Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Дранишников, С. Ферри, О короне Хигсона–Рое, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 5, 133–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:00:28

УДК 515.1

О КОРОНЕ ХИГСОНА–РОЕ

А. Н. ДРАНИШНИКОВ, С. ФЕРРИ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Компактификация Хигсона–Рое	133
§ 2. Принцип спуска	135
§ 3. Большие римановы многообразия	138
§ 4. Когомологии компактификации Хигсона–Рое евклидова простран- ства	141
§ 5. Когомологии компактификации Хигсона–Рое гиперболического пространства	144
Список литературы	145

§ 1. Компактификация Хигсона–Рое

Компактификация Хигсона $\overline{X}$ впервые появилась в [Н] в связи с K -теоретическим анализом теоремы Рое об индексе для некомпактных римановых многообразий. Хигсон определял $\overline{X}$ как пространство максимальных идеалов коммутативной C^* -алгебры гладких функций с исчезающим на бесконечности градиентом. В [R1] Рое модифицировал определение Хигсона так, чтобы оно имело смысл для более общих пространств. Вот это определение Рое:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если M – метрическое пространство и $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывное отображение, определяем $V_r(\varphi): M \rightarrow \mathbb{R}^+$ как

$$V_r(\varphi) = \sup\{|\varphi(y) - \varphi(x)| : y \in B_r(x)\},$$

а $C_h(M)$ как пространство всех ограниченных непрерывных функций $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $V_r(\varphi) \rightarrow 0$ на бесконечности при любом $r > 0$. Лемма 5.3 из [R1] доказывает что $C_h(M)$ является C^* -алгеброй, поэтому можно определить *компактификацию Хигсона–Рое* $\overline{M}$ для M как пространство максимальных идеалов алгебры $C_h(M)$.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (гранты DMS-9500875 и DMS-9626101).

Другое эквивалентное определение получится, если определить отображение

$$\iota: M \rightarrow \prod_{\varphi \in C_h(M)} \mathbb{C}$$

как $\iota(m)_\varphi = \varphi(m)$ и ввести $\overline{M}$ как замыкание образа $\iota(M)$ в бесконечном произведении. Ясно, что $\overline{M}$ в общем случае неметризуемо и что $\overline{M}$ характеризуется возможностью продолжения ограниченной непрерывной функции $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}$ до непрерывной функции $\overline{\varphi}: \overline{M} \rightarrow \mathbb{C}$ в том и только том случае, когда $V_r(\varphi) \rightarrow 0$ на бесконечности. Такие функции будут называться *слабо осциллирующими*.

Компактификация Хигсона метрического пространства родственна компактификации Стоуна–Чеха. Ее важным отличием от последней является отсутствие топологической инвариантности $\overline{X}$ относительно компактифицируемого пространства X . Она, однако, функториальна для равномерно непрерывных отображений. *Корона Хигсона* – это пространство $\nu X = \overline{X} - X$. Корона функториальна для собственных равномерно непрерывных отображений собственных метрических пространств. (Напомним, что метрическое пространство X называется *собственным*, если всякий шар конечного радиуса в X имеет компактное замыкание, и что отображение метрических пространств называется *собственным*, если полный прообраз любого компактного множества компактен.) Пространство νX является грубым инвариантом X в смысле Громова. За подробностями отсылаем читателя к гл. 2 и 5 в [R1].

Хотя компактификация Хигсона некомпактного метрического пространства X и является объектом, представляющим самостоятельный интерес, она приобретает дополнительный интерес благодаря связям с гипотезами Новикова и Громова–Лоусона. В частности, *Принцип спуска* утверждает, что гипотеза Новикова для фундаментальной группы конечного асферического комплекса K вытекает из соответствующей “грубой” гипотезы Новикова для универсального накрытия $\tilde{K}$. Более того, известно, что эта грубая гипотеза Новикова верна для $\tilde{K}$, когда $\tilde{K}$ имеет компактификацию с хорошими свойствами.

Гипотеза Новикова. Для топологического многообразия M размерности $n \geq 5$ точная последовательность хирургии Сулливана–Уолла определяется как

$$\cdots \longrightarrow L_{n+1}(\pi_1 M) \longrightarrow \mathcal{S}(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M; \mathbb{G}/\text{TOP}) \xrightarrow{A} L_n(Z\pi_1 M).$$

Отображение A в этой последовательности факторизуется как

$$H_n(M; \mathbb{G}/\text{TOP}) \longrightarrow H_n(B\pi_1 M; \mathbb{G}/\text{TOP}) \longrightarrow H_n(B\pi_1 M; \mathbb{L}(e)) \xrightarrow{\mathcal{A}} L_n(Z\pi_1 M),$$

где $H_n(\cdot; \mathbb{G}/\text{TOP})$ и $H_n(\cdot; \mathbb{L}(e))$ обозначают соответственно гомологии с коэффициентами в связном и периодическом L -спектрах, $M \rightarrow B\pi_1 M$ классифицирующее отображение, и $\mathcal{A}$ – это *универсальное ассемблирующее отображение*. Отображение $\mathcal{A}$ зависит только от $\pi = \pi_1 M$ и в остальном не зависит от M . Классическая *гипотеза Новикова* утверждает, что отображение $\mathcal{A}$ является рациональным мономорфизмом для любых групп π .

Грубые гипотезы Новикова и Бореля. Если универсальное накрытие для M стягиваемо, то $H_n(M; \mathbb{L}(e)) \xrightarrow{\cong} H_n(B\pi_1 M; \mathbb{L}(e))$ и мы пишем ассемблирующее отображение как $\mathcal{A}: H_n(M; \mathbb{L}(e)) \rightarrow L_n(Z\pi_1 M)$. В этом случае, (рациональная) *грубая гипотеза Новикова* утверждает, что ограниченное ассемблирующее отображение, см. [F-P],

$$H_n^{\ell f}(\widetilde{M}; \mathbb{L}(e)) \rightarrow L_{n,M}^{bdd}(e)$$

является (рациональным) мономорфизмом. (Рациональная) *грубая гипотеза Бореля* утверждает, что это отображение есть (рациональный) изоморфизм. *Грубая гипотеза Баума–Конна*, см. (6.28) в [R1], является аналогичным утверждением об изоморфизме на языке C^* -алгебр. Взаимоотношение между топологической и C^* -алгебраической версиями гипотезы Новикова подробно обсуждено в [Ros2]. Эти грубые гипотезы дают возможность для обобщений на более широкие категории пространств. Такие обобщения будут обсуждаться далее в этой статье, но пока мы ограничимся универсальными накрытиями конечных асферических полиэдров.

§ 2. Принцип спуска

Пусть M^n и N^n – замкнутые¹ асферические многообразия, и пусть $f: M \rightarrow N$ – гомотопическая эквивалентность. Так как умножение на S^1 не влияет на касательность, домножив оба многообразия на S^1 , мы можем считать, что имеем размерности ≥ 5 и что оба многообразия накрыты евклидовым пространством. Мы хотим показать, что f является топологически касательным. Мы переходим к универсальным накрытиям и образуем диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} \times_{\Gamma} \widetilde{N} & \xrightarrow{\widetilde{f} \times_{\Gamma} \widetilde{f}} & \widetilde{M} \times_{\Gamma} \widetilde{M} \\ \text{proj}_1 \downarrow & & \text{proj}_1 \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Здесь $\Gamma = \pi_1 M = \pi_1 N$ диагонально действует на $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ и $\widetilde{N} \times \widetilde{N}$ и отображения proj_1 индуцированы проекцией на первый сомножитель. Можно показать, что $\widetilde{N} \times_{\Gamma} \widetilde{N}$ и $\widetilde{M} \times_{\Gamma} \widetilde{M}$ являются расслоениями со слоем $\widetilde{N}$ и $\widetilde{M}$ над N и M , которые эквивалентны топологическим касательным расслоениям многообразий N и M соответственно. Чтобы показать, что f – касательное, достаточно показать, что $\widetilde{f} \times_{\Gamma} \widetilde{f}$ собственно гомотопно сохраняющему слои отображению, ограничение которого на любой слой является гомеоморфизмом. Этот подход восходит к Фаррелу–Сянгу [F-H].

Один подход к этой проблеме связан с ограниченной теорией перестроек [F-P]. Ограничение отображения $\widetilde{f} \times_{\Gamma} \widetilde{f}$ на любой слой является копией $\widetilde{f}$. Таким образом, проблема гомотопирования этих отображений к гомеоморфизмам может быть рассмотрена как параметрическая проблема ограниченной хирургии. Мы можем индукцией по остовам N ограниченно гомотопировать отображения к гомеоморфизмам над

¹Согласно результату М. Дэвиса [D, с. 215], случай замкнутого многообразия влечет выглядящий более общим случай группы Γ с конечным комплексом $B\Gamma$.

каждым остовом. Предполагая, что мы преуспели над $\partial\Delta^k$, получаем, что препятствие к успеху над внутренностью лежит в $\mathcal{S}^{bdd} \left(\begin{array}{c} \widetilde{M} \times \Delta^k \\ \downarrow \\ \widetilde{M} \end{array} \text{ rel } \partial(\widetilde{M} \times \Delta^k) \right)$. Последовательность ограниченной хирургии, которая вычисляет это, такова:

$$\dots \rightarrow \mathcal{S}^{bdd} \left(\begin{array}{c} \widetilde{M} \times \Delta^k \\ \downarrow \\ \widetilde{M} \end{array} \text{ rel } \partial(\widetilde{M} \times \Delta^k) \right) \rightarrow H_{n+k}^{\ell f}(\widetilde{M}; \text{G/TOP}) \rightarrow L_{n+k, \widetilde{M}}^{bdd}(e) \rightarrow \dots$$

Эти структурные множества исчезают в том и только том случае, когда грубые ассемблирующие отображения

$$H_{n+k}^{\ell f}(\widetilde{M}; \text{G/TOP}) \rightarrow L_{n+k, \widetilde{M}}^{bdd}(e)$$

являются изоморфизмами. Так как $\widetilde{M}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, это равносильно тому, чтобы показать, что ассемблирующие отображения индуцируют изоморфизмы

$$\pi_k(\text{G/TOP}) \rightarrow L_{n+k, \widetilde{M}}^{bdd}(e)$$

для всех k . Определения понятий “ограниченный” и “ L^{bdd} ” зависят от метрики на $\widetilde{M}$, поэтому мы не можем просто заменить в правой части $\widetilde{M}$ на $\mathbb{R}^n$.

Если $\widetilde{M}$ допускает эквивариантную компактификацию, мы можем следовать [С-Р] и использовать непрерывно контролируруемую хирургию [AnCFK], [С-Р], [F-Р] вместо ограниченной хирургии в этой конструкции. Предположим, например, что $M \cup X = \overline{M}$ является такой L -ациклической метризуемой компактификацией для $\widetilde{M}$, что компактные множества в $\widetilde{M}$ становятся малыми около X – см. в [С-Р] точные версии этих условий. Только по этой причине мы будем применять $\overline{M}$ для обозначения чего-то иного, нежели компактификация Хигсона–Рое для M .

Мы можем образовать $\widetilde{M} \times_{\Gamma} \overline{M}$ и $\widetilde{N} \times_{\Gamma} \overline{N}$ с проекциями на M и N (здесь $\overline{N}$ – индуцированная компактификация N с наростом X). Это – аналоги замкнутых дисковых касательных расслоений для M и N . Чтобы показать касательность, мы делаем похожую индукцию, используя непрерывно контролируруемую хирургию над X . В этом случае критическим ассемблирующим отображением оказывается

$$H_{n+k}^{\ell f}(\widetilde{M}; \text{G/TOP}) \rightarrow L_{X, n+k}^{cc}(e).$$

Преимущество здесь в том, что непрерывно контролируемые L -группы можно вычислить. Оказывается, что $L_{X, n+k}^{cc}(e) \cong \overline{H}_{n+k-1}^{st}(X; \mathbb{L}(e))$, где через $\overline{H}^{st}$ обозначаются редуцированные гомологии Стинрода, и что грубое ассемблирующее отображение представляется композицией

$$H_{n+k}^{\ell f}(\widetilde{M}; \text{G/TOP}) \cong \overline{H}_{n+k}^{st}(\overline{M}, X; \text{G/TOP}) \xrightarrow{\partial} \overline{H}_{n+k-1}^{st}(X; \mathbb{L}(e)).$$

Тот факт, что ∂ является изоморфизмом немедленно вытекает из стягиваемости $\overline{M}$ и длинной точной последовательности для $(\overline{M}, X)$ в гомологиях Стинрода. Итак, если $\widetilde{M}$ имеет хорошую компактификацию, то целочисленная гипотеза Новикова верна для $Z\pi_1 M$.

Предположим, что $\widetilde{M} \cup N$ является такой метризуемой компактификацией для $\widetilde{M}$, что “тождественное” отображение $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M} \cup N$ слабо осциллирует. Тогда существует отображение $\overline{M} \rightarrow \widetilde{M} \cup N$, переводящее $\nu\widetilde{M}$ в N . Если $\widetilde{M} \cup N$ является L -ациклическим, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n^{\ell f}(\widetilde{M}; \mathbb{L}(e)) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}^{st}(\nu(\widetilde{M}); \mathbb{L}(e)) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ H_n^{\ell f}(\widetilde{M}; \mathbb{L}(e)) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_{n-1}^{st}(N; \mathbb{L}(e)). \end{array}$$

Мы называем эти условия – обеспечивающие метризуемость эквивариантной компактификации $\widetilde{M} \cup N$, что “тождественное” отображение $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M} \cup N$ слабо осциллирует и что $\widetilde{M} \cup N$ является L -ациклическим – *условиями Карлсона–Педерсена*. Если эти условия выполнены, то вышеприведенная диаграмма показывает, что граничное отображение

$$(*) \quad H_n^{\ell f}(\widetilde{M}; \mathbb{L}(e)) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}^{st}(\nu(\widetilde{M})); \mathbb{L}(e))$$

должно эквивариантно расщепляться. Это мотивирует изучение этого граничного отображения в связи с гипотезой Новикова, причем особенный интерес вызывает определение условий, при которых $\overline{M}$ является L -ациклическим или при которых граничное отображение $(*)$ эквивариантно расщепляется.

К несчастью, компактификация Хигсона–Рое $\widetilde{M}$ никогда не ациклическа для замкнутого асферического M^n с $\pi_1(M) \neq 1$. Один аргумент Кислинга [К] показывает, что 1-мерные коомологии Чеха для $\overline{M}$ должны иметь бесконечный ранг. Так как его аргумент нетривиальности прост, мы приведем его здесь: выберем точку $m_0 \in \widetilde{M}$ и пусть $f: \widetilde{M} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ – функция, задаваемая формулой

$$f(m) = \exp \left\{ i \sqrt{d_{\widetilde{M}}(m, m_0)} \right\}.$$

Функция f слабо осциллирует, поэтому f непрерывно продолжается на $\overline{f}: \overline{M} \rightarrow S^1$. Если бы $\overline{f}$ было гомотопно нулю, то $\overline{f}$ можно было бы поднять через стандартное накрытие до функции $f^*: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Так как никакое поднятие для f в $\mathbb{R}$ не имеет компактного образа, это невозможно и $\overline{f}$ должно быть существенно.

Это оставляет место для надежды, так как аргумент Кислинга также показывает, что первые коомологии компактификации Стоуна–Чеха для $\widetilde{M}$ должны быть нетривиальны. В случае компактификации Стоуна–Чеха, однако, теорема Калдера и Зигеля гласит, что высшие коомологии $\beta\widetilde{M}$ всегда исчезают для асферического M . Также, одно расширение вышеприведенного аргумента спуска (см. [F-W]) показывает,

что для доказательства целочисленной гипотезы Новикова достаточно найти метризуемую эквивариантную компактификацию $\widetilde{M} \cup N$ для $\widetilde{M}$, компактные множества которой малы на бесконечности и граничное отображение

$$(**) \quad \overline{H}_{n+k}^{st}(M \cup N, N; G/\text{TOP}) \xrightarrow{\partial} \overline{H}_{n+k-1}^{st}(N; \mathbb{L}(e))$$

имеет эквивариантное расщепление. Это слабое, но потенциально полезное, расширение цитированного выше результата Карлсона–Педерсена. Более того, для того чтобы доказать рациональную гипотезу Новикова для $\pi_1 M$ с замкнутым асферическим многообразием M , достаточно доказать то же самое утверждение рационально.

Резюмируем, для того чтобы доказать гипотезу Новикова, достаточно найти *метризуемую* эквивариантную компактификацию $\widetilde{M} \cup N$ такую, что фундаментальные области уменьшаются около бесконечности, и $(**)$ эквивариантно расщепляется. Существование такого расщепления для любой компактификации $\widetilde{M}$, удовлетворяющей условиям Карлсона–Педерсена, влечет за собой также эквивариантную расщепляемость аналогичного граничного отображения для компактификации Хигсона.

§ 3. Большие римановы многообразия

Гипотеза Громова–Лоусона утверждает, что замкнутое асферическое многообразие не может иметь метрики положительной скалярной кривизны [G-L]. Эта гипотеза является специальным случаем гипотезы Новикова, которая обсуждалась в предыдущем параграфе. Большие римановы многообразия появляются, когда мы рассматриваем универсальные накрытия асферических многообразий.

Напомним, что метрическое пространство X, d называется *равномерно стягиваемым*, если для любого числа $R > 0$ найдется такое большее число S , что R -шар $B_R(x)$ с центром в x можно стянуть в точку внутри шара $B_S(x)$ радиуса S для любой точки $x \in X$.

ПРИМЕР. Пусть M – замкнутое асферическое многообразие с римановой метрикой d , и пусть X – его универсальное накрытие, $p: X \rightarrow M$. Тогда X с индуцированной метрикой p^*d является *равномерно стягиваемым*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \subset X$ – компактное множество с $p(Z) = M$, и пусть d_1 – диаметр Z . Для любого данного R рассмотрим точку $x_0 \in Z$ и шар $B_{R+d_1}(x_0)$. Так как M асферично, X стягиваемо, и существует такое $S' > 0$, что шар $B_{R+d_1}(x_0)$ стягивается в $B_{S'}(x_0)$. Тогда для любого $x \in X$ шар $B_R(x)$ стягивается в $B_S(x)$ при $S = S' + d_1$. Действительно, существует такой элемент $g \in \pi_1(M)$, что $g(x) \in Z$. Тогда $B_R(g(x))$ содержится в $B_{R+d_1}(x_0)$ и, следовательно, стягивается в $B_{S'}(x_0) \subset B_S(g(x))$. Так как метрика p^*d является $\pi_1(M)$ -инвариантной, $B_R(x) = g^{-1}(B_R(g(x)))$ стягивается в $B_S(x) = g^{-1}(B_S(g(x)))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Открытое риманово n -многообразие M называется *гиперевклидовым* (рационально гиперевклидовым), если существует липшицево отображение $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ степени один (ненулевой степени).

Гипотеза Громова–Лоусона доказана в [G-L] для многообразий с гиперевклидовыми универсальными накрытиями. Следующий естественный вопрос принадлежит Громову [G2]:

ПРОБЛЕМА. *Всякое ли равномерно стягиваемое многообразие гиперевклидово?*

Положительный ответ на этот вопрос повлек бы за собой гипотезу Громова–Лоусона. Оказалось, что ответ отрицателен [D-F-W]: существует равномерно стягиваемая риманова метрика на $\mathbb{R}^8$, которая не гиперевклидова. Тем не менее, эта метрика рационально гиперевклидова. Так как рациональная гиперевклидовость достаточна для гипотезы Громова–Лоусона, следующая гипотеза имеет большое значение.

ГИПОТЕЗА. *Всякое равномерно стягиваемое многообразие рационально гиперевклидово.*

Мы можем ограничиться здесь равномерно стягиваемыми многообразиями ограниченной геометрии. Этого также было бы достаточно для Громова–Лоусона, см. [H-R]. В этой статье мы будем ссылаться на эту гипотезу как на гипотезу Громова. Мы сравним гипотезу Громова со следующей гипотезой.

ГИПОТЕЗА ВАЙНБЕРГЕРА [Ro1]. *Для любого равномерно стягиваемого метрического пространства X с собственной метрикой граничный гомоморфизм $\partial: H^{*-1}(\nu X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^*(X; \mathbb{Q})$ является эпиморфизмом.*

Когда X – многообразие размерности n , гипотеза Вайнбергера утверждает, что эпиморфность

$$\partial: H^{n-1}(\nu X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^n(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

обеспечивается равномерной стягиваемостью X . Гипотеза Вайнбергера влечет за собой рациональную инъективность грубого ассемблирующего отображения [Ro1] и, в частности, гипотезу Громова–Лоусона.

Один из путей доказательства гипотезы Вайнбергера – показать, что компактификация Хигсона для X рационально ациклична, но это не так даже когда X – евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, в силу вышеупомянутого аргумента Кислинга. С другой стороны, в [D-K-U] гипотеза Вайнбергера была проверена для Γ -инвариантных метрик на стягиваемых многообразиях для широкого класса конечно представленных групп Γ . Аргумент последней секции показывает, что гипотеза Вайнбергера справедлива для евклидовых пространств и для гиперболических пространств, так как они имеют хорошие компактификации.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для открытых n -многообразий M с четным n гипотеза Вайнбергера эквивалентна гипотезе Громова.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – положительная функция, стремящаяся к нулю, когда x приближается к бесконечности. Обозначим через $C_f(M)$ алгебру ограниченных функций φ на метрическом пространстве M с вариацией, стремящейся к нулю как f или быстрее, т.е. для любого $\varphi \in C_f(M)$ и для любого $R > 0$ найдется такая константа C , что $\text{Var}_R \varphi(x) \leq C f(d(x, x_0))$, где $x_0 \in M$ – некоторая фиксированная точка. Тогда компактификация Хигсона–Рое роста f данного пространства M – это пространство максимальных идеалов $\overline{M}_f$ для $C_F(M)$. Нарост $\nu_f M = \overline{M}_f \setminus M$ называется короной Хигсона–Рое для M роста f .

Напоминаем, что корона Хигсона для M – это корона, соответствующая алгебре $C_1(M)$ ограниченных функций на M с вариацией, стремящейся к нулю на бесконечности. Ясно, что $C_f(M) \subset C_1(M)$ и что поэтому существует отображение $f: \overline{M} \rightarrow \overline{M}_f$, продолжающее тождественное на M .

Открытый конус CY на геодезическом компактном пространстве Y с весовой функцией $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ является стандартным факторпространством $Y \times [0, \infty)/\sim$ с метрикой

$$d_\Phi((y, t), (z, s)) = \inf_\gamma l_\Phi(\gamma),$$

где γ есть “прямоугольный” путь, определяемый вершинами $(y_0, t_0) = (y, t)$, (y_1, t_1) , $\dots$, (z, s) , так что $t_i = T_{i+1}$ для четного i и $y_i = y_{i+1}$ для нечетного i , соединяющий (y, t) с (z, s) , и $l_\Phi(\gamma) = \sum_i |t_{i+1} - t_i| + \Phi(x_i)d(y_i, y_{i+1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2 [Ro1, Пример 5.28]. Пусть $M = O_\Phi N$ есть открытый конус над N с весовой функцией Φ , стремящейся к бесконечности. Тогда существует отображение замкнутого конуса $q: \overline{M}_{1/\Phi} \rightarrow C_\Phi N$ такое, что ограничение q на M есть тождественное отображение.

Пусть Z – нарост компактификации открытого ориентированного n -многообразия, тогда степень отображения $f: Z \rightarrow S^{n-1}$ является степенью следующего гомоморфизма $\mathbb{Z} = H^{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f^*} \check{H}^{n-1}(Z) \xrightarrow{\partial} H_c^n(M) = \mathbb{Z}$.

Доказательство теоремы 3.1 основано на характеристизации гиперевклидовых многообразий, являющейся модификацией характеристизации, принадлежащей Дж. Рое [Ro1].

ЛЕММА 3.3. Для n -мерного открытого многообразия M следующие условия равносильны:

- (1) M гиперевклидово,
- (2) существует отображение $g: \nu_{1/x}M \rightarrow S^{n-1}$ степени один,
- (3) существует отображение $g': \nu M \rightarrow S^{n-1}$ степени один.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ – липшицево отображение степени один. Тогда f индуцирует отображение $C_{1/x}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_{1/x}(M)$, и следовательно, отображение $\overline{f}: \overline{M}_{1/x} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}_{1/x}$. Так как $\mathbb{R}^n$ является открытым конусом с весом $O_x S^{n-1}$ над S^{n-1} , согласно предложению 3.2 мы имеем отображение $q: \overline{\mathbb{R}^n}_{1/x} \rightarrow C_x S^{n-1}$. Рассмотрим $g = q \circ \overline{f}|_{\nu_{1/x}M}: \nu_{1/x}M \rightarrow S^{n-1}$. Из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^{n-1}(\nu_{1/x}M) & \longrightarrow & H_c^n(M) \\ g^* \uparrow & & \uparrow \\ H^{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_c^n(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

следует, что $\deg(g) = 1$.

2) $\Rightarrow$ 3). Существует такое отображение $h: \nu M \rightarrow \nu_{1/x}M$, что $h|_M = \text{id}$. Определим $g' = g \circ h$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \check{H}^{n-1}(\nu M) & \longrightarrow & H_c^n(M) \\
 \uparrow & & \text{id} \uparrow \\
 \check{H}^{n-1}(\nu_{1/x}M) & \longrightarrow & H_c^n(M) \\
 g^* \uparrow & & = \uparrow \\
 H^{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_c^n(\mathbb{R}^n)
 \end{array}$$

влечет за собой доказательство.

3) $\Rightarrow$ 1). Данная импликация вытекает из лемм 6.3, 6.4, 6.5 и замечания в [Ro1].

Для рационально гиперевклидовых пространств подобным образом можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.4. *Для n -мерного открытого многообразия M следующие условия равносильны:*

- (1) M рационально гиперевклидово,
- (2) существует отображение $g: \nu_{1/x}M \rightarrow S^{n-1}$ ненулевой степени,
- (3) существует отображение $g': \nu M \rightarrow S^{n-1}$ ненулевой степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Если гипотеза Громова справедлива для n -мерного многообразия M , то в силу леммы 3.4 найдется отображение $f: \nu M \rightarrow S^{n-1}$ ненулевой степени. По определению этой степени отсюда вытекает, что $\partial(f^*(e))$ рационально порождает группу $H_c^n(M; \mathbb{Q})$, где e – фундаментальный класс когомологий сферы S^{n-1} .

Допустим, что гипотеза Вайнбергера справедлива для M . Тогда существует отображение $f: \nu M \rightarrow K(\mathbb{Q}, n-1)$, которое определяет элемент $\alpha \in \check{H}^{n-1}(\nu M; \mathbb{Q})$ с нетривиальным образом $\delta(\alpha) \in H_c^n(M) = \mathbb{Q}$. В силу теоремы Серра о конечности высших гомотопических групп четномерных сфер, комплекс Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Q}, n-1)$ может быть выбран как телескоп из сфер. Так как νM компактно, $f(\nu M)$ лежит в сфере конечной ступени в телескопе. Итак, мы имеем отображение ненулевой степени короны Хигсона на $(n-1)$ -сферу. Согласно лемме 3.4, M рационально гиперевклидово.

§ 4. Когомологии компактификации Хигсона–Рое евклидова пространства

Хотя гипотеза Вайнбергера справедлива для $\mathbb{R}^n$, n -мерная группа когомологий $\check{H}^n(\overline{\mathbb{R}^n}; \mathbb{Q})$ компактификации Хигсона нетривиальна. Отсюда немедленно вытекает, что также $\check{H}^n(\nu \mathbb{R}^n; \mathbb{Q}) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого n , $\check{H}^n(\overline{\mathbb{R}^n}; \mathbb{Q}) \neq 0$.*

Для доказательства нам понадобится следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для любого $n \geq 1$ существует локально тривиальное расслоение $p: E \rightarrow S^{n+1}$ с $(n+1)$ -связным тотальным пространством ($\pi_k(E) = 0$ для $k \leq n+1$) со слоем CW комплекс F содержащим гомотопически эквивалентный подкомплекс M с $(n+1)$ -мерным остовом $M^{(n+1)}$ гомеоморфным n -сфере S^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ расслоение Хопфа $h: S^3 \rightarrow S^2$ удовлетворяет всем условиям. Для $n > 1$ мы можем взять модель Милнора [Ad] для расслоения Серра $* \xrightarrow{\Omega S^{n+1}} S^{n+1}$. В этой модели слой $F = FS^n$ является свободной неабелевой топологической группой, порожденной сферой S^n .

Это расслоение определяется с помощью скручивающего отображения $\xi: S^n \times FS^n \rightarrow FS^n$, определенного формулой $\xi(x, w) = x^{-1}w$. Здесь $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ есть слово в алфавите S^n и его обратных (т.е. $x_i \in S^n$, $\varepsilon_i = 1$ или -1) и $x^{-1}w$ является элементом FS^n , представленным словом, полученным из w добавлением слева буквы x^{-1} . Ясно, что для любого $x \in S^n$ умножение на x^{-1} определяет гомеоморфизм FS^n на себя. Таким образом, отображение ξ определяет расслоение склеивая две естественные карты на S^{n+1} над экватором S^n .

Можно показать, что тотальное пространство E этого расслоения стягиваемо. Следовательно, слой FS^n гомотопически эквивалентен пространству петель ΩS^{n+1} . Свободная топологическая группа FS^n содержит свободный топологический моноид MS^n . По теореме Джеймса [J], MS^n гомотопически эквивалентно $\Omega \Sigma S^n = \Omega S^{n+1}$ и, следовательно, FS^n . Более того, включение $MS^n \subset FS^n$ индуцирует эту эквивалентность. Отметим, что $(n+1)$ -остов MS^n (бесконечная редуцированная степень Джеймса сферы S^n) гомеоморфен сфере S^n для $n \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Если $f: S^n \rightarrow S^n$ — кусочно-линейное степени m отображение единичной сферы в себя, то $V_\varepsilon(f) \geq \frac{1}{2} \varepsilon m^{1/n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого n и ε пусть $\text{vol}(\varepsilon, n)$ обозначает объем шара радиуса ε в S^n . При данных n и ε выберем точки $x_1, \dots, x_\ell \in S^n$ так, чтобы открытые шары радиуса $\varepsilon/2$ в S^n образовывали максимальную дизъюнктную систему. Имеем неравенство:

$$\text{vol}(S^n) \geq \ell \cdot \text{vol}\left(\frac{\varepsilon}{2}, n\right).$$

Так как система максимальна, ε -шары с теми же самыми центрами покрывают сферу S^n и так как f имеет степень m , объем образа некоторого ε -шара с центром в некоторой x_i должен быть по крайней мере

$$\frac{m \cdot \text{vol}(S^n)}{\ell} \geq \left(\frac{m \cdot \text{vol}(S^n)}{\ell} \right) \left(\frac{\ell \cdot \text{vol}\left(\frac{\varepsilon}{2}, n\right)}{\text{vol}(S^n)} \right) = m \cdot \text{vol}\left(\frac{\varepsilon}{2}, n\right)$$

Следовательно, так как объемы шаров растут медленнее в S^n , чем в $\mathbb{R}^n$, образ некоторого ε -шара с центром x_i не содержится в $(m^{1/n} \cdot \frac{\varepsilon}{2})$ -шаре с центром $f(x_i)$. Это влечет за собой, что $V_\varepsilon(f) > \frac{1}{2} \varepsilon m^{1/n}$, что и требовалось.

Обозначим через $B(m)$ границу куба в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат и со сторонами длины m , параллельными координатным осям. Пусть $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ —

радиальный сжимающий гомеоморфизм, определенный в сферических координатах формулой $h(r, \varphi) = (r^\alpha, \varphi)$, где $\frac{n}{n+1} \leq \alpha < 1$. Рассмотрим подмножество $M = h^{-1}(\bigcup_{m=1}^{\infty} B(2m)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с индуцированной метрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Для $n = 1$ теорема доказана в [К].

Допустим, что $n > 1$, и пусть $q: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1} = T^{n+1}$ – факторотображение на тор, $\alpha: T^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ – факторотображение на сферу. Рассмотрим отображение $f = \alpha \circ q \circ h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$, где h – такое же, как и выше. Пусть $z_0 \in S^{n+1}$ – такая точка факторпространства, что $(\alpha \circ q)^{-1}(z_0)$ является множеством точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющих по крайней мере одну целую координату. Это значит, в частности, что $(\alpha \circ q)^{-1}(z_0) \supset M$. Так как $B(m)$ имеет центр в начале координат, $B(m)$ не содержится в $(\alpha \circ q)^{-1}(z_0)$ для четного m .

Отображение f имеет продолжение $\bar{f}: \overline{\mathbb{R}^{n+1}} \rightarrow S^{n+1}$, так как градиент f стремится к нулю на бесконечности. Как образ фундаментального класса сферы S^{n+1} , $\bar{f}$ определяет элемент целочисленных когомологий Чеха компактификации Хигсона $\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$. Мы покажем, что это элемент бесконечного порядка.

Предположим противное. Тогда существует число d такое, что композиция $g_d \circ \bar{f}$ гомотопна нулю, где $g_d: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ – отображение степени d . Тогда существует отображение $f': \overline{\mathbb{R}^{n+1}} \rightarrow E$ такое, что $p \circ f' = g_d \circ \bar{f}$, где $p: E \rightarrow S^{n+1}$ – расслоение, введенное в предложении 4.2. Это вытекает из того факта, что нульгомотопные отображения всегда поднимаются.

Мы можем допустить, что $g_d(z_0) = z_0$. Заметим, что $f(M) = z_0$ и $g_d(f(M)) = z_0$, так что $f'(M) \subset p^{-1}(z) = FS^n$. Точная последовательность расслоения p влечет за собой, что отображение f' , ограниченное на $h^{-1}(B(2m))$, имеет ту же степень, что и факторотображение

$$q_{2m}: h^{-1}D(2m)/h^{-1}B(2m) \rightarrow S^{n+1},$$

индуцированное $g_d \circ f|_{h^{-1}(D(m))}$. Здесь $B(2m)$ – граница куба $D(2m)$. Степень отображения q_{2m} равняется $d \cdot (2m)^{n+1}$, т. е. d , умноженному на число единичных кубов в $D(2m)$.

Так как включение $MS^n \subset FS^n$ является гомотопической эквивалентностью, существует гомотопия отображения $f'|_{\bar{M}}$ к отображению $f'': \overline{\mathbb{R}^{n+1}} \rightarrow E$ с $f''(\bar{M}) \subset MS^n$. Согласно [D-K-U], замыкание M в $\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$ – это $\bar{M}$, компактификация Хигсона-Рое для M , так что эти обозначения согласованы. Так как $(n+1)$ -остов CW-комплекса MS^n есть S^n и $\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$ является $(n+1)$ -мерным, мы можем допустить, что $f''(\bar{M}) \subset S^n$, поэтому $f''|_M$ должно слабо осциллировать. Мы увидим, что это невозможно, противоречие, которое завершает доказательство теоремы 4.1.

Пусть $k: S^n \rightarrow h^{-1}(B(2))$ – липшицево отображение (радиальная проекция будет им) с липшицевой константой L . Для каждого m мы имеем композицию c_m

$$S^n \xrightarrow{k} h^{-1}(B(2)) \xrightarrow{\times m^{1/\alpha}} h^{-1}(B(2m)) \xrightarrow{f'} S^n.$$

По предложению 4.3, $V_\varepsilon(c_m) > (d(2m)^{n+1})^{1/n} \cdot \varepsilon/2$. Это влечет за собой, что

$$V_{Lm^{1/\alpha}\varepsilon}(f'') > (d(2m)^{n+1})^{1/n} \cdot \varepsilon/2,$$

и мы получаем

$$V_\varepsilon(f'') > (d(2m)^{n+1})^{1/n} \cdot \frac{\varepsilon}{2Lm^{1/\alpha}} = \frac{d^{1/n}2^{1/n}}{L} m^{(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{\alpha})} \varepsilon.$$

Так как экспонента m неотрицательна, $V_\varepsilon(f'' \mid M)$ не стремится к нулю с ростом m и f'' не может быть слабо осциллирующим.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. $H^k(\overline{\mathbb{R}^n}) \neq 0$ для любых $1 \leq k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ретракция $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ индуцирует ретракцию $\bar{r}: \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^{n-1}}$. Результат получается с помощью индукции и теоремы 4.1.

§ 5. Когомологии компактификации Хигсона–Рое гиперболического пространства

Мы начнем этот параграф с доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.1. Для гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, $\check{H}^2(\overline{\mathbb{H}^2}) = 0$.

ЛЕММА 5.2. Пусть $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ – единичная 3-сфера, и пусть $S^1 \subset S^3$ – большой круг. Пусть $p_{S^1}^\varepsilon: N_\varepsilon S^1 \rightarrow S^1$ обозначает проекцию некоторой трубчатой ε -окрестности S^1 . Тогда $p_{S^1}^\varepsilon$ липшицево с константой K_ε , где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из доказательства теоремы о трубчатой окрестности, поскольку нормальное векторное поле берется перпендикулярным к большому кругу S^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Так как $\dim \overline{\mathbb{H}^2} = 2$ [D-K-U], каждый элемент из $\check{H}^2(\overline{\mathbb{H}^2})$ можно представить отображением $f: \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow S^2$. Так как любое отображение 2-мерного компакта в S^3 гомотопно нулю, для доказательства нульгомотопности f достаточно поднять f относительно расслоения Хопфа $h: S^3 \rightarrow S^2$. Значит, достаточно найти такое медленно колеблющееся отображение $g: \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow S^3$, что $h \circ g = f$. Так как g гомотопна нулю, его композиция с h будет также гомотопной нулю.

Пусть x_0 – неподвижная точка в $\mathbb{H}^2$ и пусть $S(n)$ – сфера радиуса n с центром в x_0 . Пусть $\xi_m: \mathbb{H}^2 \rightarrow B(m)$ – геодезическая ретракция на шар $B(m)$. Ясно, что ξ_m , ограниченное на $B(m+1)$, двигает точки не дальше чем на единицу. Существует константа $C < 1$ такая, что отображение $\xi_m|_{S(m+1)}$ липшицево с константой Липшица C для всех m . (Фактически, для больших m , C приблизительно равно $1/e$.) Выбираем $\varepsilon > 0$ так, что $C < 1/K_\varepsilon$.

Мы определяем поднятие $g: \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow S^3$ для f относительно h следующим образом:

- (i) Выбираем шар $B(R)$ радиуса R с центром x_0 так, чтобы для любых двух точек $x, y \in \mathbb{H} \setminus B(R)$ с $\text{dist}(x, y) \leq 1$ большой круг $h^{-1}(f(x))$ лежал в ε -окрестности большого круга $h^{-1}(f(y))$.
- (ii) Мы будем определять поднятие g по индукции. Начинаем с любого липшицева поднятия g отображения f над $B(R)$.
- (iii) Допустим, что g уже определено на $B(R+n)$, продолжим g на $B(R+n+1)$, полагая

$$g(x) = p_{h^{-1}(f(x))}^\varepsilon(g(\xi_{R+n}(x))).$$

Обозначим константу Липшица g , ограниченного на $S(r)$, через L_r , и заметим, что

$$L_{R+n+1} \leq L_{R+n} CK_\varepsilon \leq L_R (CK_\varepsilon)^{n+1}.$$

Это показывает, что константа Липшица L_r стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$. Это влечет за собой, что g слабо осциллирует на бесконечности, что завершает доказательство.

Обобщения. Используя расслоения Хопфа $S^7 \rightarrow S^4$ и $S^{15} \rightarrow S^8$, вышеприведенное рассуждение показывает, что $H^n(\mathbb{H}^n) = 0$ для $n = 4$ и $n = 8$. Замена расслоения Хопфа на единичное касательное расслоение сферы S^n для четного n показывает, что $H^n(\mathbb{H}^n)$ содержит только 2-кручение для любого четного n . Фактически, небольшое изменение этого рассуждения (использующее, например, расслоения $S^{2n+1} \rightarrow CP^n$ в двумерном случае) показывает, что

$$H^2(\mathbb{H}^n) = H^4(\mathbb{H}^n) = H^8(\mathbb{H}^n) = 0$$

для любого n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ad] Adams J. F. Algebraic Topology – A Student’s Guide. Cambridge: Cambridge University Press, 1972.
- [C-P] Carlsson G., Pedersen E. Controlled algebra and the Novikov conjecture for K and L theory // Topology. 1995. V. 34. P. 731–758.
- [D] Davis M. W. Coxeter groups and aspherical manifolds // Lecture Notes in Math. 1984. V. 1051. P. 197–221.
- [D-F-W] Dranishnikov A. N., Ferry S., Weinberger S. Large Riemannian manifolds which are flexible // Preprint, 1994.
- [D-K-U] Dranishnikov A. N., Keesling J. E., Uspenskij V. V. On the Higson corona of uniformly contractible spaces // Preprint, 1996.
- [F-H] Farrell F. T., Hsiang W.-C. On Novikov conjecture for nonpositively curved manifolds // Ann. Math. 1981. V. 113. P. 197–209.
- [F-P] Ferry S., Pedersen E. Epsilon Surgery Theory // LMS Lecture Notes. 1995. V. 227. P. 167–226.
- [F-W] Ferry S., Weinberger S. A coarse approach to the Novikov Conjecture // LMS Lecture Notes. 1995. V. 226. P. 147–163.
- [G] Gromov M. Asymptotic invariants for infinite groups // LMS Lecture Notes. 1993. V. 182 (2).
- [G2] Gromov M. Large Riemannian manifolds // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1201. P. 108–122.
- [G-L] Gromov M., Lawson H. B. Positive scalar curvature and the Dirac operator // Publ. I.H.E.S. 1983. V. 58. P. 83–196.
- [H] Higson N. On the relative K-homology theory of Baum and Douglas // Preprint, 1990.
- [H-R] Higson N., Roe J. The Baum-Connes conjecture in coarse geometry // LMS Lecture Notes. 1995. V. 227. P. 227–254.
- [J] James I. M. Reduced product spaces // Ann. of Math. 1955. V. 62. P. 170–197.
- [K] Keesling J. The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona // Topology Proceedings. 1994. V. 19. P. 129–148.
- [R1] Roe J. Coarse cohomology and index theory for complete Riemannian manifolds: Memoirs Amer. Math. Soc. No. 497, 1993.

- [R2] Roe J. Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds // CBMS Regional Conference Series in Mathematics. No. 90. 1996.
- [Ros1] Rosenberg J. C^* -algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture // Publ. I.H.E.S. 1983. V. 58. P. 409–424.
- [Ros2] Rosenberg J. Analytic Novikov for topologists // LMS Lecture Notes. 1995. V. 226. P. 338–372.
- [Y] Yu G. The Novikov conjecture and groups with finite asymptotic dimensions // Preprint, 1995.

University of Florida, Department of Mathematics,
P.O. Box 118105, 358 Little Hall, Gainesville, FL 32611-8105, USA;
SUNY at Binghamton, Department of Mathematics,
Binghamton, NY 13902, USA
E-mail: dranish@math.ufl.edu steve@math.binghamton.edu

Поступила в редакцию
19.06.1997