{(2)}$. Из существования для действия $C^{(1)}$ нижней грани вытекает, что при $y \in B^{(1)} \setminus B^{(2)}$ множество $\{c \in \Phi_{C^{(1)}} \mid f(x_0, y), \dots, f(x_p, y) \text{ есть } c\text{-репер}\}$ имеет инициальный элемент c_y . Аналогично, из существования нижней грани для $C^{(2)}$ следует, что при $y \in |B^{(2)}|$ множество $\{c \in \Phi_{C^{(2)}} \mid f(x_0, y), \dots, f(x_p, y) \text{ есть } c\text{-репер}\}$ также имеет инициальный элемент; мы вновь обозначим его через c_y . Определим отображение $\gamma: |B^{(1)}| \rightarrow \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}}$ правилом $y \mapsto c_y$. Нам нужно показать, что пара $(E'f(x_0), \gamma)$ является B -картой в C . Предположим на мгновение, что это уже доказано. Тогда из локально-глобальной леммы 4.11 будет следовать, что $E'f(x_0), \dots, E'f(x_p)$ является B -репером на $(E'f(x_0), \gamma)$. Но тогда, по определению, $E'f(x_0), \dots, E'f(x_p)$ – локальный репер в $\mathrm{Mor}(B, C)^{(1)}$, что мы и хотели показать.

Докажем, что $(E'f(x_0), \gamma)$ является B -картой в C . Пусть $(V^{(1)}, V^{(2)})$ – полная пара локальных реперов в B . Мы должны показать, что $(E'f(x_0)V^{(1)}, E'f(x_0)V^{(2)})$ – такой относительный локальный репер в некоторой точке $(c^{(1)}, c^{(2)}) \in (\Phi_{C^{(1)}}, \Phi_{C^{(2)}})$, что $\gamma(y) \leq c^{(1)}$ для всех $y \in V^{(1)} \setminus V^{(2)}$ и $\gamma(y) \leq c^{(2)}$ для всех $y \in V^{(2)}$. Пусть $U = \{x_0, \dots, x_p\}$. Тогда $(U \times V^{(1)}, U \times V^{(2)})$ является парой локальных реперов в $A \bowtie B$. Стало быть $(f(U \times V^{(1)}), f(U \times V^{(2)}))$ – пара локальных реперов в C . Так как $(f(U \times V^{(1)}), f(U \times V^{(2)})) = ((E'f)UV^{(1)}, (E'f)UV^{(2)})$, то эта последняя

пара является парой локальных реперов в C . Из условия (4.26.1) следует, что $((E'f)UV^{(1)}, (E'f)UV^{(2)})$ – относительный локальный репер в некоторой точке $(c^{(1)}, c^{(2)}) \in \Phi_{C^{(1)}} \times \Phi_{C^{(2)}}$. Поэтому $((E'f)(x_0)V^{(1)}, (E'f)(x_0)V^{(2)})$ также является относительным локальным репером в этой точке. Но из определения отображения γ , вытекает, что для $y \in V^{(1)} \setminus V^{(2)}$ $\gamma(y) = c_y \leq c^{(1)}$ и для $y \in V^{(2)}$ $\gamma(y) = c_y \leq c^{(2)}$.

Ясно, что морфизм

$$E'f: A^{(1)} \rightarrow \text{Mor}(B, C)^{(1)}$$

переводит $|A^{(2)}|$ в $|\text{Mor}(B, C)^{(2)}|$. Покажем, что функция

$$(E'f)|_{|A^{(2)}|}: |A^{(2)}| \rightarrow |\text{Mor}(B, C)^{(2)}|$$

определяет морфизм глобальных действий $A^{(2)} \rightarrow \text{Mor}(B, C)^{(2)}$. Этим фактом будет завершено доказательство того, что $E'f: A \rightarrow \text{Mor}(B, C)$ является морфизмом относительных действий. Заметим, прежде всего, что $\text{Mor}(B, C)^{(2)} = \text{Mor}(B^{(1)}, C^{(2)})$. Прямая проверка показывает, что функцию $(E'f)|_{|A^{(2)}|}$ можно отождествить с функцией $E'(f|_{A^{(2)} \times B^{(1)}})$, где

$$E': \text{Mor}(A^{(2)} \times B^{(2)}, C^{(2)}) \rightarrow \text{Mor}(A^{(2)}, \text{Mor}(B^{(1)} \times C^{(2)}))$$

– морфизм, построенный при доказательстве теоремы 3.23. Но в силу этой теоремы $E'(f|_{A^{(2)} \times B^{(2)}})$ – морфизм глобальных действий.

Докажем теперь, что функция

$$E': |\text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}| \rightarrow |\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))^{(1)}|$$

определяет морфизм относительных действий

$$\text{Mor}(A \bowtie B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)).$$

Установим вначале, что E' задает морфизм глобальных действий

$$\text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)} \rightarrow \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))^{(1)}.$$

Пусть $f = f_0, f_1, \dots, f_p$ – локальный репер в $\text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}$. Мы должны показать, что множество $E'f_0, \dots, E'f_p$ является локальным репером в $\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))^{(1)}$. Согласно локально-глобальной лемме 4.11 для каждого элемента (x, y) из $A \times B$ множество $f_0(x, y), \dots, f_p(x, y)$ являются локальным репером в $C^{(1)}$. Кроме того, если $(x, y) \in X_{(A \bowtie B)^{(2)}}$, то $f_0(x, y), \dots, f_p(x, y)$ – локальный репер и в $C^{(2)}$. Из существования у действия $C^{(1)}$ нижней грани следует, что для $(x, y) \in (A \bowtie B)^{(1) \setminus (2)}$, множество $\{c \in \Phi_{C^{(1)}} \mid f_0(x, y), \dots, f_p(x, y) \text{ есть } c\text{-репер}\}$ имеет инициальный элемент $c_{(x, y)}$. Аналогично, если $(x, y) \in X_{(A \bowtie B)^{(2)}}$, то множество $\{c \in \Phi_{C^{(2)}} \mid f_0(x, y), \dots, f_p(x, y) \text{ есть } c\text{-репер}\}$ обладает инициальным элементом, который мы также обозначим через $c_{(x, y)}$. Определим отображение $\gamma: |A| \rightarrow (|B|, \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}})$ правилом $x \mapsto c_{(x, -)}$. Мы утверждаем, что пара $(E'f_0, \gamma)$ является A -картой в $\text{Mor}(B, C)$. Тогда из определения γ и леммы 4.11 будет следовать, что множество $E'f_0, \dots, E'f_p$ является A -репером на $(E'f, \gamma)$. Но это означает, что $E'f_0, \dots, E'f_p$ – локальный репер в $\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))^{(1)}$, что и требуется.

Пусть $(U^{(1)}, U^{(2)})$ – полная пара локальных реперов в A . Мы должны показать, что $((E'f)U^{(1)}, (E'f)U^{(2)})$ – относительный локальный репер в некоторой точке

$(\delta^{(1)} \times \delta^{(2)}) \in \Phi_{(B,C)^{(1)}} \times \Phi_{(B,C)^{(2)}}$, такой, что $\gamma(x) \leq \delta^{(1)}$ для всех $x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}$ и $\gamma(x) \leq \delta^{(2)}$ для всех $x \in U^{(2)}$. Пусть $F = \{f = f_0, \dots, f_p\}$. Так как F – локальный репер в $\text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)}$, то найдется такая $A \bowtie B$ -карта (f_0, ε) в C , что F есть $A \bowtie B$ -репер на (f_0, ε) . Для любого фиксированного $y \in |B^{(1)} \setminus B^{(2)}|$ пара $(f_0(\cdot, y), \varepsilon(\cdot, y))$ является A -картой в C , а множество $F(\cdot, y) = \{f_0(\cdot, y), \dots, f_p(\cdot, y)\}$ есть A -репер на этой карте. Если же $y \in |B^{(2)}|$, то $(f_0(\cdot, y), \varepsilon(\cdot, y))$ является $A^{(1)}$ -картой в $C^{(2)}$ и множество $f_0(\cdot, y), \dots, f_p(\cdot, y)$ есть $A^{(1)}$ -репер на ней. Поскольку $(U^{(1)}, U^{(2)})$ – пара локальных реперов в A , из леммы 3.24 вытекает, что $(F(U^{(1)}, y), F(U^{(2)}, y))$ – пара локальных реперов в C . А так как действие C обладает нижней гранью, то пара $(F(U^{(1)}, y), F(U^{(2)}, y))$ представляет собой относительный локальный репер в некоторой точке $(d_y^{(1)}, d_y^{(2)}) \in (\Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}}) \times \Phi_{C^{(2)}}$, такой что $d_y^{(1)} \in \Phi_{C^{(1)}}$, если $y \in |B^{(1)} \setminus B^{(2)}|$ и $d_y^{(1)} \in \Phi_{C^{(2)}}$, если $y \in |B^{(2)}|$. Таким образом, в силу леммы (4.29.4) пара $(f(U^{(1)}, y), f(U^{(2)}, y))$ является относительным локальным репером в точке $(d_y^{(1)}, d_y^{(2)})$. Положим

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}: B^{(1)} &\rightarrow \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}}, & y &\mapsto d_y^{(1)}, \\ \delta^{(2)}: B^{(2)} &\rightarrow \Phi_{C^{(2)}}, & y &\mapsto d_y^{(2)}. \end{aligned}$$

Согласно локально-глобальным леммам 3.7 и 4.11 пара $((E'f)U^{(1)}, (E'f)U^{(2)})$ будет относительным локальным репером в точке $(\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$ тогда и только тогда, когда $((E'f)(u), \delta^{(1)})$ будет B -картой в C для любого $u \in U^{(1)}$, а $((E'f)(u), \delta^{(2)})$ будет $B^{(1)}$ -картой в $C^{(2)}$ для любого $u \in U^{(2)}$. Поэтому все, что нам осталось, это доказать, что $((E'f)(u), \delta^{(1)})$ и $((E'f)(u), \delta^{(2)})$ – соответствующие карты. В самом деле, коль скоро это доказано, то из определения отображения γ следует, что $\gamma(x) \leq \delta^{(1)}$ для всех $x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}$ и $\gamma(x) \leq \delta^{(2)}$ для всех $x \in U^{(2)}$.

Итак, покажем, что пара $((E'f)(u), \delta^{(1)})$ является B -картой в C для любого $u \in U^{(1)}$. Пусть $(V^{(1)}, V^{(2)})$ – полная пара локальных реперов в B . Мы должны доказать, что $((E'f)(u)V^{(1)}, (E'f)(u)V^{(2)})$ является относительным локальным репером в некоторой точке $(c^{(1)}, c^{(2)}) \in \Phi_{C^{(1)}} \times \Phi_{C^{(2)}}$, такой что $\delta^{(1)}(y) \leq c^{(1)}$ для всех $y \in V^{(1)} \setminus V^{(2)}$ и $\delta^{(1)}(y) \leq c^{(2)}$ для всех $y \in V^{(2)}$. Из леммы 3.24 следует, что $(F(U, V^{(1)}), F(U, V^{(2)}))$ является парой локальных реперов в C . Значит, и $((E'F)UV^{(1)}, (E'F)UV^{(2)})$ – пара локальных реперов в C . Так как действие C обладает нижней гранью, то $((E'F)UV^{(1)}, (E'F)UV^{(2)})$ – относительный локальный репер в некоторой точке $(c^{(1)}, c^{(2)}) \in \Phi_{C^{(1)}} \times \Phi_{C^{(2)}}$. А поскольку выполнено условие (4.26.1), то $\delta^{(1)}(y) \leq c^{(1)}$ для всех $y \in V^{(1)} \setminus V^{(2)}$ и $\delta^{(2)}(y) \leq c^{(2)}$ для всех $y \in V^{(2)}$. Но по лемме (4.29.4) пара $((E'f)(u)V^{(1)}, (E'f)(u)V^{(2)})$ является относительным локальным репером в точке $(c^{(1)}, c^{(2)})$. Следовательно, $((E'f)(u), \delta^{(1)})$ является B -картой в C для любого $u \in U^{(1)}$.

Тот факт, что $((E'f)(u), \delta^{(2)})$ является $B^{(1)}$ -картой в $C^{(2)}$ для любого $u \in U^{(2)}$ доказывается так же, как в теореме 3.23. Этим завершается доказательство того, что $E': \text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(1)} \rightarrow \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))^{(1)}$ есть морфизм глобальных действий.

Легко видеть, что этот морфизм переводит $|\text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(2)}|$ в $(A^{(2)}, (B^{(1)}, C^{(2)}))$. В самом деле,

$$\text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(2)} = \text{Mor}(A^{(1)} \times B^{(1)}, C^{(2)}),$$

а отображение $E'|_{|\text{Mor}(A^{(1)} \times B^{(1)}, C^{(1)})|}$ совпадает с отображением $|\text{Mor}(A^{(1)} \times B^{(1)}, C^{(2)})| \rightarrow |\text{Mor}(A^{(2)}, \text{Mor}(B^{(1)}, C^{(2)}))|$, индуцированным морфизмом глобаль-

ных действий $E': \text{Mor}(A^{(1)} \times B^{(1)}, C^{(2)}) \rightarrow \text{Mor}(A^{(2)}, \text{Mor}(B^{(1)}, C^{(2)}))$ из теоремы 3.23. Следовательно, $E': \text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(2)} \rightarrow \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))^{(2)}$ является морфизмом глобальных действий, а это, в свою очередь, означает, что $E': \text{Mor}(A \bowtie B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))$ – морфизм относительных действий. Тем самым, мы доказали, что действие C обладает свойством ∞ -экспоненциальности.

Предположим, наконец, что C – действие с сильной нижней гранью. Мы должны показать, что C регулярно ∞ -экспоненциально. Для этого нужно убедиться, что морфизм

$$E: \text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C)) \rightarrow \text{Mor}(A \bowtie B, C)$$

имеет регулярный обратный E' . Существуют очевидные кандидаты для структурных компонент (E'_Φ, E'_G, E'_X) морфизма E' . Прежде всего положим,

$$(4.32) \quad E'_X: \text{Mor}(A \bowtie B, C) \longrightarrow |\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))|, \quad f \longmapsto E'f,$$

где $f \mapsto E'f$ – построенное выше отображение. Определим отображение

$$E'_{\Phi^{(i)}}: \Phi_{(A \bowtie B, C)^{(i)}} \longrightarrow \Phi_{(A, (B, C))^{(i)}} \quad (i = 1, 2)$$

как обратное для отображения множеств $E_{\Phi^{(i)}}$ (см. (3.16)). И, наконец, зададим естественные преобразования

$$E'_{G^{(i)}}: G_{(A \bowtie B, C)^{(i)}} \longrightarrow (G_{(A, (B, C))^{(i)}})_{E'_{\Phi^{(i)}}} \quad (i = 1, 2)$$

следующим образом. Для $\alpha \in \Phi_{(A \bowtie B, C)^{(1)}}$ определим групповой гомоморфизм

$$E'_{G^{(1)}}(\alpha): (G_{(A \bowtie B, C)^{(1)}})_\alpha \longrightarrow (G_{(A, (B, C))^{(1)}})_{E'_{\Phi^{(1)}}}(\alpha)$$

так, чтобы он тождественно отображал сомножитель из

$$(G_{(A \bowtie B, C)^{(1)}})_\alpha = \prod_{(x, y) \in |A^{(1)} \setminus (2)| \times |B^{(1)} \setminus (2)|} (G_{C^{(1)}})_{\alpha(x, y)} \times \prod_{(x, y) \in |(A \bowtie B)^{(2)}|} (G_{C^{(2)}})_{\alpha(x, y)}$$

с индексом $\alpha(x, y)$ на сомножитель из

$$\begin{aligned} (G_{(A, (B, C))^{(1)}})_{E'_{\Phi^{(1)}}}(\alpha) &= \prod_{x \in |A^{(1)} \setminus (2)|} \left[\prod_{y \in |B^{(1)} \setminus (2)|} (G_{C^{(1)}})_{(E'_{\Phi^{(1)}} \alpha)(x)(y)} \right. \\ &\quad \times \left. \prod_{y \in |B^{(2)}|} (G_{C^{(2)}})_{(E'_{\Phi^{(1)}} \alpha)(x)(y)} \right] \\ &\quad \times \prod_{x \in |A^{(2)}|} \prod_{y \in |B^{(1)}|} (G_{C^{(2)}})_{(E'_{\Phi^{(1)}} \alpha)(x)(y)} \end{aligned}$$

с индексом $(E'_{\Phi^{(1)}} \alpha)(x)(y)$. Для $\alpha \in \Phi_{(A \bowtie B, C)^{(2)}}$, определим гомоморфизм групп

$$E'_{G^{(2)}}(\alpha): (G_{(A \bowtie B, C)^{(2)}})_\alpha \rightarrow (G_{(A, (B, C))^{(2)}})_{E'_{\Phi^{(2)}}}(\alpha)$$

так, чтобы он тождественно отображал сомножитель из

$$(G_{(A \bowtie B, C)^{(2)}})_\alpha = \prod_{(x, y) \in |A^{(1)}| \times |B^{(1)}|} (G_{C^{(2)}})_{\alpha(x, y)}$$

с индексом $\alpha(x, y)$ на сомножитель из

$$(G_{(A, (B, C))^{(2)}})_{E'_{\Phi^{(2)}}(\alpha)} = \prod_{x \in |A^{(1)}|} \left(\prod_{y \in |B^{(1)}|} (G_{C^{(2)}})_{(E'_{\Phi^{(2)}}\alpha)(x)(y)} \right)$$

с индексом $(E'_{\Phi^{(2)}}\alpha)(x)(y)$.

Из всех этих свойств регулярного морфизма для E' не очевидно лишь включение $E'_X(X_{(A \bowtie B, C)}^{(i)})\alpha \subseteq (X_{(A, (B, C))^{(i)}})_{E'_{\Phi^{(i)}}(\alpha)}$, где $\alpha \in \Phi_{(A \bowtie B, C)}^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Мы докажем это включение для $i = 1$. Нам нужно показать, что если (f, α) – некоторая $(A \bowtie B)$ -карта в C , то $(E'_X(f), E'_{\Phi^{(1)}}(\alpha))$ является A -картой в $\text{Mor}(B, C)$.

Пусть $(U^{(1)}, U^{(2)})$ – полная пара локальных реперов. Мы должны убедиться, что $((E'f)U^{(1)}, (E'f)U^{(2)})$ является относительным локальным репером в некоторой точке $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) \in \Phi_{(B, C)}^{(1)} \times \Phi_{(B, C)}^{(2)}$ такой, что $\gamma^{(1)} \geq (E'_{\Phi^{(1)}}\alpha)(x)$ для всех $x \in U^{(2)}$. С этой целью построим отображения $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$. Положим, прежде всего,

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(y) = \{c \in \Phi_{C^{(1)}} \mid f(U^{(1)} \times \{y\}) \text{ есть } c\text{-репер}, c \geq \alpha(x, y) \\ \forall x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}\}, \quad y \in B^{(1)} \setminus U^{(2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(y) = \{c \in \Phi_{C^{(2)}} \mid f(U^{(1)} \times \{y\}) \text{ есть } c\text{-репер}, c \geq \alpha(x, y) \\ \forall x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}\}, \quad y \in B^{(2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)}(y) = \{c \in \Phi_{C^{(2)}} \mid f(U^{(2)} \times \{y\}) \text{ есть } c\text{-репер}, c \geq \alpha(x, y) \\ \forall x \in U^{(2)}\}, \quad y \in B^{(1)}. \end{aligned}$$

Из существования у действий $C^{(i)}$ ($i = 1, 2$) сильной нижней грани следует, что множества $\Psi^{(1)}(y)$ и $\Psi^{(2)}(y)$ имеют инициальные элементы $c_y^{(1)}$ и $c_y^{(2)}$, соответственно. Определим отображения $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$, полагая

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}: |B^{(1)}| \rightarrow \Phi_{C^{(1)}} \cup \Phi_{C^{(2)}}, \quad y \mapsto c_y^{(1)}; \\ \gamma^{(2)}: |B^{(1)}| \rightarrow \Phi_{C^{(2)}}, \quad y \mapsto c_y^{(2)}. \end{aligned}$$

По построению, $\gamma^{(1)} \geq (E'_{\Phi^{(1)}}\alpha)(x)$ для всех $x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}$ и $\gamma^{(2)} \geq (E'_{\Phi^{(1)}}\alpha)(x)$ для всех $x \in U^{(2)}$. Предположим на мгновение, что мы доказали следующий факт: для любого $x \in U^{(2)}$ пара $((E'f)(x), \gamma^{(1)})$ является B -картой в C и пара $((E'f)(x), \gamma^{(2)})$ является $B^{(1)}$ -картой в $C^{(2)}$. Тогда из определения $\gamma^{(1)}$, следует, что $(E'f)U^{(1)} \subseteq (G_{(B, C)}^{(1)})_{\gamma^{(1)}}(E'f)(x)$ и $(E'f)U^{(2)} \subseteq (G_{(B, C)}^{(2)})_{\gamma^{(2)}}(E'f)(x)$, т.е. что $(E'f)U^{(1)}$ – локальный репер в $\gamma^{(1)}$, а $(E'f)U^{(2)}$ – локальный репер в $\gamma^{(2)}$. Кроме того, из существования у действия C сильной нижней грани вытекает, что $(G_{C^{(2)}})_{\gamma^{(2)}(y)}(E'f)(x, y) \subseteq (G_{C^{(1)}})_{\gamma^{(1)}(y)}(E'f)(x, y)$ для любых $x \in U^{(2)}$ и $y \in |B^{(1)}|$. Стало быть, $(G_{(B, C)}^{(2)})_{\gamma^{(2)}}(E'f)(x) \subseteq (G_{(B, C)}^{(1)})_{\gamma^{(1)}}(E'f)(x)$. Это означает, что пара $((E'f)U^{(1)}, (E'f)U^{(2)})$ – относительный локальный репер в точке $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$, причем $\gamma^{(1)} \geq (E'_{\Phi^{(1)}}\alpha)(x)$ для всех $x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}$ и $\gamma^{(2)} \geq (E'_{\Phi^{(1)}}\alpha)(x)$ для всех $x \in U^{(2)}$.

Покажем теперь, что для любого $x \in U^{(1)}$ пара $((E'f)(x), \gamma^{(1)})$ является B -картой в C . Пусть $(V^{(1)}, V^{(2)})$ – полная пара локальных реперов в B . Мы должны доказать, что $((E'f)(x)V^{(1)}, (E'f)(x)V^{(2)})$ – относительный локальный репер в некоторой точке $(c^{(1)}, c^{(2)}) \in \Phi_{C^{(1)}} \times \Phi_{C^{(2)}}$ такой, что $c^{(1)} \geq \gamma^{(1)}(y)$ для всех $y \in V^{(1)} \setminus V^{(2)}$ и $c^{(2)} \geq \gamma^{(2)}(y)$ для всех $y \in V^{(2)}$. Так как $(U^{(1)} \times V^{(1)}, U^{(1)} \times V^{(2)})$ является парой локальных реперов в $A \bowtie B$, то $((E'f)U^{(1)}V^{(1)}, (E'f)U^{(1)}V^{(2)}) = (f(U^{(1)} \times V^{(1)}), f(U^{(1)} \times V^{(2)}))$ – пара локальных реперов в C . Положим $\Delta^{(1)} = \{\alpha(x, y) \mid x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}, y \in B^{(1)} \setminus B^{(2)}\}$ и $\Delta^{(2)} = \{\alpha(x, y) \mid x \in U^{(1)} \setminus U^{(2)}, y \in B^{(2)}\}$. (Если $U^{(1)} \setminus U^{(2)} = \emptyset$, то разумеется $\Delta^{(1)} = \emptyset = \Delta^{(2)}$.) Из существования у действия C сильной нижней грани следует, что $((E'f)U^{(1)}V^{(1)}, (E'f)U^{(1)}V^{(2)})$ – относительный локальный репер в некоторой точке $(c^{(1)}, c^{(2)}) \in \Phi_{C^{(1)}} \times \Phi_{C^{(2)}}$ такой, что $c^{(1)} \geq \alpha(x, y)$ для всех $\alpha(x, y) \in \Delta^{(1)}$ и $c^{(2)} \geq \alpha(x, y)$ для всех $\alpha(x, y) \in \Delta^{(2)}$. По построению $\gamma^{(1)}$, мы имеем $c^{(1)} \geq \gamma^{(1)}(y)$ для всех $y \in V^{(1)} \setminus V^{(2)}$ и $c^{(2)} \geq \gamma^{(1)}(y)$ для всех $y \in V^{(2)}$.

Покажем, что для $x \in U^{(2)}$ пара $((E'f)(x), \gamma^{(2)})$ является $B^{(1)}$ -картой в $C^{(2)}$. Пусть V – локальный репер в $B^{(1)}$. Мы должны доказать, что множество $(E'f)(x)V$ является локальным репером в некоторой точке $c \in \Phi_{C^{(2)}}$ такой, что $c \geq \gamma^{(2)}(y)$ для всех $y \in V$. Так как $U^{(2)} \times V$ – локальный репер в $(A \bowtie B)^{(2)}$, то $(E'f)U^{(2)}V = f(U^{(2)} \times V)$ – локальный репер в некоторой точке $c \in \Phi_{C^{(2)}}$. Из конструкции отображения $\gamma^{(2)}$ следует, что $c \geq \gamma^{(2)}(y)$ для всех $y \in V$. Таким образом, в силу (4.29.1) множество $(E'f)(x)V$ является локальным репером в точке c и $c \geq \gamma^{(2)}(y)$ для всех $y \in V$.

Тем самым, мы доказали, что для любого $\alpha \in \Phi_{(A \bowtie B, C)^{(1)}}$ имеет место включение

$$E'_X(X_{(A \bowtie B, C)^{(1)}})\alpha \subseteq (X_{(A, (B, C))^{(1)}})E'_{\Phi^{(1)}}(\alpha).$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается показать, что

$$E'_X(X_{(A \bowtie B, C)^{(2)}})\alpha \subseteq (X_{(A, (B, C))^{(2)}})E'_{\Phi^{(2)}}(\alpha)$$

для любого $\alpha \in \Phi_{(A \bowtie B, C)^{(2)}}$. Заметим, что $\text{Mor}(A \bowtie B, C)^{(2)} = \text{Mor}(A^{(1)} \times B^{(1)}, C^{(2)})$ и $\text{Mor}(A, \text{Mor}(B, C))^{(2)} = \text{Mor}(A^{(1)}, \text{Mor}(B^{(1)}, C^{(2)}))$. В силу теоремы 3.23 морфизм глобальных действий $E'_X: \text{Mor}(A^{(1)} \times B^{(1)}, C^{(2)}) \rightarrow \text{Mor}(A^{(1)}, \text{Mor}(B^{(1)}, C^{(2)}))$ является регулярным и, следовательно, обладает требуемым свойством.