Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Матвеев, Классификация достаточно больших трехмерных многообразий,
УМН, 1997, том 52, выпуск 5, 147–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:15:23

УДК 515.1

КЛАССИФИКАЦИЯ ДОСТАТОЧНО БОЛЬШИХ
ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. МАТВЕЕВ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	147
§ 1. Основные определения и формулировка основной теоремы	149
§ 2. Краткая схема доказательства основной теоремы	151
§ 3. Простые и специальные полиэдры	152
§ 4. Теория нормальных поверхностей Хакена для многообразий с уз- ром на крае	154
§ 5. Геометрическое суммирование	157
§ 6. Две теоремы конечности	158
§ 7. Две переформулировки трудной части основной теоремы и условное доказательство одной из них	161
§ 8. Простые наращивания	163
§ 9. Структура 3-компонент, не допускающих простых наращиваний	165
§ 10. Специальные наращивания	167
Список литературы	173

Введение

К настоящему времени в трехмерной топологии сложилась единая точка зрения: решение задачи классификации трехмерных многообразий какого-нибудь класса должно состоять в предъявлении двух алгоритмов. Первый алгоритм (алгоритм *перечисления*) должен перечислять трехмерные многообразия данного класса, возможно, с повторениями. Второй алгоритм (алгоритм *распознавания*) должен по каждому двум поданным на его вход многообразиям рассматриваемого класса выдавать ответ на вопрос, гомеоморфны они или нет. Если такие алгоритмы предъявлены, то их совместная работа приводит к появлению алгоритмически выписываемого и не содержащего дубликатов бесконечного перечня всех многообразий рассматриваемого класса. Этот классифицирующий перечень как раз и служит ответом на задачу классификации. Разумеется, такое решение задачи классификации следует считать удовлетворительным только в первом приближении; обычно математики хотят большего. Тем

не менее, постановка и решение (в указанном слабом смысле) задачи классификации достаточно больших многообразий оказали существенное влияние на развитие трехмерной топологии и позволили достаточно глубоко понять сложный и красивый мир трехмерных многообразий.

Отметим, что слова “достаточно большое многообразие” нужно понимать в том смысле, что многообразие содержит поверхность, фундаментальная группа которой бесконечна и является подгруппой фундаментальной группы многообразия. Класс достаточно больших многообразий довольно широк – он содержит, например, все многообразия с несжимаемым краем или с бесконечной первой группой гомологий. Дополнительные пространства нетривиальных узлов также входят в него. Поэтому не удивительно, что развитой техники оказалась вполне достаточно и для полного решения задачи классификации узлов и зацеплений в сфере S^3 .

Общая схема классификации была предложена В. Хакеном в 1962 году [1]. К 1980 году она была реализована совместными усилиями многих математиков (Ф. Вальдхаузена [2], [3], К. Иоганнсона [4], [5], Г. Хемiona [6] и других). Ключевым понятием здесь служило понятие *иерархии* на трехмерном многообразии. Однако, полного и относительно замкнутого в себе текста не существовало до сих пор. Читатель был вынужден либо удовлетвориться статьями обзорного характера (см., например, [2], [5]), либо попытаться скомбинировать полное доказательство из оригинальных работ, самостоятельно восстанавливая при этом все необходимые детали. Даже в недавней книге Г. Хемiona [7] есть изложенные только на уровне идей неясные места.

Настоящая статья содержит полное решение задачи классификации достаточно больших трехмерных многообразий. При этом я отказываюсь от понятия иерархии в пользу рассмотрения концептуально менее сложного понятия двумерного подполиэдра специального типа. Аналогичные подполиэдры рассматривались К. Иоганнсоном [8]. За счет этого и за счет отказа от интересных, но не очень необходимых для классификации различных дополнительных результатов, а также за счет некоторой модификации схемы изложения, размеры доказательств удалось удержать в разумных пределах. При этом более важная и трудная часть (существование алгоритма распознавания) изложена с полными доказательствами. Единственное исключение: мне не удалось существенно упростить доказательство замечательной теоремы Г. Хемiona о разрешимости проблемы сопряженности в группе гомеоморфизмов поверхности на себя. Учитывая, что оно довольно громоздко, использует совсем другую технику и выдержало тщательнейшую проверку на правильность, мне кажется разумным не приводить его здесь и отослать читателя к оригинальной работе [6]. Другое доказательство теоремы Г. Хемiona можно извлечь из классификации гомеоморфизмов поверхностей У. Торстона, основанной на рассмотрении “железнодорожных схем” (train tracks) и измеренных ламинаций на поверхностях [9], [10].

Нужно отметить, что предложенный ниже алгоритм распознавания достаточно больших многообразий носит чисто теоретический характер, как и все другие алгоритмы в трехмерной топологии, которые основаны на теории нормальных поверхностей Хакена. Единственный известный мне нетривиальный *практический* алгоритм распознавания был предложен И. Володиным, В. Кузнецовым и А. Фоменко, см. [11]–[13]. Он распознает трехмерную сферу в классе многообразий рода 2.

Сбор необходимого материала и продумывание новой схемы доказательства были

выполнены автором во время финансируемого фондом Фольксвагена визита в университет г. Бохум (Германия). Впервые она была изложена на международной топологической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика П. С. Александрова (Москва, май 1996 г.). Трехчасовой курс лекций был прочитан на конференции в Палермо (Италия, июнь 1996 г.). Автор благодарен К. Иоганнсону, Дж. Бирман, Х. Хамиди-Техрани и М. Буало за разъяснение некоторых деталей, относящихся к распознаванию квазимногообразий Столлингса. Разработка деталей доказательства и написание окончательного текста были выполнены под эгидой Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00847) и INTAS (грант № 94-921).

§ 1. Основные определения и формулировка основной теоремы

На протяжении всей статьи мы рассматриваем только ориентируемые многообразия. В силу известного результата Е. Е. Мойса любое трехмерное многообразие можно триангулировать и, следовательно, разбить на ручки. Любое отображение трехмерных многообразий можно аппроксимировать симплициальным. Поэтому и многообразия, и отображения можно задавать конечными наборами комбинаторных данных, указывая, например, как склеиваются симплексы или куда переходят вершины при задаваемом отображении. Указанное обстоятельство всегда нужно иметь в виду, рассматривая алгоритмические вопросы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Трехмерное многообразие называется *неприводимым*, если каждая двумерная сфера в нем *тривиальна*, т.е. ограничивает трехмерный шар.

Напомним, что поверхность F в трехмерном многообразии M называется *собственной*, если $F \cap \partial M = \partial F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Неприводимое трехмерное многообразие называется *гранично неприводимым*, если любой собственный двумерный диск в нем *тривиален*, т.е. отсекает от него трехмерный шар.

Если трехмерное многообразие M приводимо, то оно не является *простым*, т.е. представимо в виде связной суммы двух или более многообразий, отличных от сферы S^3 . Единственным исключением служит многообразие $S^2 \times S^1$, которое является и приводимым, и простым. Поскольку разложение ориентированного трехмерного многообразия в связную сумму простых ориентированных слагаемых существует и единственно (см. [13]–[15]), то вопрос о гомеоморфности достаточно уметь решать только для неприводимых многообразий. Аналогичным образом, достаточно ограничиться рассмотрением гранично неприводимых многообразий, поскольку теорема о существовании и единственности разложения ориентируемого многообразия в граничную связную сумму гранично неприводимых слагаемых также верна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность F в трехмерном многообразии M называется *сжимаемой*, если найдется такой диск $D^2 \subset M$, что $D^2 \cap F = \partial D^2$ и кривая ∂D^2 не ограничивает диска в F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Собственная поверхность F в трехмерном многообразии M называется *гранично сжимаемой*, если найдется такой диск $D^2 \subset M$, что $D^2 \cap (\partial M \cup F) =$

∂D^2 и $D^2 \cap F$ является нетривиальной (не отсекающей от поверхности диск) дугой в F .

Наглядный смысл понятия сжимаемости состоит в том, что сжимаемая поверхность содержит нетривиальную трубочку. Секущий диск D^2 этой трубочки обеспечивает сжимаемость. Из граничной сжимаемости следует существование нетривиального туннеля, опирающегося на край ∂M . Таким образом, *несжимаемая* (т.е. не являющаяся сжимаемой) поверхность не содержит нетривиальных трубочек, а *гранично несжимаемая* поверхность – нетривиальных туннелей. На рис. 1 изображена сжимаемая, гранично сжимаемая поверхность с двумя выделенными дисками, обеспечивающими сжимаемость, и одним выделенным диском, обеспечивающим граничную сжимаемость.

Рис. 1

Нужно уточнить, что хотя формально диски и сферы в многообразии всегда несжимаемы, их обычно не считают таковыми или дополнительно требуют, чтобы диск или сфера были нетривиальными. Отметим также, что граничная неприводимость неприводимого многообразия эквивалентна несжимаемости его края.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие называется *достаточно большим*, если оно содержит несжимаемую гранично несжимаемую двумерную поверхность, отличную от сферы и диска.

Отметим, что трехмерное многообразие с отличным от сферы непустым несжимаемым краем автоматически является достаточно большим. К числу таких многообразий относятся, например, дополнительные пространства всех нетривиальных узлов. Любое неприводимое гранично неприводимое многообразие M с бесконечной первой группой гомологий также является достаточно большим. Несжимаемая гранично несжимаемая поверхность в нем получается как прообраз некритической точки при подходящим образом подобранном отображении $f: M \rightarrow S^1$, существование которого обеспечивается бесконечностью группы гомологий.

Имеется простой критерий несжимаемости: ориентируемая поверхность в ориентируемом трехмерном многообразии несжимаема тогда и только тогда, когда она *инъективна*, т.е. когда индуцированный вложением гомоморфизм фундаментальных

групп инъективен. Это легко следует из теоремы о петле и леммы Дена [15], [16]. При изучении ориентируемых достаточно больших многообразий вполне можно ограничиться рассмотрением ориентируемых несжимаемых поверхностей, так как край регулярной окрестности неориентируемой инъективной поверхности также инъективен, и поэтому из существования неориентируемой инъективной поверхности следует существование ориентируемой.

Нужно отметить, что не имеет особого смысла рассматривать понятие “достаточно большое многообразие” в отрыве от понятия “неприводимое гранично неприводимое многообразие”. Например, несжимаемая поверхность в связной сумме двух многообразий может целиком лежать в одном из них, а тогда ее наличие не дает никакой информации о втором многообразии. Поэтому удобно рассматривать эти понятия вместе и для краткости принять широко распространенное соглашение, назвав неприводимые гранично неприводимые достаточно большие трехмерные многообразия *многообразиями Хакена*.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА.

1. *Существует алгоритм перечисления всех многообразий Хакена.*
2. *Существует алгоритм распознавания гомеоморфности многообразий Хакена.*

Уточним еще раз: первый алгоритм выдает одно за другим все многообразия Хакена (возможно, с повторениями), второй по каждому двум поданным на его вход многообразиям Хакена выясняет, гомеоморфны они или нет. Совместная работа этих алгоритмов приводит к появлению классифицирующего перечня всех многообразий Хакена.

§ 2. Краткая схема доказательства основной теоремы

Построение алгоритма, перечисляющего все трехмерные многообразия (не обязательно многообразия Хакена), затруднений не вызывает. Достаточно последовательно перечислять, например, все конечные трехмерные симплициальные комплексы и отбирать среди них те, которые являются многообразиями, т.е. линки всех вершин которых гомеоморфны двумерным сферам или дискам. Задача выделения среди них многообразий Хакена гораздо сложнее – она была решена совсем недавно (в 1994 году). В основе ее решения лежит метод Хакена [17], [18], позволяющий удовлетворительно описать все нормальные поверхности в данном разбитом на ручки трехмерном многообразии M . С помощью этого метода можно алгоритмически построить *конечный* набор так называемых *фундаментальных* поверхностей в M . Этот набор, пополненный краями регулярных окрестностей неориентируемых фундаментальных поверхностей, заведомо содержит нетривиальную сферу, нетривиальный диск или ориентируемую несжимаемую поверхность, если таковые имеются в многообразии (см. [19]).

Поэтому задача сводится к алгоритмическому распознаванию несжимаемости данной ориентируемой поверхности $F \subset M$. Если поверхность отлична от сферы и диска, то ее несжимаемость можно выяснить с помощью того же метода Хакена, примененного к разрезанному по поверхности F многообразию M , – достаточно узнать, есть

ли в новом многообразии собственный диск с нетривиальным краем. Задача распознавания тривиальности сферы и диска сводится к проблеме алгоритмического распознавания стандартного шара, которая была решена совсем недавно в основанной на идеях Х. Рубинштейна работе А. Томпсон [20]. Модифицированная версия работы А. Томпсон изложена в [21].

Идея построения алгоритма распознавания гомеоморфности многообразий Хакена гораздо сложнее. Доказательства практически всех классических результатов про многообразия Хакена проводятся по следующей схеме. Данное многообразие разрезается по несжимаемой поверхности, которая существует по определению достаточно большого многообразия, затем – по нетривиальным дискам, которые могут появиться в результате первого разрезания, затем – снова по несжимаемой поверхности, снова по дискам, и т. д. Этот процесс закончится тогда, когда многообразие превратится в набор трехмерных шаров.

Допустим теперь, что имеется некое свойство трехмерных многообразий, про которое удастся доказать, что оно сохраняется при разрезании по несжимаемой поверхности и заведомо выполнено для стандартного шара. Тогда это свойство становится автоматически справедливым для всех многообразий Хакена. Примером такого свойства является деформируемость в гомеоморфизм любого отображения одного многообразия в другое, которое гомеоморфно переводит край в край (см. [2]).

Алгоритм распознавания гомеоморфности многообразий Хакена строится по аналогичной схеме, только вместо разрезания многообразия M по поверхностям эти поверхности на каждом этапе объединяются внутри многообразия M в двумерный полиэдр P специального вида. Оказывается, что *наращивания* (т.е. переходы от каждого полиэдра P к следующему полиэдру) можно выбрать так, что в итоге получится конечный набор двумерных полиэдров, который является *характеристическим* в следующем смысле: два многообразия Хакена гомеоморфны тогда и только тогда, когда отвечающие им характеристические наборы состоят из одного и того же числа попарно гомеоморфных двумерных полиэдров.

Таким образом, задача распознавания гомеоморфности многообразий Хакена сводится к задаче распознавания гомеоморфности двумерных полиэдров, которая заведомо алгоритмически разрешима.

§ 3. Простые и специальные полиэдры

При изучении двумерных полиэдров в трехмерных многообразиях часто оказывается весьма удобным ограничиться рассмотрением полиэдров, имеющих максимально простую локальную структуру. Такие полиэдры неоднократно появлялись в математической литературе под различными названиями (стандартный [22], специальный [23], простой [24] полиэдр, ложная поверхность [25]). Мы предпочтем здесь самое простое название – простой полиэдр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Двумерный полиэдр называется *простым*, если линк каждой его точки гомеоморфен окружности, окружности с диаметром или окружности с тремя радиусами.

Типичные окрестности точек простого полиэдра изображены на рис. 2.

Рис. 2

Объединение особых (т.е. не имеющих гомеоморфной диску окрестности) точек простого полиэдра P называется его *особым графом* и обозначается через SP (здесь под графом мы понимаем одномерный клеточный комплекс). Из каждой вершины особого графа исходит два или четыре ребра. Множество неособых точек простого полиэдра P состоит из нескольких связных двумерных многообразий без края, которые называются *2-компонентами* полиэдра P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Простой подполиэдр P трехмерного многообразия M называется *допустимым*, если каждая его 2-компонента является несжимаемой поверхностью и либо лежит в ∂M , либо разделяет две различные компоненты связности многообразия $M \setminus P$. Замыкания компонент связности многообразия $M \setminus P$ называются *3-компонентами* пары (M, P) .

Отметим, что каждая 3-компонента Q пары $M \setminus P$ является компактным многообразием, причем $Q \cap P = \partial Q$.

Опишем один простой общий способ построения допустимых подполиэдров. Пусть P – допустимый подполиэдр многообразия M , и пусть несжимаемая поверхность $F \subset M$ такова, что $F \cap P = \partial F$ и ∂F находится в общем положении, т.е. не содержит вершин особого графа SP и пересекает его ребра трансверсально. Если F не разбивает содержащей ее компоненты связности многообразия $M \setminus P$, то заменим F на ее две параллельные копии. Тогда полиэдр $P \cup F$ является допустимым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Простой полиэдр называется *специальным*, если он имеет хотя бы одну вершину и все его 2-компоненты являются клетками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимый подполиэдр P многообразия M называется его *простым скелетом*, если он специален и если все 3-компоненты пары (M, P) гомеоморфны трехмерным шарам.

Из этого определения следует, что простой скелет обязан содержать край многообразия M . Именно такие подполиэдры мы собираемся получить в итоге процесса построения характеристических подполиэдров, описанного в § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть P_1, P_2 – простые скелеты многообразий M_1, M_2 , соответственно. Если края многообразий не содержат двумерных сфер, то любой гомеоморфизм одного скелета на другой продолжается до гомеоморфизма многообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. И окружность с тремя радиусами, и окружность с диаметром являются примерами графов, которые вкладываются в двумерную сферу однозначно с точностью до гомеоморфизма сферы. Это позволяет продолжить данный гомеоморфизм между скелетами на регулярные окрестности вершин и ребер. Оставшиеся части регулярных окрестностей скелетов представляют прямые произведения чуть уменьшенных 2-компонент (т.е. клеток) на отрезок. Это помогает продолжить гомеоморфизм и на них. Так как края многообразий не содержат сфер, то оставшиеся части многообразий состоят из одинакового числа шаров, на которые гомеоморфизм продолжается по радиусам с помощью конических конструкций.

§ 4. Теория нормальных поверхностей Хакена для многообразий с узором на крае

Грубо говоря, нормальная поверхность – это поверхность в трехмерном многообразии, которая правильным образом расположена по отношению к данному разбиению многообразия на ручки. Разумеется, слово “правильным” нуждается в уточнении. Суть теории нормальных поверхностей состоит в возможности замены любой поверхности на нормальную так, чтобы сохранились нужные свойства, различные в каждом конкретном случае. Основной результат теории нормальных поверхностей заключается в существовании конечного и алгоритмически конструируемого набора так называемых *фундаментальных* нормальных поверхностей, который в некотором смысле служит базисом для множества всех нормальных поверхностей. Мы изложим теорию нормальных поверхностей для более общей ситуации многообразий с узором на крае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Одномерный подполиэдр $\Gamma \subset \partial Q$ называется *узором* на крае трехмерного многообразия Q , если его можно представить в виде графа, из каждой вершины которого исходит два или три ребра.

Обычно узоры появляются так: пусть P – простой подполиэдр трехмерного многообразия M , и пусть Q – 3-компонента пары (M, P) . Тогда граф $\Gamma = SP \cap \partial Q$ является узором на крае многообразия Q . При добавлении к допустимому подполиэдру P новой поверхности $F \subset Q$ знание узора совершенно необходимо, так как от этого зависит структура нового подполиэдра $P \cup F$. Отметим, что узор может быть пустым, и этот частный случай всегда полезно иметь в виду.

Пусть (Q, Γ) – многообразие с узором на крае. Выберем разбиение ρ многообразия Q на ручки индексов 0, 1, 2 и 3. При этом удобно считать, что если край многообразия Q не пуст, то ручки индекса 3 отсутствуют. Следуя Х. Шуберту [18], будем называть ручки индекса 0 *шарами*, ручки индекса 1 – *балками*, ручки индекса 2 – *плитками*. Каждая балка имеет структуру прямого произведения диска на отрезок $I = [0, 1]$, каждая плитка – тоже. Разница в том, что балка $D^2 \times I$ приклеивается к шарам по двум дискам $D^2 \times \{0, 1\}$, а плитка $D^2 \times I$ приклеивается к объединению шаров и балок по кольцу $\partial D^2 \times I$. Пересечения краев шаров с балками (т.е. основания ручек индекса 1) будем называть *островами*, с плитками – *мостами*. Дополнение в крае каждого шара к объединению островов и мостов состоит из нескольких областей, которые мы будем называть *озерами*, см. рис. 3.

Рис. 3

Разбиение ρ многообразия Q на ручки порождает разбиение ρ_∂ его края на связные компоненты пересечений ручек разбиения ρ с краем ∂Q . Связные компоненты пересечения края ∂Q с балками будем называть *полосками*, с плитками – *заплатами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разбиение ρ многообразия Q с узором Γ называется *правильным*, если:

1. Γ не пересекает озер;
2. пересечение узора Γ с каждой полоской либо пусто, либо состоит из одного отрезка, соединяющего противоположные стороны полоски;
3. пересечение узора Γ с каждой заплатой либо пусто, либо состоит из одной дуги, либо является триодом, т.е. букетом трех отрезков с общей вершиной.

Суть следующего определения нормальной поверхности состоит в том, что нормальная поверхность должна пересекать ручки разбиения максимально простым образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (Q, Γ) – многообразие с узором. Собственная поверхность $F \subset Q$ называется *нормальной* (по отношению к разбиению ρ), если:

1. F пересекает каждую плитку $D^2 \times I$ по нескольким параллельным копиям вида $D^2 \times \{*\}$ диска D^2 ;
2. пересечение поверхности F с каждой балкой $D^2 \times I$ имеет вид $L \times I$, где L – конечная система собственных непересекающихся дуг в диске D^2 , который здесь можно отождествить как с островом $D^2 \times \{0\}$, так и с островом $D^2 \times \{1\}$;
3. ни одна из систем L не содержит замкнутых кривых;
4. пересечение поверхности с каждым шаром состоит из дисков (эти диски называются *элементарными*);
5. край каждого элементарного диска проходит по каждому мосту и каждому озеру не более одного раза.

Напомним основные положения теории нормальных поверхностей Хакена [17], [18]. Будем говорить, что два элементарных диска в шаре разбиения ρ относятся к одному типу, если существует инвариантная на островах и мостах изотопия шара, переводящая один диск в другой. Отметим, что для любого шара разбиения существует только конечное число типов содержащихся в нем элементарных дисков (это следует из условия 5).

Обозначим через $E_1, E_2, \dots, E_n$ элементарные диски, представляющие без повторений все типы во всех шарах разбиения ρ . Нормальная поверхность F может пересекать шары по нескольким параллельным копиям каждого диска E_i . Число этих копий обозначим через x^i . Итак, каждой нормальной поверхности F сопоставляется вектор $\overline{x}(F) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ с неотрицательными целыми координатами. При этом две нормальные поверхности F_1, F_2 эквивалентны (т.е. переводятся друг в друга инвариантной на ручках и на узоре изотопией многообразия) тогда и только тогда, когда $\overline{x}(F_1) = \overline{x}(F_2)$. Разумеется, далеко не каждый вектор $\overline{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ с неотрицательными целыми координатами реализуется нормальной поверхностью. Для этого необходимо, чтобы для любых положительных координат x^i, x^j диски E_i, E_j были *совместимыми*, т.е. чтобы отвечающие им типы имели непересекающихся представителей. Такие векторы будем называть *допустимыми*.

Для того чтобы описать второе необходимое условие, размножим каждый из дисков E_i в x^i параллельных экземплярах. Рассмотрим балку $D^2 \times I$ разбиения и в острове $D^2 \times \{0\}$ выберем простую дугу $l \times \{0\}$, соединяющую два моста, либо две полосы, либо мост с полоской. Подсчитаем общее количество копий дуги $l \times \{0\}$ в пересечении всех полученных дисков с рассматриваемым островом. Это число представляется в виде линейной комбинации координат вектора $\overline{x}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Точно так же найдем число копий дуги $l \times \{1\}$ в пересечении дисков с островом $D^2 \times \{1\}$. Если вектор $\overline{x}$ реализуем поверхностью, то полученные числа должны быть равны для всех возможных выборов дуги l . Мы приходим к системе $S(\rho)$ линейных однородных уравнений с целыми коэффициентами. Второе необходимое (и вместе с допустимостью уже достаточное) условие реализуемости состоит в том, что вектор $\overline{x}$ должен представлять собой решение системы $S(\rho)$. В этом и заключается первое положение теории Хакена:

- (I) *Множество классов эквивалентности нормальных поверхностей в Q параметризуется множеством целых неотрицательных допустимых решений системы $S(\rho)$.*

Назовем целое неотрицательное решение системы $S(\rho)$ *фундаментальным*, если его нельзя представить в виде суммы двух ненулевых целых неотрицательных решений. Из этого определения следует, что любое целое неотрицательное решение системы $S(\rho)$ представимо в виде суммы фундаментальных решений. Второе положение теории Хакена заключается в следующем:

- (II) *Множество фундаментальных решений любой системы линейных однородных уравнений с целыми коэффициентами конечно и может быть построено алгоритмически.*

Несложное чисто алгебраическое доказательство этого факта можно посмотреть в [13], [17], [18]. Поверхности в M , отвечающие допустимым фундаментальным решениям системы $S(\rho)$, называются *фундаментальными*. Фундаментальные поверхности всегда связны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (Q, Γ) – многообразие с узором. Подмножество $X \subset Q$ называется *чистым*, если $X \cap \Gamma = \emptyset$.

Понятие граничной неприводимости трехмерного многообразия непосредственно переносится на случай многообразий с узором: любой чистый собственный диск в

гранично неприводимом многообразии (Q, Γ) должен отсекают чистый шар. Аналогично, собственная поверхность F в (Q, Γ) *гранично несжимаема*, если для любого чистого диска D^2 в Q с условиями: $D^2 \cap (\partial M \cup F) = \partial D^2$ и $l = D^2 \cap F$ является дугой в F , дуга l отсекает от поверхности F чистый диск.

Пусть (Q, Γ) – неприводимое гранично неприводимое многообразие с узором. Третье положение теории Хакена:

- (III) *Любая несжимаемая гранично несжимаемая поверхность в (Q, Γ) , край которой находится в общем положении по отношению к Γ , изотопна нормальной поверхности (при инвариантной на Γ изотопии многообразия Q).*

Справедливость этого положения устанавливается так же, как и в случае многообразий без узора (см. [13], [17], [18]). Сначала мы расправляем поверхность внутри плиток и балок, добиваясь тем самым выполнения условий 1, 2 определения нормальной поверхности. Несжимаемость поверхности и неприводимость многообразия позволяют добиться выполнения условий 3, 4, т.е. устранить замкнутые кривые в пересечении поверхности с секущими дисками балок и превратить в диски пересечения поверхности с шарами. Если край элементарного диска проходит по мосту более одного раза, то с помощью неподвижной на крае изотопии многообразия Q можно уменьшить плиточную степень поверхности, т.е. общее число дисков в ее пересечении со всеми плитками. Многократные проходы края элементарного диска по озеру устраняются с помощью граничной несжимаемости поверхности.

§ 5. Геометрическое суммирование

Пусть $\bar{x}_i$, $1 \leq i \leq m$, – такие допустимые решения, что их сумма $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i$, а тогда и любая линейная комбинация $\bar{x} = \sum_{i=1}^m k_i \bar{x}_i$ с целыми неотрицательными коэффициентами, также допустимы. Решениям $\bar{x}_i$ отвечают нормальные поверхности F_i , $1 \leq i \leq m$. Пусть поверхность F отвечает их линейной комбинации. Как связаны поверхности F_i и F ? Чтобы ответить на этот вопрос, опишем операцию *геометрического суммирования* поверхностей, соответствующую алгебраическому суммированию отвечающих им решений.

Поверхности F_i всегда можно реализовать так, чтобы их элементарные диски не имели общих точек. Пересечения поверхностей с каждой балкой $D^2 \times I$ состоят из лент, изотопных лентам типа $l \times I$, где l – дуга в D^2 . Ленты, лежащие в одной и той же балке, могут пересекаться. Выпрямляя их, добьемся, чтобы они пересекались только по двойным линиям, соединяющим их боковые стороны. При этом каждые две ленты должны пересекаться не более чем по одной двойной линии, см. рис. 4а. Аналогичным образом можно привести в надлежащий вид пересечения поверхностей внутри плиток – можно добиться, чтобы они состояли из двойных дуг с концами на боковых сторонах плиток. Такое расположение поверхностей F_i будем называть *правильным*. Подчеркнем, что пересечение правильно расположенных поверхностей состоит только из двойных линий; тройные точки пересечения отсутствуют.

Заменим теперь каждую поверхность F_i на k_i ее параллельных копий. Разумеется, все получившиеся поверхности будут расположены также правильно. Выполним теперь операцию *продольного расщепления*, которая состоит в разрезании поверхнос-

Рис. 4

тей по всем двойным кривым и в склеивании берегов разрезов так, чтобы получилась нормальная поверхность (см. рис. 4b; детали см. в [13]). Так как расщепление никак не затрагивает элементарных дисков, то полученная поверхность будет эквивалентной поверхности F . Будем говорить, что поверхность F получается *геометрическим суммированием* поверхностей F_i (с коэффициентами).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть нормальная поверхность F получается геометрическим суммированием (с коэффициентами) нормальных поверхностей F_i , $1 \leq i \leq k$. Тогда она содержится в некоторой регулярной окрестности N их объединения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что все параллельные копии каждой поверхности F_i лежат в N . Остается заметить, что операция продольного расщепления совершается внутри нее.

Пусть F – несжимаемая гранично несжимаемая поверхность в (Q, Γ) , край которой находится в общем положении по отношению к Γ . Через $\lambda(\partial F \cap \Gamma)$ будем обозначать число точек в $\partial F \cap \Gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $s(F) = 2\lambda(\partial F \cap \Gamma) - \chi(F)$, где $\chi(F)$ – эйлерова характеристика, называется *сложностью* поверхности Γ .

Полезно обратить внимание на то, что при геометрическом суммировании поверхностей их сложности складываются.

§ 6. Две теоремы конечности

Пусть F – двумерный тор или собственное кольцо в трехмерном многообразии Q . Под *скручиванием* многообразия Q вдоль F мы будем понимать произвольный гомеоморфизм многообразия Q на себя, неподвижный вне некоторой окрестности поверхности F .

ТЕОРЕМА 1. Пусть (Q, Γ) – неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие с узором, и пусть c_0 – некоторое число. Тогда с точностью до инвариантных на узоре Γ изотопий и скручиваний вдоль двумерных торов и чистых колец существует только конечное число несжимаемых гранично несжимаемых связных поверхностей в (Q, Γ) сложности $\leq c_0$. Эти поверхности могут быть построены алгоритмически.

Доказательство. Шаг 1. Выберем правильное разбиение на ручки ρ многообразия (Q, Γ) . Обозначим через $F_1, F_2, \dots, F_n$ фундаментальные поверхности, существующие согласно положению (II) теории нормальных поверхностей. По положению (III) любая несжимаемая гранично несжимаемая поверхность в (Q, Γ) изотопна некоторой нормальной поверхности F . Поверхность F представима в виде линейной комбинации фундаментальных поверхностей. Оставляя только члены с положительными коэффициентами, мы приходим к выражению $F = k_1 F_{i_1} + k_2 F_{i_2} + \dots + k_m F_{i_m}$, где $k_j > 0$ для $1 \leq j \leq m$, а множество $\{i_1, \dots, i_m\}$ является подмножеством множества $\{1, \dots, n\}$; имеется только конечное число таких подмножеств. Пересечение всех поверхностей F_{i_j} состоит только из двойных кривых.

Шаг 2. Рассмотрим двумерный полиэдр $G = \bigcup_{j=1}^m F_{i_j}$. Множество $S(G)$ его особых точек состоит из конечного числа двойных линий. Компоненты связности пространства $G \setminus S(G)$ будем называть *2-компонентами* полиэдра G . Отметим, что каждая 2-компонента α является компактной или некомпактной поверхностью с краем или без, причем ее край должен лежать в ∂Q . Согласно предложению 2 поверхность F содержится в некоторой регулярной окрестности $N(G)$ полиэдра G .

Определим *относительную сложность* $c'(\alpha)$ 2-компоненты $\alpha \subset G$ равенством $c'(\alpha) = 2\lambda(\partial\alpha \cap \Gamma) - \chi(\alpha) + \frac{1}{2}\chi(\partial\alpha)$. Несложный анализ показывает, что $c'(\alpha) < 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- (1) α – открытая 2-клетка;
- (2) $\text{Int } \alpha$ – открытая 2-клетка и $\partial\alpha$ – открытая чистая дуга;
- (3) α является 2-сферой, проективной плоскостью или собственным чистым диском.

Будем теперь упрощать G с помощью описанных ниже преобразований А, В, сохраняя при этом структуру множества его особых точек и условие $F \subset N(G)$.

Преобразование А. Пусть 2-компонента α удовлетворяет условию (1) или условию (2). Обозначим через l кривую $\text{Cl}(\alpha) \setminus \alpha$, по которой α примыкает к оставшейся части полиэдра G . Разрезав полиэдр G по l и вклеив вместо 2-компоненты α две ее параллельные копии, мы получим новый полиэдр G' с меньшим числом двойных линий, см. рис. 5.

Рис. 5

Так как поверхность F несжимаема и гранично несжимаема, то ее можно изотопно сдвинуть в регулярную окрестность полиэдра G' .

Преобразование В. Пусть 2-компонента α удовлетворяет условию (3). Так как α компактна, то она не имеет общих точек с оставшейся частью полиэдра G , т.е. является одной из его компонент связности. Заменим G на более простой полиэдр $G' = G \setminus \alpha$.

Так как поверхность F несжимаема и гранично несжимаема, а многообразие Q неприводимо и гранично неприводимо, то F не имеет общих точек с регулярной окрестностью 2-компоненты α , т.е. содержится в регулярной окрестности полиэдра G' .

Шаг 3. После применения всех возможных преобразований А, В, мы получим двумерный полиэдр (будем по-прежнему обозначать его через G), в регулярной окрестности $N(G)$ которого лежит наша поверхность F , и который не имеет 2-компонент отрицательной сложности. Выберем триангуляцию полиэдра G и рассмотрим отвечающее ей разбиение на ручки ξ окрестности $N(G)$. Обозначим через $N(S(G))$ объединение ручек, отвечающих тем вершинам и ребрам триангуляции, которые лежат в $S(G)$. Замыкание каждой компоненты связности пространства $N(G) \setminus N(S(G))$ расслаивается на отрезки над несколько уменьшенной копией $\hat{\alpha}$ пересекающей ее 2-компоненты α , т.е. имеет вид $\hat{\alpha} \times I$. После приведения поверхности F в нормальное положение по отношению к разбиению ξ ее пересечение с каждым косым произведением $\hat{\alpha} \times I$ состоит из листов типа $\hat{\alpha} \times K$, где $K \subset I$ состоит из одной точки, если 2-компонента α ориентируема (и тогда произведение прямое), и из двух точек, если нет. Так как сложность $s(F)$ поверхности F не превосходит данного числа s_0 и равна сумме относительных сложностей 2-компонент, то число листов, отвечающих 2-компонентам с положительной относительной сложностью, ограничено. Это означает, что по модулю конечного числа возможностей мы знаем точное поведение поверхности F в окрестности объединения 2-компонент с положительной относительной сложностью.

Шаг 4. Относительная сложность 2-компоненты α может быть нулевой только в одном из следующих трех случаев: 1) α – двумерный тор или бутылка Клейна; 2) α – чистое кольцо или чистый лист Мёбиуса, причем граничные окружности могут как принадлежать 2-компоненте α , так и не принадлежать ей; 3) α – чистый полукруглый диск с двумя дугами на крае. Все перечисленные поверхности расслаиваются на окружности или отрезки. Поэтому регулярная окрестность V замыкания объединения таких 2-компонент представляет собой несвязное объединение расслоенных многообразий Зейферта и косых произведений на отрезок. При этом особые слои многообразий Зейферта могут возникнуть только из-за бутылок Клейна и листов Мёбиуса, поэтому все они имеют тип $(2, 1)$. Косые произведения на отрезок представляют собой регулярную окрестность замыкания объединения компонент третьего типа.

Так как поведение поверхности F вне окрестности V известно (с точностью до конечного числа возможностей), то остается оценить поведение поверхности F внутри V . Из нормальности поверхности $F \cap V$ по отношению к разбиению ξ следует, что она состоит из послойных торov и колец в $F \cap V$, которые полностью задаются соответствующими простыми кривыми в базах расслоений. Из теоремы Ликориша [26] вытекает, что число различных простых кривых в поверхности конечно с точностью до скручиваний вдоль простых замкнутых кривых. Остается заметить, что скручиваниям вдоль кривых в базах отвечают скручивания вдоль торov в многообразиях

Зейферта и скручивания вдоль колец в косых произведениях на отрезок.

В заключение отметим, что поверхности, представляющие классы порожденного скручиваниями вдоль торов и чистых колец отношения эквивалентности на множестве всех поверхностей, могут быть построены алгоритмически – достаточно убедиться, что каждый из шагов 1–4 носит алгоритмический характер.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (Q, Γ) – неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие с узором. Тогда найдется такое число $n(Q, \Gamma)$, что любое семейство попарно не пересекающихся и не параллельных, несжимаемых и гранично несжимаемых чистых колец в (Q, Γ) содержит не более $\leq n(Q, \Gamma)$ колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через F объединение колец семейства. Сложность поверхности F равна нулю. Выполняя шаги 1–4 доказательства теоремы 1, убедимся, что F изотопно сдвигается в объединение многообразий Зейферта и косых произведений поверхности на отрезок. Так как послойные кольца в многообразиях Зейферта и косых произведениях поверхности на отрезок отвечают простым кривым в базах, верхняя оценка числа колец в F находится без труда.

§ 7. Две переформулировки трудной части основной теоремы и условное доказательство одной из них

ТЕОРЕМА 3. Существует алгоритм, который каждому многообразию Хакена M сопоставляет конечный набор $\mathcal{P}(M)$ его простых скелетов так, что этот набор является характеристическим в следующем смысле: два многообразия Хакена гомеоморфны тогда и только тогда, когда отвечающие им наборы состоят из одного и того же числа попарно гомеоморфных полиэдров.

Допуская некоторую вольность языка, заключение теоремы можно сформулировать так: $M_1 = M_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}(M_1) = \mathcal{P}(M_2)$. Заметим, что часть $\Leftarrow$ заключения прямо следует из предложения 1: если M_1 и M_2 имеют хотя бы одну пару гомеоморфных простых скелетов, то многообразия гомеоморфны.

Доказательство эквивалентности теоремы 3 второй части основной теоремы (существованию алгоритма распознавания) затруднений не вызывает. Так как задача алгоритмического распознавания гомеоморфности двумерных полиэдров заведомо разрешима, то из справедливости теоремы 3 следует справедливость второго утверждения основной теоремы. С другой стороны, если основная теорема верна, то характеристический набор простых скелетов данного многообразия Хакена M можно построить так. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ нужно по очереди перебирать все специальные полиэдры с k вершинами (таких полиэдров конечное число, см. [27], [28]) и каждый следующий полиэдр P подвергать следующим проверкам:

- 1) Утолщается ли P до некоторого трехмерного многообразия $M(P)$?
- 2) Является ли многообразие $\widehat{M}(P)$, полученное из многообразия $M(P)$ заклеиванием шарами всех сфер на его крае, многообразием Хакена?
- 3) Гомеоморфно ли многообразие $\widehat{M}(P)$ данному многообразию M ?

Первая проверка затруднений не вызывает, так как утолщение данного специального полиэдра до трехмерного многообразия, если оно существует, строится эффективно (см. [23]). При выполнении двух оставшихся проверок мы используем предположение о справедливости основной теоремы.

Отбирая полиэдры, выдержавшие все проверки, мы получим последовательность $\mathcal{P}_1(M), \mathcal{P}_2(M), \dots$ конечных наборов простых скелетов многообразия M , где каждый набор $\mathcal{P}_k(M)$ состоит из простых скелетов с k вершинами. По построению первый непустой набор является характеристическим.

ТЕОРЕМА 4. *Существует алгоритм, который каждому многообразию Хакена M сопоставляет его триангуляцию $T(M)$ так, что эта триангуляция является канонической в следующем смысле: два многообразия Хакена гомеоморфны тогда и только тогда, когда отвечающие им триангуляции комбинаторно эквивалентны.*

По-видимому, это – наиболее четкая переформулировка трудной части основной теоремы. Выяснение комбинаторной эквивалентности симплициальных комплексов не вызывает затруднений. С другой стороны, если основная теорема верна, то каноническую триангуляцию можно построить так: нужно по очереди перебирать все трехмерные симплициальные комплексы в каком-нибудь фиксированном порядке, сравнивая тело каждого следующего комплекса с данным многообразием. Первый комплекс, тело которого гомеоморфно многообразию, можно взять в качестве его канонической триангуляции.

Ниже мы опишем несколько преобразований допустимых подполиэдров, которые называются *наращиваниями*. Пусть P – допустимый подполиэдр многообразия Хакена M . Каждое наращивание преобразует P в больший допустимый подполиэдр. Должны выполняться следующие свойства:

- С1. число всевозможных наращиваний должно быть конечным (с точностью до гомеоморфизмов пары (M, P) на себя);
- С2. нужно, чтобы все наращивания можно было построить алгоритмически;
- С3. любая последовательность $P_0, P_1, P_2, \dots$, где каждый следующий полиэдр P_{i+1} получается наращиванием полиэдра P_i , должна быть конечной;
- С4. если P не допускает наращиваний, то он обязан быть простым скелетом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 (в предположении, что наращивания уже описаны). Пусть M – данное многообразие Хакена. Обозначим через P_0 его край (или пустое множество, если M замкнуто). Будем постепенно наращивать P_0 , применяя на каждом шаге все возможные наращивания. Свойства С3, С2 гарантируют, что этот ветвящийся процесс заведомо остановится и что он алгоритмичен. Свойства С1, С4 обеспечивают, что получится конечное множество $\mathcal{P}(M)$ простых скелетов.

Чтобы доказать характеристичность множества $\mathcal{P}(M)$, рассмотрим два многообразия Хакена M_1, M_2 . Так как на каждом шаге мы применяем все (с точностью до гомеоморфизмов) наращивания, то результат нашего ветвящегося процесса не зависит от конкретного представления многообразия. Это означает, что в случае гомеоморфности многообразий M_1, M_2 множества $\mathcal{P}(M_1)$ и $\mathcal{P}(M_2)$ должны состоять фактически из одинаковых полиэдров. С другой стороны, если $\mathcal{P}(M_1)$ и $\mathcal{P}(M_2)$ содержат хотя

бы одну пару гомеоморфных полиэдров, то по предложению 1 многообразия должны быть гомеоморфными.

Оставшаяся часть статьи посвящена описанию наращиваний и доказательству их свойств.

§ 8. Простые наращивания

8.1. Вставка продольного кольца. Пусть P – допустимый подполиэдр многообразия M , и пусть Q – 3-компонента пары (M, P) . Напомним, что Q является компактным многообразием, причем $Q \cap P = \partial Q$. Снабдим Q узором $\Gamma \subset \partial Q$, полагая $\Gamma = SP \cap \partial Q$. Из определения допустимого подполиэдра следует, что многообразие (Q, Γ) гранично неприводимо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Несжимаемое гранично несжимаемое чистое кольцо $A \subset Q$ называется *продольным*, если любое другое несжимаемое гранично несжимаемое чистое кольцо $A_1 \subset Q$ можно изотопно (при неподвижном Γ) сместить так, чтобы края колец A и A_1 не пересекались. В противном случае кольцо A называется *поперечным*.

Отметим, что если кольцо A продольно, то с помощью хорошо известной техники устранения пересечений любое другое несжимаемое гранично несжимаемое чистое кольцо A_1 можно изотопно сместить так, чтобы пересечение $A \cap A_1$ было либо пустым, либо состояло из нескольких параллельных копий средних окружностей колец. Если кольцо A поперечно, то найдется такое *двойственное* ему кольцо A_1 , что $\partial A \cap \partial A'_1 \neq \emptyset$ для любого изотопного кольцу A_1 кольца A'_1 . В этом случае можно добиться, чтобы пересечение $A \cap A_1$ состояло из радиальных отрезков, соединяющих различные компоненты края каждого кольца.

Узнать, является данное кольцо A продольным или поперечным, можно с помощью той же теории нормальных поверхностей Хакена, примененной к разрезанному по кольцу A многообразию Q . Если в разрезанном многообразии найдутся два чистых диска, примыкающих к A с разных сторон по двум радиальным отрезкам каждый, то кольцо поперечно, в противном случае – нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Несжимаемое гранично несжимаемое чистое кольцо $A \subset Q$ называется *тривиальным*, если оно параллельно $\text{rel } \partial A$ такому кольцу $A' \subset \partial Q$, что $A' \cap \Gamma$ состоит из нескольких параллельных копий средней окружности кольца A' .

Преобразование наращивания E_1 . Допустим, что (Q, Γ) содержит нетривиальное продольное кольцо A . Добавим к P кольцо A или две его параллельные копии, в зависимости от того, разбивает оно многообразие Q или нет.

8.2. Добавление минимального нетривиального диска. Хотя (Q, Γ) неприводимо и гранично неприводимо как многообразие с узором на крае, оно может оказаться гранично приводимым как многообразие без узора. Предположим, что:

- (1) (Q, Γ) не содержит ни нетривиальных продольных, ни поперечных колец;
- (2) (Q, Γ) не является полноторием с чистой параллелью на крае;
- (3) Q содержит нетривиальный собственный диск.

Среди всех нетривиальных собственных дисков выберем диск D^2 наименьшей сложности.

Преобразование наращивания E_2 . Добавим к P диск D^2 или две его параллельные копии, в зависимости от того, разбивает он многообразие Q или нет.

8.3. Добавление минимальной несжимаемой гранично несжимаемой поверхности. Допустим, что:

- (1) (Q, Γ) не содержит ни нетривиальных продольных, ни поперечных колец;
- (2) Q гранично неприводимо (как многообразие без узора);
- (3) Q содержит несжимаемую гранично несжимаемую собственную поверхность, не параллельную краю. В случае $\partial Q \neq \emptyset$ дополнительно предположим, что край поверхности не пуст.

Среди всех поверхностей, удовлетворяющих свойству (3), выберем поверхность F наименьшей сложности.

Преобразование наращивания E_3 . Добавим к P поверхность F или две ее параллельные копии, в зависимости от того, разбивает она многообразие Q или нет.

Наращивания E_1 – E_3 называются *простыми*, поскольку каждое из них реализуется добавлением всего одной поверхности (или двух ее параллельных копий), что вполне соответствует описанному в §3 общему способу построения допустимых подполиэдров.

8.4. Свойства простых преобразований наращивания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Преобразования E_1 – E_3 обладают свойствами С1–С3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость свойств С1, С2 для наращиваний E_2, E_3 следует из теоремы 1, так как скручивания вдоль двумерных торов и тривиальных колец, как и конечные гомеоморфизмы изотопий пары (Q, Γ) , продолжаются до гомеоморфизмов пары (M, P) . Заметим, что скручивания вдоль произвольных колец переводят каждое продольное кольцо в изотопное. Поэтому наращивание E_1 также обладает свойствами С1, С2.

Для доказательства свойства С3 нам понадобится модификация сложности разбиений трехмерных многообразий на ручки, введенной Ф. Вальдхаузенем [2]. Пусть ξ – разбиение на ручки многообразия M . Припишем каждой балке B разбиения ξ ее валентность $\delta(B)$ (число примыкающих к ней плиток). Сопоставим теперь разбиению ξ пару неотрицательных целых чисел $w(\xi) = (\chi, \eta)$, где $\chi = \sum \max(\delta(B) - 2, 0)$, $\eta = \sum \max(\delta(B) - 1, 0)$, а суммирование ведется по всем балкам разбиения. Определим *сложность* $w(M)$ многообразия M формулой $w(M) = \min w(\xi)$, где тройки чисел рассматриваются с лексикографическим порядком, а минимум берется по всем разбиениям многообразия M на ручки. Мы опустили здесь третью компоненту оригинальной сложности Вальдхаузена, так как для наших целей она не нужна.

Чтобы доказать свойство С3, рассмотрим последовательность $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots$ простых наращиваний, $i_k = 1, 2, 3$ для всех k . Каждое следующее наращивание применяется к допустимому подполиэдру, появившемуся на предыдущем шаге. Рассмотрим объединение $U(M, P)$ всех 3-компонент пары (M, P) как несвязное объединение многообразий без узоров. Если $P \neq \emptyset$, то наращивание E_3 строго уменьшает сложность $w(U(M, P))$ (см. [2]), тогда как наращивания E_1, E_2 ее не увеличивают. Поэтому наша последовательность содержит только конечное число наращиваний E_3 .

Рассмотрим подпоследовательность, начинающуюся сразу за последним наращиванием E_3 . Она состоит из наращиваний E_1, E_2 . Пусть Q – 3-компонента пары (M, P) , рассматриваемая как многообразие с узором Γ . Из теоремы 2 следует, что максимальное возможное число $m(Q, \Gamma)$ попарно не пересекающихся и не параллельных, несжимаемых и гранично несжимаемых чистых колец в (Q, Γ) конечно. Пусть $s(M, P) = \sum m(Q, \Gamma)$, где суммирование ведется по всем 3-компонентам пары (M, P) . Легко видеть, что каждое наращивание E_1 строго уменьшает число $s(M, P)$, а наращивание E_2 его не увеличивает. Отсюда следует, что наша последовательность содержит только конечное число наращиваний E_1 .

Наконец, рассмотрим подпоследовательность, начинающуюся сразу за последним наращиванием E_1 . Она состоит только из наращиваний E_2 и конечна, поскольку разложения трехмерного многообразия в граничную связную сумму гранично неприводимых многообразий и полных торов имеют ограниченную длину.

§ 9. Структура 3-компонент, не допускающих простых наращиваний

В этом параграфе мы докажем, что если 3-компонента не допускает простых наращиваний, то она является либо шаром, либо полноторием, либо косым произведением поверхности на отрезок.

Пусть (Q, Γ) – неприводимое гранично неприводимое многообразие с узором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Чистое трехмерное подмногообразие $V \subset Q$ называется *вертикальным*, если его можно представить в виде $F \tilde{\times} I$ так, что $V \cap \partial Q = F \tilde{\times} \{0, 1\}$.

Край вертикального подмногообразия $V = F \tilde{\times} I$ удобно представить в виде объединения его *свободной части* $\partial_f V = F \tilde{\times} \{0, 1\}$ и *боковой поверхности* $\partial_l V = \partial F \tilde{\times} I$. Боковая поверхность состоит из колец. Число этих колец обозначим $\lambda(\partial_l V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вертикальное подмногообразие $V \subset Q$ называется *полным*, если его боковая поверхность $\partial_l V$ состоит из несжимаемых, попарно не пересекающихся и не параллельных колец (напомним, что два кольца $A_0, A_1 \subset Q$ называются *параллельными*, если имеется такое чистое подмногообразие $(A_0 \times I, \partial A_0 \times I) \subset (Q, \partial Q)$, что $A_0 \times \{0\} = A_0$ и $A_0 \times \{1\} = A_1$).

Нетрудно показать, что если база F вертикального подмногообразия $V \subset Q$ не является диском или кольцом, то V можно расширить до полного вертикального подмногообразия $\bar{V} \subset Q$, добавляя к нему все те чистые компоненты дополнения $Q \setminus V$, которые отсекаются от Q либо сжимаемым кольцом, либо парой параллельных колец в $\partial_l V$. Другими словами, мы добавляем к V все чистые вертикальные компоненты дополнения, послойно гомеоморфные $D^2 \times I$ или $S^1 \times I \times I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть вертикальное подмногообразие $V_1 \subset Q$ содержит поперечное в Q кольцо $A \subset \partial_l V_1$. Тогда найдется такое полное вертикальное подмногообразие $V_2 \subset Q$, что $V_1 \subset V_2$ и либо некоторое кольцо в $\partial_l V_2$ не параллельно никакому кольцу в V_1 , либо $\lambda(\partial_l V_2) < \lambda(\partial_l V_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A' кольцо, двойственное данному кольцу A . Путем устранения лишних пересечений можно добиться, чтобы оно пересекало кольца

в $\partial_l V_1$ по радиальным отрезкам. Тогда некоторая регулярная окрестность V объединения $V_1 \cup A'$ в Q также является вертикальным подмногообразием. Расширим его до полного вертикального подмногообразия $V_2 = \bar{V} \supset V_1$.

Допустим, что все кольца в $\partial_l V_2$ параллельны кольцам, лежащим внутри многообразия V_1 . Тогда каждое кольцо A_1 в $\partial_l V_2$ параллельно какому-нибудь кольцу в $\partial_l V_1$. Так как различные кольца в $\partial_l V_2$ не параллельны между собой, то отвечающие им кольца в $\partial_l V_1$ также различны. Отсюда следует, что $\lambda(\partial_l V_2) \leq \lambda(\partial_l V_1)$. Равенство $\lambda(\partial_l V_2) = \lambda(\partial_l V_1)$ невозможно, так как в противном случае параллельность колец в $\partial_l V_2$ кольцам в $\partial_l V_1$ обеспечила бы существование изотопного сдвига многообразия V_2 внутрь многообразия V_1 . Это противоречит предположению, что кольцо $A' \subset V_2$ двойственно кольцу $A \subset \partial_l V_1$ и, следовательно, не может быть сдвинуто с кольца A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть P – допустимый подполиэдр многообразия Хакена M , и пусть Q – снабженная узором $\Gamma = SP \cap \partial Q$ 3-компонента пары (M, P) . Если (Q, Γ) не допускает простых наращиваний, то выполняется одна из следующих возможностей:

- (1) Q – шар;
- (2) Q – полноторие с чистой параллелью на крае;
- (3) Q – косое произведение $F^1 \tilde{\times} I$ некоторой поверхности $F \neq D^2$, $S^1 \times I$, $S^1 \tilde{\times} I$ на отрезок, а Γ состоит из нетривиальных окружностей в $\partial F \tilde{\times} I$, причем каждое кольцо в $\partial F \tilde{\times} I$ содержит хотя бы одну такую окружность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (Q, Γ) не допускает наращиваний E_1 , то все продольные кольца в Q тривиальны.

Шаг 1. Q не содержит поперечных колец и гранично неприводимо как многообразие без узора. Если бы край ∂Q многообразия Q был отличен от пустого множества и сферы, то согласно Вальдхаузену [2] многообразие Q содержало бы несжимаемую гранично несжимаемую собственную поверхность F с непустым краем, и мы бы смогли применить наращивание E_3 . Если бы многообразие Q было замкнутым, то оно совпадало бы с исходным многообразием M , и мы бы также смогли применить наращивание E_3 (только в этом месте мы используем предположение, что исходное многообразие M достаточно велико). Поэтому $\partial Q = S^2$ и из-за неприводимости многообразия Q оно гомеоморфно шару.

Шаг 2. Q не содержит поперечных колец и гранично приводимо как многообразие без узора. Так как Q не допускает наращивания E_2 , то Q – полноторие с чистой параллелью.

Шаг 3. Q содержит поперечное кольцо A . Тогда регулярная окрестность V_1 кольца A является вертикальным подмногообразием. Будем применять к нему и к каждому следующему полному вертикальному подмногообразию предложение 4 до тех пор, пока это возможно. Мы получим последовательность $V_1 \subset V_2 \subset \dots$ вертикальных подмногообразий. Каждый раз либо уменьшается число колец в $\partial_l V_i$, либо в $\lambda(\partial_l V_{i+1})$ появляется новое кольцо, не параллельное никакому кольцу в V_i . По теореме 2 общее число таких колец ограничено. Поэтому последовательность $V_1 \subset V_2 \subset \dots$ имеет конечную длину.

Рассмотрим последнее вертикальное подмногообразие V_k . Так как оно – последнее, то все кольца в $\partial_l V_k$, рассматриваемые как кольца в (Q, Γ) , тривиальны. Поэтому многообразия V_k и Q гомеоморфны и Q имеет вид $Q = F \times I$, причем $\text{Int}(F \times \partial I) \cap \Gamma = \emptyset$. Более того, Γ состоит из нетривиальных окружностей в $\partial F \times I$, каждое кольцо в $\partial F \times I$ содержит хотя бы одну окружность (в противном случае многообразие (Q, Γ) было бы гранично приводимым) и $F \neq D^2$, $S^1 \times I$, $S^1 \times I$ (в противном случае в Q не было бы поперечных колец). Шаги 1–3 исчерпывают все логически допустимые возможности.

§ 10. Специальные наращивания

10.1. Вертикальные скелеты расслоенных подмногообразий. Пусть F – компактная поверхность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Одномерный подполиэдр $G \subset F$ называется *простым скелетом* поверхности F , если выполнены следующие условия:

- 1) $G \supset \partial F$;
- 2) линк каждой точки полиэдра G состоит из двух или трех точек;
- 3) замыкание каждой компоненты связности пространства $F \setminus G$ является диском.

Пусть $Q = F \times I$ – косое произведение поверхности на отрезок с узором $\Gamma = \partial F \times K$, где $K \subset I$ – конечное подмножество, содержащее ∂I .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Простой скелет P_Q многообразия Q называется *вертикальным*, если найдется такой простой скелет G поверхности F , что $P_Q = (G \times I) \cup (F \times \partial I)$.

Пусть допустимый подполиэдр P многообразия Хакена M не допускает простых наращиваний. Согласно предложению 5 множество 3-компонент пары (M, P) состоит из шаров, полных торов и косых произведений поверхности на отрезок. Мы собираемся нарастить P путем вставки в косые произведения их вертикальных скелетов. Разумеется, при этом нужно следить, как косые произведения примыкают друг к другу.

Представим край ∂Q каждого косого произведения $Q = F \times I$ в (M, P) в виде объединения его *свободной части* $\partial_f Q = F \times \partial I$ и *боковой поверхности* $\partial_l Q = \partial F \times I$. Боковая поверхность разбивается узором на кольца, внутренность свободной части чиста. Можно считать, что боковые поверхности различных косых произведений не имеют общих внутренних точек; если не так, то можно вставить дополнительные тривиальные кольца и разделить косые произведения.

Обозначим через U объединение всех являющихся косыми произведениями на отрезок 3-компонент пары (M, P) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связная компонента Z многообразия U называется *расслоенным подмногообразием пары* (M, P) , если выполнено одно из следующих условий:

1. $Z = F \times I$, где F – ориентируемая поверхность и $F \times \partial I \subset \partial M$;
2. $Z = F \times I$, где F – неориентируемая поверхность и $F \times \partial I \subset \partial M$;
3. Z является *многообразием Столлинга* (т.е. косым произведением $F \times S^1$ окружности на поверхность);

4. Z является квазимногообразием Столлингса (т.е. имеет вид $Z = (F \times I) / \sim$, где отношение эквивалентности $\sim$ порождено равенствами $(x, 0) = (\alpha x, 0)$, $(x, 1) = (\beta x, 1)$, а α, β — обращающие ориентацию свободные инволюции поверхности F).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Каждая компонента связности многообразия U является расслоенным подмногообразием пары (M, P) .

Доказательство очевидно, так как только косые произведения поверхности на отрезок, многообразия Столлингса и квазимногообразия Столлингса могут быть составлены из расслоенных на отрезки 3-компонент пары (M, P) отождествлением свободных частей их краев, см. рис. 6.

Рис. 6

Пусть Z — расслоенное подмногообразие, составленное из расслоенных на отрезки 3-компонент $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}$ пары (M, P) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Простой скелет P_Z многообразия Z называется *вертикальным*, если для всех i , $0 \leq i < n$, полиэдр $P_Z \cap Q_i$ является вертикальным скелетом многообразия Q_i .

Степень сложности вертикального скелета P_Z удобно измерять общим числом его вершин.

Преобразование наращивания E_4 . Пусть P_Z — минимальный вертикальный скелет расслоенного подмногообразия Z пары (M, P) . Заменяем скелет P на скелет $P \cup P_Z$.

10.2. Подразделение расслоенных подмногообразий. В этом пункте мы докажем, что наращивание E_4 обладает свойствами C1, C2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Любое расслоенное подмногообразие Z пары (M, P) имеет только конечное число минимальных вертикальных скелетов, с точностью до гомеоморфизмов пары (M, P) . Все они могут быть построены алгоритмически.

Доказательство. Легкий случай: косые произведения на отрезок. Пусть Z является прямым произведением на отрезок, т.е. имеет вид $Z = F \times I$. Удобно считать, что многообразие Z составлено из 3-компонент $Q_i = F \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, $0 \leq i < n$. Какой-нибудь (не обязательно минимальный) вертикальный скелет многообразия Z

построить нетрудно. Число его вершин оценивает сверху число вершин любого минимального вертикального скелета. Рассмотрим вертикальные скелеты $(G_i \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \cup (F \times \{\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\})$ многообразий Q_i , $0 \leq i < n$, из которых составлен минимальный скелет P_Z многообразия Z . Каждая тройная вершина v графа G_i дает две вершины $(v, \frac{i}{n}), (v, \frac{i+1}{n})$ скелета P_Z , и каждая точка в пересечении $(G_i \times \{\frac{i+1}{n}\}) \cap (G_{i+1} \times \{\frac{i+1}{n}\})$, $0 \leq i < n-1$, также служит вершиной скелета P_Z . Поэтому мы знаем верхнюю оценку числа тройных вершин каждого графа G_i , как и верхнюю оценку числа точек в пересечении $(G_i \times \{\frac{i+1}{n}\}) \cap (G_{i+1} \times \{\frac{i+1}{n}\})$, $0 \leq i < n-1$.

Следующие утверждения очевидны:

1. Поверхность $F \times \{0\}$ имеет только конечное число простых скелетов (с точностью до ее гомеоморфизмов на себя).
2. Каждый гомеоморфизм поверхности $F \times \{0\}$ можно продолжить до гомеоморфизма пары (M, P) . Поэтому скелет G_0 можно выбирать из конечного семейства алгоритмически конструируемых кандидатов.
3. Если простой скелет $G_i \times \{\frac{i+1}{n}\}$ поверхности $F \times \{\frac{i+1}{n}\}$ задан, то имеется только конечное число простых скелетов $G_{i+1} \times \{\frac{i+1}{n}\} \subset F \times \{\frac{i+1}{n}\}$ с данным числом вершин и данным числом точек в пересечении $(G_i \times \{\frac{i+1}{n}\}) \cap (G_{i+1} \times \{\frac{i+1}{n}\})$ (с точностью до изотопии).

Используя эти утверждения, нетрудно построить конечное множество простых скелетов, которое содержит (с точностью до гомеоморфизма) все минимальные вертикальные скелеты. Остается только их отобрать. Это завершает рассмотрение случая прямого произведения поверхности на отрезок.

Доказательство для случая косого произведения $Z = F \tilde{\times} I$ неориентируемой поверхности на отрезок аналогично. Единственное отличие состоит в том, что нужно начать с простого скелета G_0 неориентируемой поверхности $F \tilde{\times} \{*\} \subset F \tilde{\times} I$.

Трудный случай: многообразия Столлинга. Пусть Z – расслоенное многообразие Столлинга $S^1 \tilde{\times} F$, составленное из 3-компонент $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}$ пары (M, P) . Можно считать, что каждое многообразие Q_i отождествлено с прямым произведением $F \times I$, причем поверхность $F \times \{1\} \subset Q_i$ совпадает с поверхностью $F \times \{0\} \subset Q_{i+1}$ (индексы берутся по модулю n). Обозначим через R_Z подполиэдр $\bigcup_{i=0}^{n-1} \partial Q_i \subset Z$. Он состоит из набора торов $T = \partial Z$ и набора поверхностей $F_i = Q_{i-1} \cap Q_i$, $0 \leq i < n$, которые можно рассматривать как слои расслоения $Z \rightarrow S^1$.

Как и выше, нетрудно найти верхнюю оценку c_0 числа вершин минимального вертикального скелета многообразия Z . Можно попробовать построить минимальные вертикальные скелеты тем же способом, что и в легком случае: выбрать простой скелет G_0 поверхности F_0 с $\leq c_0$ вершинами, вставить полиэдр $G_0 \times I$ в многообразие Q_0 , выбрать простой скелет $G_1 \subset F_1$ с $\leq c_0$ вершинами и $\leq c_0$ точками в пересечении $G_1 \cap (G_0 \times \{1\})$, и т. д. Но эта попытка не проходит в самом начале, так как далеко не каждый гомеоморфизм $F_0 \rightarrow F_0$ продолжается до гомеоморфизма многообразия Z и до гомеоморфизма пары (M, P) . Поэтому нужно рассматривать бесконечно много различных скелетов G_0 , что не оставляет никакой надежды получить алгоритмическую процедуру. Тем не менее, эта идея приводит к нужному результату, если на время забыть о трехмерных многообразиях и сконцентрировать внимание на вертикальных скелетах как на абстрактных двумерных полиэдрах.

Пусть W – абстрактный специальный полиэдр, содержащий гомеоморфную копию $R'_Z = T' \cup (\bigcup_{i=0}^{n-1} F'_i)$ полиэдра $R_Z = T \cup (\bigcup_{i=0}^{n-1} F_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полиэдр W называется *заготовкой* для многообразия Z , если:

- 1) разность $W \setminus R'_Z$ состоит из n компонент связности $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$;
- 2) для каждого i , $0 \leq i < n$, замыкание $\text{Cl}(X_i)$ имеет вид $\text{Cl}(X_i) = G'_i \times I$, где графы $G'_i \times \{0\}$ и $G'_i \times \{1\}$ служат простыми скелетами поверхностей F'_i и F'_{i+1} , соответственно;
- 3) для любой окружности $C \subset G_i$, $0 \leq i < n$, окружность $C \times \{0\}$ ограничивает диск в дополнении графа $G'_i \times \{0\} \subset F'_i$ тогда и только тогда, когда окружность $C \times \{1\}$ ограничивает диск в дополнении графа $G'_i \times \{1\} \subset F'_{i+1}$;
- 4) число вершин полиэдра W не превосходит числа c_0 .

Так как каждая заготовка является специальным полиэдром, то число различных заготовок для многообразия Z конечно, причем все они могут быть построены алгоритмически (см. [27], [28]). Отметим, что каждая заготовка W является вертикальным скелетом однозначно восстанавливаемого по нему многообразия Столлинга $Z'_W \supset W$.

Нам понадобятся два следствия знаменитой теоремы Г. Хемияна об алгоритмической разрешимости проблемы сопряженности в группе гомеотопий поверхности (факторгруппе группы гомеоморфизмов по нормальной подгруппе гомеоморфизмов, изотопных тождеству). Доказательство этой теоремы стало решающим шагом в реализации программы Хакена алгоритмической классификации достаточно больших многообразий, см. [6].

- (I) *Существует алгоритм распознавания послойной гомеоморфности расслоенных многообразий Столлинга.*
- (II) *Пусть послойный гомеоморфизм $h: S^1 \tilde{\times} F \rightarrow S^1 \tilde{\times} F$ сохраняет ориентации многообразий и слоев. Если он переводит каждый тор на краю в себя, то ограничение гомеоморфизма на край изотопно тождеству.*

Теперь мы можем использовать следствие (I) для распознавания послойной гомеоморфности многообразий Z'_W и Z . Если они гомеоморфны, то любой послойный гомеоморфизм $\varphi: Z'_W \rightarrow Z$ может быть использован для вставки заготовки W внутрь многообразия Z , т.е. для получения вертикального скелета $\varphi(W) \subset Z$ с $\leq c_0$ вершинами. Из следствия (II) вытекает, что такую вставку можно выполнить только конечным числом способов (с точностью до гомеоморфизмов пары (M, P)). Перебирая все заготовки для многообразия Z и вставляя их (если это возможно) в Z , мы построим конечный набор всех (с точностью до гомеоморфизмов) вертикальных скелетов многообразия Z с $\leq c_0$ вершинами. Остается выбрать среди них минимальные.

Более трудный случай: квазимногообразия Столлинга. Этот случай аналогичен предыдущему. Единственный новый момент состоит в том, что нужно уметь положительно решать следующую проблему:

Существует ли алгоритм распознавания послойной гомеоморфности расслоенных квазимногообразий Столлинга?

Обозначим через $(F \times I)/(\alpha, \beta)$ квазимногообразие Столлинга, полученное из прямого произведения $F \times I$ отождествлением точек $(x, 0)$ с $(\alpha x, 0)$ и $(x, 1)$

с $(\beta x, 1)$, где $\alpha, \beta: F \rightarrow F$ — обращающие ориентацию свободные инволюции. Через $(F \times I)/f$ будем обозначать многообразие Столлинга с гомеоморфизмом монодромии $f: F \rightarrow F$. Оно получается из прямого произведения $F \times I$ отождествлением точек $(x, 0)$ с $(f(x), 1)$ для всех $x \in F$. Имеется каноническое двулистное накрытие $(F \times I)/\alpha\beta \rightarrow (F \times I)/(\alpha, \beta)$. Каждый послойный гомеоморфизм $(F \times I)/(\alpha, \beta) \rightarrow (F \times I)/(\alpha', \beta')$ квазимногообразий Столлинга поднимается до эквивариантного послойного гомеоморфизма $(F \times I)/\alpha\beta \rightarrow (F \times I)/\alpha'\beta'$ соответствующих многообразий Столлинга. Поэтому проблема распознавания гомеоморфности квазимногообразий Столлинга $(F \times I)/(\alpha, \beta)$, $(F \times I)/(\alpha', \beta')$ эквивалентна проблеме распознавания эквивариантной послойной гомеоморфности многообразий Столлинга $(F \times I)/\alpha\beta$, $(F \times I)/\alpha'\beta'$. Вопрос о послойной гомеоморфности двух многообразий Столлинга можно выяснить с помощью теоремы Хемiona (см. следствие (I)). Остается исследовать вопрос о деформируемости в эквивариантный гомеоморфизм данного послойного гомеоморфизма $\Psi: (F \times I)/\alpha\beta \rightarrow (F \times I)/\alpha'\beta'$. Заметим, что ограничение $\psi = \Psi|_{F \times \{0\}}$ определено с точностью до домножения на степень отображения монодромии $\alpha\beta$. Поэтому приведенный выше вопрос можно переформулировать так: существует ли такое целое число n , что гомеоморфизм $\psi(\alpha\beta)^n: F \times \{0\} \rightarrow F \times \{0\}$ коммутирует (с точностью до изотопии) с гомеоморфизмами α, α' ? Другими словами, нас интересует существование такого целого числа n , что гомеоморфизм $\alpha'\psi(\alpha\beta)^n$ изотопен гомеоморфизму $\psi(\alpha\beta)^n\alpha$ или, что то же самое, гомеоморфизм $(\alpha\beta)^{2n}$ изотопен гомеоморфизму $\psi^{-1}\alpha'\psi\alpha$. Здесь стоит отметить, что ввиду послойности гомеоморфизма Ψ из изотопности гомеоморфизмов $\alpha'\psi(\alpha\beta)^n$ и $\psi(\alpha\beta)^n\alpha$ следует изотопность гомеоморфизмов $\beta'\psi(\alpha\beta)^n$ и $\psi(\alpha\beta)^n\beta$. Возникает следующая проблема:

Существует ли алгоритм, который по двум поданным на его вход элементам группы гомеотопий поверхности выясняет, является ли один из них целой степенью другого?

Приведенных выше результатов Хемiona явно не достаточно для ее решения. Однако, положительное решение легко извлекается из теории Торстона гомеоморфизмов поверхностей (см. [9], [10]). Это завершает доказательство предложения 7.

10.3. Подразделение полных торов. Пусть P — допустимый подполиэдр многообразия Хакена M , не допускающий наращиваний E_1 – E_4 . Тогда каждая 3-компонента пары (M, P) является либо шаром, либо полноторием с чистой параллелью на крае. Край каждого шара разбит узором на 2-клетки, край каждого полнотория состоит из клеток и непустого множества колец. Можно считать, что полнотория не имеют общих 2-клеток; в противном случае нужно вставить параллельные копии этих клеток и разделить полнотория. Поэтому можно предполагать, что пересечение любых двух полноторий состоит из содержащих чистые параллели колец.

Обозначим через U объединение всех гомеоморфных полному тору 3-компонент пары (M, P) . Каждый полный тор обладает такой структурой прямого произведения $D^2 \times S^1$, что чистые параллели на его крае изотопны слоям. Отсюда следует, что U расслаивается на окружности над некоторой поверхностью так, что пересечение $U \cap P$ является *насыщенным* множеством, т.е. состоит из слоев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность $C \subset U$ называется *сечением* расслоенного многообразия U , если она пересекает каждый слой ровно в одной точке.

Каждое расслоенное на окружности многообразие имеет сечение, гомеоморфное базисной поверхности. Мы будем рассматривать сечения общего положения, которые не проходят через вершины полиэдра $P \cap Q$ и пересекают его тройные ребра трансверсально. Будем измерять сложность сечения C числом точек в $\partial C \cap SP$. Было бы весьма естественным попытаться разбить полнотория на шары путем вставки минимального сечения C в многообразие Q , но этому мешают две проблемы:

- 1) C не разбивает полноторий;
- 2) $P \cup C$ не является простым полиэдром.

Чтобы обойти эти проблемы, слегка возмутим минимальное сечение C , заменив меридиональный диск $C \cap H$ каждого полнотория $H \subset U$ на пару близких параллельных дисков так, чтобы все новые диски вместе со стенками $U \cap P$ полноторий составляли простой скелет многообразия U , см. рис. 7. Объединение P_C всех новых дисков будем называть *возмущенным сечением*.

Рис. 7

Преобразование наращивания E_5 . Пусть C – минимальное сечение многообразия U и P_C – его возмущение. Заменим скелет P на скелет $P \cup P_C$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть U – объединение гомеоморфных полноторию 3-компонент пары (M, P) , где подполиэдр $P \subset M$ не допускает наращиваний E_1 – E_4 . Тогда с точностью до гомеоморфизмов пары (M, P) имеется только конечное число возмущенных минимальных сечений многообразия U . Все они могут быть построены алгоритмически.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим U как многообразие с узором $\Gamma = \partial U \cap SP$ на крае. Из теоремы 1 следует, что U имеет только конечное число минимальных сечений (с точностью до инвариантных на Γ изотопий и скручиваний вдоль торов и чистых колец), и все они могут быть построены алгоритмически. Все несжимаемые торы и чистые кольца в U изотопны насыщенным, и все инвариантные на Γ изотопии между сечениями могут быть заменены на послойные. Поэтому имеется только конечное число минимальных сечений с точностью до послойных изотопий и скручиваний вдоль послойных торов и чистых колец. Каждое сечение может быть возмущено конечным числом способов. Это означает, что мы имеем только конечное число возмущенных

минимальных сечений с точностью до инвариантных на Γ на послойных изотопий и скручиваний вдоль послойных торов и чистых колец. Каждую инвариантную на Γ на послойную изотопию можно продолжить до изотопии пары (M, P) , и каждое скручивание вдоль послойного тора является гомеоморфизмом пары (M, P) . Так как край каждого чистого послойного кольца A в U лежит в ∂M , то скручивание вдоль кольца A также является гомеоморфизмом пары (M, P) .

Мы построили все преобразования наращивания и проверили выполнение свойств С1–С3. Справедливость свойства С4 вытекает из построения наращиваний. Теорема 3 (и вместе с ней основная теорема) доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Небольшая модификация начала доказательства теоремы 3 позволяет получить алгоритмическую классификацию узлов и зацеплений в трехмерной сфере, как и в любом другом неприводимом многообразии. Для этого на крае дополнительного пространства зацепления нужно выбрать меридиональные окружности компонент и включить их в узор. Все дальнейшие шаги доказательства остаются без изменения. Мы получим алгоритм, который для каждой пары поданных на его вход зацеплений выясняет существование переводящего меридианы в меридианы гомеоморфизма между их дополнительными пространствами. Поскольку такой гомеоморфизм существует тогда и только тогда, когда зацепления эквивалентны, это полностью решает задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Haken W. Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I // Math. Z. 1962. V. 80. P. 89–120.
- [2] Waldhausen F. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // Ann. of Math. Ser. 2. 1968. V. 87. P. 56–88.
- [3] Waldhausen F. Recent results on sufficiently large 3-manifolds // Proc. of Symp. in Pure Math. AMS. V. 32, 1978. P. 21–38.
- [4] Johannson K. Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries // Lect. Notes in Math. V. 761, 1979. P. 1–303.
- [5] Johannson K. Topologie und Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten // Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 1984. V. 86. P. 37–68.
- [6] Hemion G. On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds // Acta Math. 1979. V. 142. P. 123–155.
- [7] Hemion G. The classification of knots and 3-dimensional spaces. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
- [8] Johannson K. Topology and combinatorics of 3-manifolds // Lect. Notes in Math. V. 1599, 1995. P. 1–446.
- [9] Thurston W. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1988. V. 19. № 2. P. 417–431.
- [10] Bestvina M., Handel M. Train tracks for surface homeomorphisms // Topology. 1995. V. 34. № 1. P. 109–140.
- [11] Володин И. А., Кузнецов В. Е., Фоменко А. Т. О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы // УМН. 1974. Т. 29. № 5. С. 71–168.
- [12] Homma T., Ochiai M., Takahashi M. An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two // Osaka J. Math. 1980. V. 17. P. 625–648.
- [13] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во МГУ, 1991.

- [14] Milnor J. A unique factorization theorem for 3-manifolds // Amer. J. Math. 1962. V. 84. P. 1–7.
- [15] Hempel J. 3-Manifolds // Ann. Math. Studies. 1976. V. 86.
- [16] Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1977.
- [17] Haken W. Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für der Kreisknoten // Acta Math. 1961. V. 105. P. 245–375.
- [18] Шуберт Х. Алгоритм для разложения зацеплений на простые слагаемые // Сб. переводов “Математика”. Т. 10. № 4, 1966. С. 45–78.
- [19] Jaco W., Oertel U. An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold // Topology. 1984. V. 23. P. 195–209.
- [20] Thompson A. Thin position and the recognition problem for S^3 // Math. Research Letters. 1994. V. 1. P. 613–630.
- [21] Матвеев С. В. Алгоритм распознавания трехмерной сферы (по А. Томпсон) // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 5. С. 69–84.
- [22] Casler B. G. An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 559–565.
- [23] Матвеев С. В. Специальные остовы кусочно-линейных многообразий // Матем. сб. 1973. Т. 92. № 2. С. 282–293.
- [24] Turaev V. G., Viro O. Y. State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbol // Topology. 1992. V. 31. № 4. P. 865–902.
- [25] Ikeda H. Acyclic fake surfaces // Topology. 1971. V. 10. P. 9–36.
- [26] Lickorish W. B. R. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1964. V. 60. № 4. P. 769–778.
- [27] Матвеев С. В. Сложность трехмерных многообразий и их перечисление в порядке возрастания сложности // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 2. С. 280–283.
- [28] Matveev S. V. Complexity theory of 3-manifolds // Acta Appl. Math. 1990. V. 19. № 2. P. 124–132.

Челябинский государственный университет
E-mail: matveev@cgu.chel.su

Поступила в редакцию
19.06.1997