Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Новиков, И. А. Дынников, Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 5, 175–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:44:57

УДК 517.98

ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ
МАЛОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
И РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРАВИЛЬНЫХ
РЕШЕТКАХ И ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. П. Новиков, И. А. Дынников

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение: история вопроса, одномерный оператор Шрёдингера		175
§ 2. Нестационарное одномерное уравнение Шрёдингера		180
§ 3. Одномерные разностные операторы		188
§ 4. Преобразование Лапласа и двумерный оператор Шрёдингера в магнитном поле		191
§ 5. Разностные уравнения и преобразования Лапласа. Гиперболический случай		204
§ 6. Преобразование Лапласа для эллиптических двумерных разностных операторов на правильной решетке. Уравнения треугольника, кривизна		207
§ 7. Факторизации и преобразования Лапласа на многомерных решетках правильных тетраэдров в $\mathbb{R}^N$		219
§ 8. Факторизации операторов и преобразования Лапласа на двумерных поверхностях		223
§ 9. Симплициальные связности. Обобщения		226
Список литературы		233

§ 1. Введение: история вопроса, одномерный оператор Шрёдингера

Еще в XVIII веке (1742 г.) Л. Эйлер обратил внимание на подстановки, переводящие решения некоторого обыкновенного линейного дифференциального уравнения в решения другого, ассоциированного с ним уравнения. Пусть

$$(1) \quad L = -\partial_x^2 + u(x)$$

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

Последние три параграфа обзора представляют собой изложение совместной работы авторов, анонсированной в [1].

– оператор Штурма–Лиувилля, действующий на вещественной прямой (x) , и $\psi(x, \lambda)$
 – решение линейного уравнения $L\psi = \lambda\psi$. Пусть $v(x)$ – любое решение уравнения Риккати

$$(2) \quad u(x) = v_x + v^2.$$

При этих условиях имеет место

ЛЕММА 1. Новая функция $\tilde{\psi} = \psi_x - v(x)\psi$ удовлетворяет новому уравнению $\tilde{L}\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}$, где

$$\tilde{L} = -\partial_x^2 + \tilde{u}(x), \quad \tilde{u}(x) = -v_x + v^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение легко следует из того, что оператор L на самом деле представляется как произведение двух некоммутирующих множителей первого порядка

$$L = -\partial_x^2 + u = -(\partial_x + v)(\partial_x - v),$$

где $u = v_x + v^2$. Далее, мы имеем:

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi = -(\partial_x + v)(\partial_x - v)\psi = -(\partial_x + v)\tilde{\psi}.$$

Отсюда следует

$$\tilde{L}\tilde{\psi} = -(\partial_x - v)(\partial_x + v)\tilde{\psi} = \lambda(\partial_x - v)\psi = \lambda\tilde{\psi},$$

где

$$\tilde{L} = -(\partial_x - v)(\partial_x + v) = -\partial_x^2 + \tilde{u}(x).$$

Лемма доказана.

Итак, подстановка Эйлера основывается на представлении L в виде произведения операторов первого порядка, которые формально сопряжены друг другу, если $u, v \in \mathbb{R}$:

$$(3) \quad L = -(\partial_x + v)(\partial_x - v) = QQ^+,$$

и задается их перестановкой:

$$(4) \quad QQ^+ = L \mapsto \tilde{L} = Q^+Q, \quad \psi \mapsto \tilde{\psi} = Q^+\psi.$$

В литературе подстановки Эйлера нередко называют “преобразованиями Дарбу” или “преобразованиями Беклунда–Дарбу” вследствие роли, которую эти подстановки играют в теории нелинейных систем типа Кортевега–де Фриза (KdV) для функций $u(x, t)$, зависящих от времени как от параметра.

Классики математики выражались так: преобразование Дарбу $L \mapsto \tilde{L}$ определяется одним избранным решением φ уравнения $L\varphi = 0$, причем

$$(5) \quad \tilde{\psi} = \psi_x - (\varphi_x/\varphi)\psi.$$

Мы имеем

$$(6) \quad v(x) = \varphi_x/\varphi, \quad \text{где} \quad v_x + v^2 = u(x).$$

Алгебраический язык, т.е. соответствие этого с факторизацией $\alpha + L = QQ^+$, стал здесь употребляться после работ физиков 30-х–40-х гг. (Дирака, Шрёдингера, Инфельда).

С точки зрения формальной спектральной теории – т.е. локальных решений уравнения $L\psi = \lambda\psi$ – преобразование Дарбу–Эйлера порождает отображение собственных подпространств для всех λ :

$$B_\lambda: \psi \mapsto \tilde{\psi},$$

где $L\psi = \lambda\psi$, $\tilde{L}\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi} = \psi_x - v\psi$.

Уместно говорить об отображении Дарбу–Эйлера всей линейной оболочки (по всем λ)

$$B: \sum a_i \psi_i \mapsto \sum a_i \tilde{\psi}_i,$$

где $L\psi_i = \lambda_i \psi_i$, a_i – любые коэффициенты.

Преобразование B не является, строго говоря, изоморфизмом: при $\lambda = 0$ и $\psi = \varphi$ мы имеем $B\varphi = 0$, $v = \varphi_x/\varphi$. Таким образом, ядро этого отображения одномерно.

Переходя к настоящей “глобальной” спектральной теории оператора L в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, мы видим, что если функция $\varphi(x)$ не принадлежит $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, то преобразование Дарбу B может порождать изоморфизм спектральных теорий операторов L и $\tilde{L}$; иногда B – это мономорфизм на часть спектра оператора L , покрывающий все, кроме одной собственной функции в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$; иногда (если $\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$) преобразование B аннулирует ровно одно состояние спектра – φ – самое низкое, “основное” в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. Нам не известна классификация абсолютно всех возможных случаев с точки зрения спектральной теории в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы назовем преобразование Дарбу–Эйлера *скрытой алгебраической симметрией* спектральной теории одномерного оператора Шрёдингера или *дискретной симметрией*.

Напомним, что “непрерывными спектральными симметриями” или “изоспектральными деформациями” оператора L мы называем знаменитые системы теории солитонов наподобие KdV, которые порождают гигантскую коммутативную непрерывную группу, в которой KdV является однопараметрической подгруппой, см. [2], [3].

Преобразование Дарбу–Эйлера зависит от параметра, возникающего при факторизации (3), а именно, выбора одного решения уравнения Риккати (2). Мы будем обозначать эти преобразования через B ,

$$(7) \quad B: L \mapsto \tilde{L} = -(\partial_x - v)(\partial_x + v), \quad \psi \mapsto \tilde{\psi} = (\partial_x - v)\psi.$$

Кроме того, имеется еще однопараметрическое семейство преобразований “сдвига энергии”

$$T_\alpha: L \mapsto L + \alpha, \quad \alpha = \text{const}.$$

Пусть $B_\alpha = B \circ T_\alpha$.

В теории солитонов преобразованиями B_α можно было создать известные безотражательные потенциалы из нулевого. Однократным применением преобразования B_α можно получать “солитонные потенциалы” из свободного оператора $L_0 = -\partial_x^2$,

исходя из $v = k \operatorname{th} k(x - x_0)$, $\varphi = \operatorname{ch} k(x - x_0)$, $\alpha = k^2$. Многократным применением преобразований B_{α_j} можно получить все быстроубывающие безотражательные потенциалы, беря каждый раз не обращающееся в нуль решение φ_j “ниже спектра”:

$$(8) \quad \begin{aligned} u_{N+1}(x) &= B_{\alpha_N} \circ B_{\alpha_{N-1}} \circ \cdots \circ B_{\alpha_0}(0), \\ u_0(x) &= 0, \quad u_1(x) = -2k^2 / \operatorname{ch}^2 k(x - x_0), \quad \dots \end{aligned}$$

В литературе по теории солитонов (см. [3]–[5]) преобразованиями Беклунда–Дарбу получали также так называемые “многосолитонные потенциалы на фоне конечнозонных”, применяя преобразования B_α с надлежащими параметрами к известным периодическим и квазипериодическим конечнозонным потенциалам. Получающийся класс потенциалов соответствует пределам конечнозонных потенциалов при различных вырождениях римановых поверхностей. Длительное время не удавалось установить связь класса невырожденных периодических (квазипериодических) конечнозонных потенциалов (одномерных операторов Шрёдингера) с теорией преобразований Беклунда–Дарбу. Напомним, что конечнозонные потенциалы соответствуют орбитам бесконечномерной непрерывной коммутативной группы изоспектральных симметрий – так называемых высших аналогов KdV – имеющим конечную размерность ([2], [6]–[11]). Эти операторы обладают замечательными спектральными и алгебро-геометрическими свойствами, их коэффициенты вычисляются через тэта-функции гиперэллиптических римановых поверхностей, они порождают замечательные вполне интегрируемые гамильтоновы системы.

Важная идея о связи преобразований Беклунда–Дарбу с теорией конечнозонных потенциалов была выдвинута в 1986 г. ([12]). В этой работе были рассмотрены “циклические цепочки” преобразований Беклунда–Дарбу длины $N + 1$, т.е. уравнения вида

$$u = B_{\alpha_N} \circ B_{\alpha_{N-1}} \circ \cdots \circ B_{\alpha_0}(u)$$

при условии $\alpha_N = \alpha_{N-1} = \cdots = \alpha_0 = 0$. Развив весьма интересные технические соображения по изучению таких цепочек как некоторых интегрируемых нелинейных систем, в [12] было высказано предположение, что при $N = 2k$ потенциал $u(x)$ будет всегда конечнозонным (гипотеза Вейса). Эта гипотеза была доказана в [13] в более общем виде:

Пусть $N = 2k$ и α_j могут быть отличны от нуля. Если $\sum_{j=0}^N \alpha_j = 0$, то потенциал $u(x)$ в циклической цепочке преобразований Беклунда–Дарбу является конечнозонным, с римановой поверхностью рода не более $N + 1$.

Если $\sum_{j=0}^N \alpha_j = \alpha \neq 0$, то потенциал $u(x)$ имеет “осцилляторно-подобную” асимптотику

$$u(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{4(N+1)^2} + O(x), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Если потенциал $u(x)$ гладкий и вещественный (без особенностей), то спектр оператора $L = -\partial_x^2 + u(x)$ является объединением $N+1$ арифметических прогрессий с общей разностью α . При этом существует дифференциальный оператор A_{N+1} порядка $N + 1$ такой, что

$$[A_{N+1}, L] = \alpha A_{N+1}.$$

В. Э. Адлером было проведено численное исследование и установлено, что уравнение цикличности цепочек преобразований B_{α_j} при $\alpha \neq 0$ имеет неособые вещественные решения. В частном случае $N = 2$ это уравнение превращается в уравнение Пенлеве-IV.

Операторы циклической цепочки

$$L_0 = L_{N+1}, L_N, \dots, L_1, L_0, \dots$$

имеют факторизации вида

$$\alpha_j + L_j = Q_j Q_j^+.$$

При этом мы имеем по определению подстановок Дарбу–Эйлера:

$$\begin{aligned} L_j + \alpha_j &= Q_j Q_j^+ = -(\partial_x + v_j)(\partial_x - v_j), \\ L_{j+1} &= \tilde{L}_j = Q_j^+ Q_j. \end{aligned}$$

Для операторов L_j рассмотрим набор “основных состояний”, задаваемых уравнением

$$Q_{j-1} \psi_{0,j} = 0 = L_j \psi_{0,j}.$$

Предположим, что $\psi_{0,j} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, все сдвиги α_j и коэффициенты операторов Q_j, Q_j^+ вещественны. Тогда последовательность “операторов рождения” дает весь спектр в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ для операторов L_M ($M \geq j$) по формуле:

$$\begin{aligned} L_M \psi_{M-j,j} &= \left(\sum_{K=j}^M \alpha_K \right) \psi_{M-j,j}, \\ Q_M^+ Q^+ \dots Q_{j+1}^+ Q_j^+ \psi_{0,j} &= \psi_{M-j,j}, \quad M \geq j. \end{aligned}$$

При этом $L_M = L_{M+l(N+1)}$, $n = 2k$, $l \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что последовательность чисел $\sum_{K=j}^M \alpha_K$ представляет собой объединение конечного числа арифметических прогрессий с общей разностью $\sum_{K=0}^N \alpha_K = \alpha$, так как набор чисел α_j периодичен. Спектр оператора L_M имеет вид $\sum_{K=j}^M \alpha_K = \lambda_{j,M}$, $j = M, M-1, M-2, \dots$.

Таковы основные результаты по теории циклических цепочек Беклунда–Дарбу для одномерного непрерывного оператора Шрёдингера ([13]).¹ Не лишним было бы увидеть в литературе и публикацию, содержащую полное обоснование этой красивой алгебраической картины с точки зрения строгой спектральной теории, т.е. функционального анализа. Пока эта проблема может считаться “более или менее решенной” на уровне требований разумной (не сверхстрогой) математической физики. Понимание того, что происходит, и набор точных формул уже получены, но строго полнота этой картины в общем виде не доказана.

¹ Для нетривиальных циклических цепочек четной длины решение задачи классификации не получено.

ПРИМЕР 1. Пусть $N = 0$ (циклическая цепочка периода 1); мы имеем

$$\cdots = L_{-1} = L_0 = L_1 = \cdots,$$

где $L_0 = Q^+Q$, $\alpha + L_1 = QQ^+$. Здесь возникает алгебра Гайзенберга

$$(9) \quad QQ^+ = Q^+Q + \alpha, \quad Q = \partial_x + \frac{\alpha x}{2}.$$

Так как $Q = \partial_x + v(x)$, мы имеем

$$u(x) = v_x + v^2 = \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^2.$$

Собственные функции $\psi_{M-j,j}$ (выше) – это собственные функции квантового осциллятора

$$L = -\partial_x^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{4} = -\left(\partial_x + \frac{\alpha x}{2}\right)\left(\partial_x - \frac{\alpha x}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = -\left(\partial_x - \frac{\alpha x}{2}\right)\left(\partial_x + \frac{\alpha x}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть $\alpha > 0$. Уравнение $Q\psi_0 = 0$ имеет решение $\psi_0 \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, $\psi_0 = e^{-\alpha x^2/4}$. Все собственные функции $\psi_M = (Q^+)^M \psi_0$, $Q^+ = -(\partial_x - \alpha x/2)$, принадлежат $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ и порождают спектр оператора $L = -\partial_x^2 + \alpha^2 x^2/4$,

$$\lambda_M = \frac{\alpha}{2} + M\alpha.$$

В данном примере все очевидно, но принадлежность собственных функций $\psi_{M-j,j}$ пространству $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ следовало бы установить в общем случае.

§ 2. Нестационарное одномерное уравнение Шрёдингера

Заслуживает внимания подстановка Дарбу для нестационарного уравнения Шрёдингера

$$(10) \quad i\psi_t = -\psi_{xx} + u\psi$$

(см. [14]). Эти подстановки были использованы для построения некоторых точных решений уравнения КП. Исходя из одного точного решения

$$(11) \quad i\varphi_t = -\varphi_{xx} + u(x, t)\varphi,$$

мы определяем преобразование

$$(12) \quad B: \psi \longmapsto \tilde{\psi} = \psi_x - \frac{\varphi_x}{\varphi}\psi.$$

Функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет уравнению

$$(13) \quad i\tilde{\psi}_t = -\tilde{\psi}_{xx} + \tilde{u}(x, t)\tilde{\psi},$$

где $\tilde{u} = u - 2(\log \varphi)_{xx}$.

Сформулируем это на алгебраическом языке:

ЛЕММА 2. Пусть задана вещественная связность нулевой кривизны

$$(14) \quad \nabla_t = \partial_t - w, \quad \nabla_x = \partial_x - v, \quad [\nabla_t, \nabla_x] = 0$$

такая, что уравнение (10) имеет вид

$$(15) \quad i\nabla_t \psi = \nabla_x^+ \nabla_x \psi, \quad \nabla_x^+ = -(\partial_x + v).$$

Тогда преобразование Дарбу имеет вид

$$(16) \quad \tilde{\psi} = \nabla_x \psi.$$

Новая функция $\tilde{\psi}(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(17) \quad i\nabla_t \tilde{\psi} = \nabla_x \nabla_x^+ \tilde{\psi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (15) следует

$$i\nabla_t\psi = \nabla_x^+\tilde{\psi}.$$

Применим ∇_x к обеим частям этого равенства и используем соотношение нулевой кривизны $\nabla_x\nabla_t = \nabla_t\nabla_x$. Мы получаем

$$i\nabla_x\nabla_t\psi = \nabla_x\nabla_x^+\tilde{\psi} = i\nabla_t(\nabla_x\psi) = i\nabla_t\tilde{\psi}.$$

Лемма доказана.

Представление (15) определяется одним решением φ уравнения (11), так как связность нулевой кривизны имеет вид

$$(18) \quad \nabla_t = \partial_t - \frac{\varphi_t}{\varphi}, \quad \nabla_x = \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi}.$$

Таким образом, подстановки типа Эйлера–Дарбу здесь почти не отличаются от случая стационарного оператора Шрёдингера.

Рассмотрим теперь циклические цепочки длины 1. Пусть уравнение Шрёдингера и избранное решение φ таковы, что за один шаг мы придем к тому же (калибровочно эквивалентному) уравнению:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= u - 2(\log \varphi)_{xx} = u - C(t), \\ i\varphi_t &= -\varphi_{xx} + u(x, t)\varphi. \end{aligned}$$

Мы приходим к соотношению

$$(19) \quad \varphi(x, t) = \exp\left(\frac{Cx^2}{2} + Ax + B\right),$$

где A, B, C – произвольные функции от t . При $C \neq 0$ мы приходим к уравнению вида

$$(20) \quad \varphi(x, t) = \exp\left(\frac{C(x - x_0(t))^2}{2} + D(t)\right).$$

Для $C \equiv 0$ мы имеем ($A \neq 0$):

$$\varphi(x, t) = \exp(A(t)x + B) = \exp(A(t)(x - x_0(t))).$$

Легко доказывается следующая

ЛЕММА 3. Цепочка Дарбу для нестационарного уравнения Шрёдингера является циклической периода 1 тогда и только тогда, когда потенциал $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = (\alpha(t)x)^2 + \beta(t)x + \gamma(t),$$

и избранное решение $\varphi(x, t)$ задано в виде (19), где выполнены уравнения

$$(21) \quad \begin{aligned} i\dot{C} &= 2(\alpha^2 - C^2), \\ i\dot{A} &= \beta - 2AC, \\ i\dot{B} &= \gamma - (A^2 + C). \end{aligned}$$

Динамика x_0 из (20) при этом такова:

$$(22) \quad \dot{x}_0 = \frac{2\alpha^2 x_0 - \beta}{C}.$$

Доказательство получается несложным вычислением.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $w + iv = C \neq 0$. Тогда либо $\alpha^2 \neq 0$, либо $\alpha^2 \equiv 0$.

В случае $\alpha \neq 0$ мы имеем “движущийся осциллятор переменной формы”.

ЛЕММА 4. Решения вида (19), где $w(t_0) < 0$, лежат в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ по переменной x при любом $t \geq t_0$, если выполнено условие

$$\operatorname{Im} \alpha^2(t) \leq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Область $\operatorname{Re} C < 0$ является инвариантной для системы (21), так как для $C = w + iv$ мы имеем $\dot{w} \leq 0$ при $w = 0$ в силу уравнения:

$$\dot{w} = 2(\operatorname{Im} \alpha^2 - 2vw).$$

Лемма доказана.

Пусть $\alpha^2 = \operatorname{const} > 0$. Тогда условие $C = -\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, дает стационарное решение для C в области $u = \operatorname{Re} C < 0$. Все траектории в этой области периодичны, уравнение легко проинтегрировать. Траектории задаются уравнением $H(w, v) = \operatorname{const}$, где $H = ((\alpha - w)^2 + v^2)/w$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Совокупность операторов вида $Q_a = \partial_x + ax$ удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$(23) \quad [Q_a, Q_b] = (a - b) \cdot 1, \quad Q^+ = -Q_{-\bar{a}}$$

для всех комплексных a, b . Коммутаторы всех этих операторов с $H_\alpha = Q_\alpha Q_\alpha^+$, где $Q_\alpha^+ = -Q_{-\bar{\alpha}}$, имеют вид

$$(24) \quad [Q_a, H_\alpha] = (a - \alpha)Q_{-\bar{\alpha}} + (a + \bar{\alpha})Q_\alpha.$$

Обычные когерентные состояния – это собственные векторы операторов уничтожения. Изученные нами состояния – это собственные векторы операторов

$$Q_{-C}\psi = \gamma\psi, \quad \operatorname{Re} C < 0.$$

Здесь $\gamma \in \mathbb{C}$, причем $\gamma = Cx_0$ в формуле (20) выше. Таким образом, состояния (20) определяются чисто алгебраически через алгебру Ли (23), содержащую осцилляторный гамильтониан $H = H_\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известные “когерентные состояния” осциллятора являются собственными векторами оператора уничтожения

$$Q\psi_\gamma = \gamma\psi_\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{C},$$

$$Q = \partial_x + \alpha x, \quad \psi_\gamma(x) = e^{-\alpha(x-\gamma/\alpha)^2/2}.$$

Поставив эти функции в качестве начальных условий, мы получим решения уравнения Шрёдингера частного вида (20), где $C = -\alpha = \operatorname{const} < 0$. Для $x_0(t)$ мы получим движение вдоль мнимой прямой

$$x_0(t) = x_0(0) + 2it,$$

$$\psi_\gamma(x, t) = e^{-\alpha(x-\gamma/\alpha-x_0(t))^2/2+B(t)}.$$

ВОПРОС. Пусть при $t = 0$ мы имеем $C(0) = q$ для всех решений (20). При каких (x_0, q) набор функций $\varphi_q(x, 0)$, где

$$\varphi_q(x, 0) = e^{q(x-x_0, q)^2/2},$$

является полным в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, где q пробегает кривую из точки $q_0 = -\alpha$ до $q = \infty$ так, что $\operatorname{Re} q < 0$? Если этот набор переполнен, то как выбрать минимальный полный базис? Заведомо можно выбрать кривую $\infty < q \leq -\alpha$ и сдвиги x_0, q так, что набор будет полон, $q \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим также, что для осциллятора $u = \alpha^2 x^2$, $\alpha^2 = \operatorname{const} > 0$, можно совершить преобразование Дарбу, исходя из другого решения в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi(x, t)|_{t=0} = P_n(x)e^{-\alpha x^2/2}, \quad \alpha > 0,$$

где $P_n(x)$ – произвольный многочлен от x степени n (здесь $\alpha = C = \operatorname{const}$). Для потенциала $\tilde{u}(x, t)$ мы будем иметь

$$\tilde{u} = \alpha^2 x^2 - 2(\log \varphi)_{xx} = \alpha^2 x^2 - \sum_j \frac{2}{(x - x_j(t))^2}.$$

Динамику $\varphi(x, t)$ мы определим, разлагая $P_n(x)$ по полиномам Эрмита, т.е. по собственным функциям осциллятора. Возникает движение полюсов потенциала $\tilde{u}(x, t)$ по t (или движение по t полинома $P_n(x, t)$, $P_n(x, 0) = P_n(x)$) такое, что

$$\begin{aligned} P_n(x, t) &= \sum e^{-i\lambda_j t} a_j H_j(x) \\ P_n(x) &= \sum_{j \leq n} a_j H_j, \quad \lambda_j = \alpha + 2j\alpha. \end{aligned}$$

$H_j(x)$ – полиномы Эрмита, определяемые формулами:

$$H_0 = 1, \quad H_j(x) = ((Q^+)^j e^{-\alpha x^2}) / e^{-\alpha x^2},$$

где $Q^+ = \partial_x - \alpha x$. Мы имеем:

$$P_n(x, t) = a_n e^{-i(2n+1)\alpha t} \prod_{j=1}^n (x - x_j(t)).$$

Более обширное семейство решений такого рода мы можем получить из начальных условий вида

$$\varphi(x, 0) = P_n(x) e^{C(0)(x-x_0)^2/2},$$

применяя операторы $Q_{-C}^+ = Q_{-C}$ к начальным условиям решений (20). Их полюсная динамика также может представлять интерес.

Случай 2. Пусть $C \equiv 0$. Тогда $\alpha \equiv 0$, и мы имеем

$$u(x, t) = \beta x + \gamma, \quad \varphi(x, t) = \exp(iA(t)(x - x_0(t))).$$

Это – физически осмысленный случай, когда $\beta = E(t)$ и периодически по t . В этом случае (известном как интегрируемый случай Л. В. Келдыша) можно найти и общее решение.

Любопытно отметить, что даже в стационарном случае $u(x) = \beta x + \gamma$, когда β, γ – константы, гораздо удобнее пользоваться базисом из нестационарных решений $\varphi(x, t)$, имеющих вид плоских волн при фиксированном времени.

В конечном счете, только нестационарное уравнение Шрёдингера является законом природы. Если сила u_x не зависит от времени, то мы можем в надлежащей калибровке считать гамильтониан $\hat{H}$ стационарным. Как обычно, в этом случае вместо нестационарного уравнения

$$i\psi_t = \hat{H}\psi$$

мы можем воспользоваться методом Фурье и решить стационарную задачу

$$\hat{H}\psi = \lambda\psi$$

в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

После этого мы будем иметь общее решение в виде конечных или непрерывных линейных комбинаций

$$\psi(x, t) = \sum_j a_j \psi_j e^{-i\lambda_j t}, \quad \hat{H}\psi_j = \lambda_j \psi_j.$$

Однако, этот общепринятый подход имеет смысл лишь тогда, когда спектральная задача решается достаточно хорошо; это всего лишь математический трюк, не более.

Если стационарная задача не решается достаточно хорошо, то метод Фурье нецелесообразен. Примером такой ситуации является постоянное электрическое поле $u(x) = Ex$, где базис нестационарных решений (плоские волны) гораздо проще, как отмечалось выше, чем собственные функции стационарного оператора $\hat{H}$ (функции Эйри).

Преимущество этого подхода может быть особенно существенным в случае, когда потенциал имеет вид:

$$u(x) = Ex + u_0(x),$$

где функция $u_0(x)$ периодична (постоянное электрическое поле приложено к кристаллу). Уже в [15] обсуждались перспективы нестационарного подхода в этом случае. Физически осмыслен общий нестационарный случай

$$u(x, t) = E(x, t),$$

где $E(x, t)$ – электрическое поле, периодическое по обоим переменным. Если потенциал $u(x, t)$ двоякопериодичен (“нулевой электрический поток”), то здесь имеется обширное семейство алгебро-геометрических точно решаемых уравнений, где $u(x, t)$ выражается через тэта-функции римановых поверхностей (см. [16], [17]). Строится блоховское решение ψ уравнения (10):

$$(25) \quad \begin{aligned} \psi(x + T_1, t) &= e^{ip_1 T_1} \psi(x, t), \\ \psi(x, t + T_0) &= e^{ip_0 T_0} \psi(x, t), \end{aligned}$$

как “функция Бейкера–Ахиезера” на некоторой римановой поверхности Γ конечного рода, т.е. параметры p_1, p_0 связаны уравнением алгебраической кривой Γ . Эти потенциалы использовались для решений “уравнения КП”, где t переобозначается через y , а время, обозначаемое через t , – это третья переменная. Несомненно, эти решения Кричевера [16], [17] получаются из циклических цепочек преобразований Дарбу, но точное утверждение здесь пока не доказано.

Сложнее случай ненулевого “электрического потока”. Случай $E(t) = \beta$ известен как интегрируемый случай Л. В. Келдыша.

В этих случаях расширение запаса известных точных решений было бы полезно для понимания картины. В [15] при определенных условиях (“квантования электрического потока” через элементарную ячейку в (x, t) -плоскости) вводились электрически блоховские функции, собственные для “электрических трансляций” на периоды, но их аналитические свойства при $E \neq 0$ понять и сформулировать пока не удалось.

Изменим уравнение Шрёдингера (10) калибровочным преобразованием

$$(26) \quad \psi' = e^{iF(x,t)}\psi, \quad L' = e^{iF}Le^{-iF},$$

так что

$$i\psi'_t = -(\partial_x + iA_1(x, t))^2\psi'.$$

Для этого надо взять $F_t = u(x, t)$, $A_1 = -F_x$.

Пусть $u = \beta(t)x$. Мы имеем $F = A(t)$, $\dot{A} = \beta(t)$. Имеем решение вида:

$$(27) \quad \psi'_k = e^{ikx}\varphi_k(t),$$

где

$$(28) \quad i\dot{\varphi}_k = (k - A(t))^2\varphi_k, \quad \varphi_k = e^{-i\int^t(k-A(\tau))^2 d\tau}.$$

Для

$$(29) \quad \beta(t) = E = \text{const}$$

мы имеем

$$(30) \quad \psi'_k = e^{ikx}e^{iE^2/3}(kE^{-1} - t)^3.$$

Это – базис в пространстве решений.

Операторы “электрических трансляций”, сохраняющие уравнение Шрёдингера,

$$(31) \quad i\nabla_t\psi = -\nabla_x^2\psi,$$

где $\nabla_t = \partial_t + iA_0$, $\nabla_x = \partial_x + iA_1$, полностью аналогичны магнитным трансляциям. При периодической силе $E(x, t)$,

$$E(x, t) = A_{0x} - A_{1t} = E(x + T_1, t) = E(x, t + T_0),$$

электрические трансляции, коммутирующие с (31), таковы:

$$(32) \quad \hat{T}_1\psi = e^{iF_0(x,t)}\psi(x + T_1, t), \quad \hat{T}_0\psi = e^{iF_1(x,t)}\psi(x, t + T_0),$$

где $dF_0 = A(t + T_0) - A(t)$, $dF_1 = A(x + T_1) - A(x)$, $A = A_0 dt + A_1 dx$. Имеет место тождество

$$(33) \quad \widehat{T}_1 \widehat{T}_0 - \widehat{T}_0 \widehat{T}_1 = e^{i\Phi_{01}}, \quad \Phi_{01} = \int_0^{T_0} \int_0^{T_1} E(x, t) dx dt.$$

Если $\Phi_{01} = 2\pi q$, $q \in \mathbb{Z}$, то группа “электрических трансляций” коммутативна (как и в магнитном случае). В частном случае (29) мы получаем

$$(34) \quad \widehat{T}_1 \psi'_k = T_1 \psi'_k = e^{ikT_1} \psi'_k, \quad \widehat{T}_0 \psi'_k = \psi'_{k-ET_0}.$$

Электрически блоховские состояния, собственные для $\widehat{T}_1, \widehat{T}_0$ при условии $ET_0 T_1 = 2\pi q$, $q \in \mathbb{Z}$, формально пишутся в виде

$$(35) \quad \psi(x, t, p_0, p_1) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-im p_0 T_0} \widehat{T}_0^m (\psi'_k(x, t)).$$

Очевидно, мы имеем

$$\begin{aligned} \widehat{T}_0 \psi &= e^{ip_0 T_0} \psi, \\ \widehat{T}_1 \psi &= e^{ip_1 T_1} \psi, \quad p_1 = k \pmod{ET_0}. \end{aligned}$$

Это – сложные обобщенные функции. Для $\beta(t) = E$ мы имеем, например:

$$(36) \quad \psi(x, t, p_0, p_1) = e^{ikx} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i(-mT_0(p_0 + Ex) + \frac{E^2}{3}(kE^{-1} - t - mT_0)^3)} \right).$$

(В отличие от магнитного случая, где функции φ_k быстро убывают при $|x| \rightarrow \infty$, и аналог ряда (35) сходится, давая аналитические функции.)

В качестве простейшего примера укажем, что при условии “сильной целочисленности” $q, s, l \in \mathbb{Z}$:

$$(37) \quad ET_0 T_1 = 2\pi q, \quad E^2/3 = 2\pi s, \quad T_0 = l,$$

мы получим при $t_0 = kE^{-1}$, $0 \leq k \leq ET_0$:

$$(38) \quad \frac{1}{2\pi} \psi(x, t_0, p_0, p_1) = e^{ikx} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(T_0(p_0 + Ex) + 2\pi m), \quad k = p_1 \pmod{ET_0}.$$

Таким образом, при условии (37) электрически блоховские состояния получаются решением задачи Коши с сингулярным начальным условием (38). В обзоре [15] при правильной схеме и идеологии в тексте были формульные описки и ошибки при описании электрически блоховских состояний.

Функция (36) является суммой двух функций

$$\psi = \psi_+ + \psi_-,$$

где ψ_+ – граничное значение функции, аналитической при $\text{Im } p_0 > 0$, а ψ_- – граничное значение функции, аналитической при $\text{Im } p_0 < 0$. Возможно, это свойство верно и в общем случае для электрически блоховских состояний. Наш ряд (36) сходится при

$p_1 = k_{\mathbb{R}} + i\kappa^2$, $\kappa^2 > 0$, как легко видеть из формулы (36), так что по переменной $k = p_1 \pmod{ET_0}$ функция (36) является граничным значением аналитической функции.

В случае постоянного поля при условии сильной целочисленности (37) электрически блоховскую функцию можно полностью вычислить, исходя из (38). Напомним, что тэта-функция с нулевыми характеристиками имеет вид

$$(39) \quad \theta_{\tau}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\tau m^2/2 + mz}$$

и корректно определена при $\text{Im } \tau > 0$.

Сопоставляя с (36), окончательно имеем

$$(40) \quad \psi(x, t, p_0, p_1) = \theta_{\tau}(z), \quad \tau = 2(ET_0)^2 \left(\frac{k}{E} - t \right)^2 + i0, \quad z = i(ET_0) \left(k - Et - \frac{p_0}{E} \right),$$

т.е. предел тэта-функции, когда $\text{Im } \tau \rightarrow +0$,

$$\begin{aligned} p_1 &= k \pmod{ET_0}, \\ \hat{T}_1 \psi &= e^{ip_0 T_0} \psi, \quad \hat{T}_2 \psi = e^{ip_1 T_1} \psi, \\ T_0 &\in \mathbb{Z}, \quad E^2/3 \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad ET_0 T_1 \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

В остальных случаях возникают обобщенные функции (distributions), задаваемые бесконечными тригонометрическими суммами, кубическими по $m \in \mathbb{Z}$. По-видимому, этого типа величины не изучены.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для случая $\alpha = 0$ и $\beta = \text{const} = E$ имеется специальное семейство решений таких, что $C \neq 0$ при $t \in \mathbb{R}$. Из уравнений (21) мы находим $i/(2t + ip) = C$, $p \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, t) = \exp \left\{ i \frac{(x - x_0(t))^2}{4t + 2ip} + D(t) \right\}.$$

Мы имеем:

$$-x_0(0) + x_0(t) = \beta t^2,$$

где $p < 0$.

Движение центра x_0 при $p = 0$ — это движение классической частицы в постоянном поле $E = \beta$. В этом решении имеется совпадение классической и квантовой картины.

Эти элементарные решения мы привели здесь для того, чтобы на примере $N = 1$ продемонстрировать, какой должна быть правильная постановка задачи о циклических цепочках Дарбу для одномерного нестационарного оператора Шрёдингера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Преобразование

$$(41) \quad u \rightarrow u + \gamma(t), \quad \psi \rightarrow e^{-ig(t)}$$

мы назовем *калибровочным преобразованием* одномерного нестационарного оператора Шрёдингера, где $\gamma(t)$ — произвольная функция времени, и $\dot{g} = \gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Цепочкой преобразований Дарбу* для одномерного нестационарного уравнения Шрёдингера мы назовем последовательность уравнений

$$i\psi_t = L_j\psi = -\psi_{xx} + u_j(x, t)\psi$$

такую, что оператор L_{j+1} получается из L_j преобразованием Дарбу и затем калибровочным преобразованием на функцию $\gamma_j(t)$:

$$(42) \quad \begin{aligned} u_{j+1}(x, t) &= \tilde{u}_j(x, t) + \gamma_j(t), \\ \tilde{u}_i &= u_i - 2(\log \varphi_i)_{xx}, \\ i\varphi_{jt} &= -\varphi_{jxx} + u_j(x, t)\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, цепочка Дарбу определяется выбором решений φ_j и произвольных функций времени $\gamma_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$. В случае циклической цепочки периода N мы имеем N решений φ_j и N произвольных функций $\gamma_j(t)$.

§ 3. Одномерные разностные операторы

Рассмотрим разностный оператор L второго порядка

$$(43) \quad L\psi_n = c_{n-1}\psi_{n-1} + v_n\psi_n + c_n\psi_{n+1}.$$

Из теории солитонов известно [3], [18]–[20], что для сохранения при дискретизации скрытых алгебраических симметрий операторов Шрёдингера (таких, как изоспектральные деформации типа KdV и преобразование Беклунда–Дарбу–Эйлера) необходимо вводить ковариантные сдвиги $\exp(\nabla_x)$ вместо сдвигов $T = \exp(\partial_x)$, где

$$\exp(\nabla_x) = c_n T: \psi_n \rightarrow \psi_{n+1} c_n$$

(“ковариантный сдвиг”).

После этого теория соответствующего класса разностных операторов (43) становится похожа на непрерывный случай: возникают изоспектральные деформации типа цепочки Тода для (43) или “дискретного KdV” для (43) при условии $v_n = 0$, возникают также аналоги преобразований Дарбу, исходя из факторизации:

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha + L &= QQ^+, T^+ = T^{-1}, Q = a_n + b_n T, Q^+ = a_n + T^{-1} b_n. \\ \text{б) } \alpha + L &= \hat{Q}^+ \hat{Q}, \hat{Q} = \hat{a}_n + \hat{b}_n T. \end{aligned}$$

Для факторизации по-прежнему необходимо решать разностный аналог уравнения Риккати

$$(44) \quad v_n + \alpha = a_n^2 + b_n^2, \quad a_{n+1} b_n = c_n,$$

$$(45) \quad v_n + \alpha = \hat{a}_n^2 + \hat{b}_{n-1}^2, \quad c_n = \hat{a}_n \hat{b}_n.$$

Факторизация возможна и в общем несамосопряженном случае (прямая и обратная):

$$L = p_n T^{-1} + q_n + r_n T = (a_n + b_n T)(x_n + y_n T^{-1}) = (c_n + d_n T^{-1})(v_n + w_n T).$$

Преобразование Беклунда–Дарбу определяется как и в непрерывном случае ([21], [22]):

$$(46) \quad B_\alpha = BT_\alpha, \quad B'_\alpha = B'T_\alpha,$$

$$(47) \quad B: L \mapsto \tilde{L} = Q^+Q, \quad \psi \mapsto \tilde{\psi} = Q^+\psi,$$

$$(48) \quad B': L \mapsto \hat{L}' = \hat{Q}\hat{Q}^+, \quad \psi \mapsto \hat{\psi}' = \hat{Q}\psi,$$

$$T_\alpha: L \mapsto L + \alpha,$$

$L = QQ^+$ (во всех случаях сначала делается факторизация, затем перестановка некоммутирующих множителей – операторов 1-го порядка).

Естественно возникает и задача о циклических цепочках ([21], [22]), например, прямых преобразований

$$(49) \quad B_{\alpha_N} \circ B_{\alpha_{N-1}} \circ \dots \circ B_{\alpha_0}(L) = L.$$

Если $\sum \alpha_j = 0$, то в [22] установлено, что L – конечнозонный оператор с римановой поверхностью (“спектром”) рода $g \leq [N/2]$. Если $\sum \alpha_j = \alpha \neq 0$, то мы приходим к разностным аналогам теории [12], [13].

Следует учесть, что преобразования B_α и B'_α зависят еще от непрерывного параметра – выбора решения разностного уравнения Риккати (44) или (45), зависящего от выбора начальной точки b_0 (или $\hat{b}_0$), и набора знаков ($\text{sgn } a_n$). Обозначим этот совокупный параметр через κ . Вопрос о целесообразном выборе знаков обсуждается, например, в [21]. Так или иначе, мы имеем соотношение

$$B'^{\kappa'} B^\kappa L = L$$

для любого L , где выбор параметра κ' естественно согласован с κ .

В принципе, можно рассматривать общие слова в группе, порожденной преобразованиями $T_\alpha, B'^\kappa, B^\kappa$ для всех (κ, α) и формулировать условие цикличности по отношению к ним. Таким образом, имеем

Вывод. Совокупность преобразований Дарбу для разностного одномерного оператора больше, чем для непрерывного, из-за наличия двух разных типов факторизации (выше). В работах [21]–[23] изучалось условие цикличности только “прямых” цепочек вида (49).

Любопытно посмотреть на случай $N = 1$, где возникает аналог осциллятора, исходя из соотношения Гайзенберга:

$$(50) \quad QQ^+ = Q^+Q + \alpha.$$

Это уравнение имеет решение

$$(51) \quad Q^+ = 1 + \sqrt{a + bn} T.$$

Коэффициенты такого оператора Q не могут быть вещественными при всех n .

ЛЕММА 5. *Предположим, что выполнено “условие квантования”*

$$(52) \quad a + bn = b(n_0 + n),$$

где $n_0 = a/b \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Тогда операторы Q и Q^+ корректно определены в подпространстве функций ψ таких, что

$$\psi_n = 0, \quad n + n_0 \leq 0, \quad \psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

Лемма легко доказывается прямой проверкой.

Как указано в работе [22], основное состояние определяется по Дираку:

$$Q^+ \psi_0 = 0.$$

При этом мы имеем [22]:

$$(53) \quad \psi_{0n}^2 = 1/(\alpha^{k-1}(k-1)!), \quad k = n + n_0 > 0.$$

Таким образом, ψ_{0n}^2 – это распределение Пуассона. Применяя операторы рождения, мы получим собственные функции

$$Q^k \psi_0 = P_k(n + n_0) \psi_{0n},$$

где $P_k(n)$ – известные полиномы Шарлье, ортогональные относительно веса (ψ_{0n}^2) – распределения Пуассона на $\mathbb{Z}_+$.

Таким образом, в разностном случае соотношение Гайзенберга (50) реализуется (среди операторов 1-го порядка) на полупрямой $\mathbb{Z}_+$.

Имеется еще и другой аналог, “ q -аналог”, осциллятора, где операторы Q , Q^+ зависят от двух параметров:

$$(54) \quad Q_{c,a} = 1 + ca^n T.$$

ЛЕММА 6. *Имеет место соотношение*

$$(55) \quad Q_{c,a} Q_{c,a}^+ - 1 = a^2 (Q_{c_1,a}^+ Q_{c_1,a} - 1), \quad c_1 = ca^2.$$

Доказательство состоит в простой проверке.

В работе [22] доказана теорема (части которой имеются уже в [21]).

ТЕОРЕМА 1. 1) *Преобразование*

$$\tau: n \rightarrow 1 - n$$

действует на операторы Q_c , Q_c^+ следующим образом:

$$(56) \quad \tau Q_{c,a} = Q_{c,a^{-1}}^+ \tau.$$

2) Уравнение $Q_c \psi_0 = 0$ имеет решение в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ при условии $|a| > 1$. Уравнение $Q_c^+ \psi_0 = 0$ имеет решение в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ при условии $|a| < 1$.

3) Спектр оператора $L_{c,a} = Q_{c,a} Q_{c,a}^+$ в промежутке $0 \leq \lambda < 1$ имеет вид:

$$(57) \quad \begin{aligned} \lambda_n &= 1 - a^{-2n}, \quad n \geq 0, \quad \text{если } |a| > 1, \\ \lambda_n &= 1 - a^{2n}, \quad n \geq 1, \quad \text{если } |a| < 1. \end{aligned}$$

Аналогично, спектр оператора $\tilde{L}_{c,a} = Q_{c,a}^+ Q_{c,a}$ в промежутке $0 \leq \lambda < 1$ есть

$$(58) \quad \begin{aligned} \lambda_n &= 1 - a^{-2n}, \quad n \geq 1, \quad \text{если } |a| > 1, \\ \lambda_n &= 1 - a^{2n}, \quad n \geq 0, \quad \text{если } |a| < 1. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА. Исследовать спектр операторов $L = QQ^+$, $\tilde{L} = Q^+Q$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ в области $\lambda \geq 1$, если Q имеет вид (54). Согласно гипотезе [22], этот спектр непрерывный и лебеговский (см. ниже §6).

§ 4. Преобразование Лапласа и двумерный оператор Шрёдингера в магнитном поле

Общий n -мерный стационарный скалярный оператор Шрёдингера в евклидовом пространстве мы пишем в виде

$$(59) \quad L = -\frac{1}{2} \sum (\partial_\alpha + iA_\alpha(x))^2 + U(x),$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. В частности, 2-форма “магнитного поля” имеет вид

$$(60) \quad \begin{aligned} H &= \sum_{\alpha < \beta} H_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad dH = 0, \\ H_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = -H_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Электрическая сила имеет вид

$$(61) \quad \vec{E} = (\partial_1 U, \dots, \partial_n U),$$

т.е. потенциал U определен с точностью до константы. Калибровочными преобразованиями

$$(62) \quad L \mapsto e^f L e^{-f}, \quad \psi \mapsto e^f \psi$$

мы можем менять “вектор-потенциал”:

$$(63) \quad A_\alpha \mapsto A_\alpha - i\partial_\alpha f.$$

В физически осмысленном, самосопряженном, случае мы имеем вещественные магнитное поле и потенциал: $H_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$, и выбираем вещественный вектор-потенциал, $A_\alpha \in \mathbb{R}$. Калибровочные преобразования тогда имеют вид (62) (в классе стационарных операторов), где $f = i\varphi(x)$, $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. Полученный в результате такого преобразования оператор по-прежнему обладает свойством формальной самосопряженности по отношению к стандартному скалярному произведению в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$:

$$(64) \quad \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1 \bar{\psi}_2 d^n x.$$

Важный класс составляют операторы с гладкими вещественными магнитным и электрическим полями, периодическими относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ранга n . В этом случае мы вводим следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мы скажем, что оператор L *топологически нетривиален*, если магнитное поле (60) представляет ненулевой класс когомологий тора

$$(65) \quad 0 \neq [H] \in H^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Мы скажем, что оператор L обладает топологически нетривиальным электрическим полем, если 1-форма электрического поля (в нерелятивистском стационарном формализме) представляет ненулевой класс когомологий тора:

$$(66) \quad 0 \neq [E] \in H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}),$$

$E = E_\alpha dx^\alpha$, $E_\alpha = \partial_\alpha U(x)$. Иначе говоря, потенциал имеет вид

$$(67) \quad U(x) = E_{0\alpha} x^\alpha + U_0(x),$$

где функция $U_0(x)$ периодична относительно решетки, $E_0 = \text{const} \in (\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

Топологически нетривиальное электрическое поле возникает уже в одномерном случае. Как указывалось в §2 выше, такую ситуацию целесообразно изучать в рамках нестационарного (x, t) -формализма, даже если электрическая сила стационарна.

Для магнитных полей мы работаем в стационарном формализме. Если $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ – базис решетки, то $H_{\alpha\beta}(x + \vec{\gamma}_j) = H_{\alpha\beta}(x)$. Для вектор-потенциала мы получаем

$$A_\alpha(x + \vec{\gamma}_j) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \varphi_j(x),$$

где φ_j – некоторая функция от $x = (x^1, \dots, x^n)$.

Определим “магнитные трансляции” ([15]), хорошо известные в физической литературе начиная с середины 60-х годов,

$$(68) \quad \hat{T}_j \psi(x) = \psi(x + \vec{\gamma}_j) e^{i\varphi_j(x)}.$$

Имеет место соотношение

$$(69) \quad \hat{T}_j \hat{T}_k = e^{i\Phi_{jk}} \hat{T}_k \hat{T}_j,$$

где Φ_{jk} – поток магнитного поля через элементарную двумерную ячейку решетки в плоскости $(\vec{\gamma}_j, \vec{\gamma}_k)$, или скалярное произведение (интеграл) коцикла $[H]$ с базисным 2-циклом $Z_{jk} \in H_2(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$.

В двумерном случае $n = 2$ мы можем представить оператор L в факторизованной форме, которую мы будем писать так:

$$(70) \quad 2L = (\bar{\partial} + B)(\partial + A) + 2W,$$

где $A(z, \bar{z})$, $B(z, \bar{z})$, $W(z, \bar{z})$ – некоторые функции от $z, \bar{z}$,

$$z = x + iy, \quad \partial = \partial_x - i\partial_y.$$

Магнитное поле имеет вид

$$(71) \quad 2H = B_z - A_{\bar{z}}.$$

Если H, W вещественны, то мы можем калибровочным преобразованием привести оператор к самосопряженной форме, так что мы будем иметь

$$2L = Q_1 Q_2 + 2W, \\ Q_1 = \bar{\partial} + B, \quad Q_2 = \partial + A = -Q_1^\dagger, \quad A = -\bar{B}.$$

Оператор L всегда записывается в виде (70), т.е. “допускает факторизацию” в нашей терминологии.

Оператор L допускает и противоположную факторизацию вида

$$2L = Q_2 Q_1 + 2V,$$

где $V = W + H$, $Q_2 = \partial + A$, $Q_1 = \bar{\partial} + B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Преобразованием Лапласа* называется преобразование

$$(72) \quad L \longmapsto \tilde{L}, \quad 2\tilde{L} = WQ_2W^{-1}Q_1 + 2W,$$

где $2L = Q_1Q_2 + 2W$.

ЛЕММА 7. а) Если ψ – любое решение уравнения $L\psi = 0$, то функция $\tilde{\psi} = Q_2\psi$ удовлетворяет уравнению $\tilde{L}\tilde{\psi} = 0$.

б) Если $W = W_0 = \text{const}$, то для любого решения ψ уравнения $L\psi = \lambda\psi$ функция $\tilde{\psi} = Q_2\psi$ удовлетворяет уравнению $\tilde{L}\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}$. В этом случае $2\tilde{L} = Q_2Q_1 + 2W_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы очень простое. Так как $L\psi = 0$, мы имеем

$$-2W\psi = Q_1Q_2\psi = Q_1\tilde{\psi}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} -2\psi &= W^{-1}Q_1\tilde{\psi}, \\ -2\tilde{\psi} &= -2Q_2\psi = Q_2W^{-1}Q_1\tilde{\psi}, \\ -2W\tilde{\psi} &= WQ_2W^{-1}Q_1\tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Лемма доказана для случая а). В случае б), при условии $W = W_0 = \text{const}$, доказательство точно такое же.

ЛЕММА 8. *Преобразование Лапласа для уравнения $L\psi = 0$ коммутирует с калибровочными преобразованиями (62). Если $W = W_0 = \text{const}$, то это относится ко всему семейству уравнений $L\psi = \lambda\psi$.*

В частности, это преобразование определено на калибровочно инвариантных величинах H, W :

$$(73) \quad \tilde{H} = H + \frac{1}{2}\partial\bar{\partial}\log W, \quad \tilde{W} = W + \tilde{H}.$$

Доказательство этого утверждения получается непосредственной проверкой. Мы его опускаем.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Классики, начиная с Лапласа, рассматривали это преобразование для гиперболического уравнения

$$1) \quad 2L = (\partial_x + A)(\partial_y + B) + 2W,$$

$$2\tilde{L} = W(\partial_y + B)W^{-1}(\partial_x + A) + 2W;$$

$$2) \quad 2L = (\partial_y + B)(\partial_x + A) + 2V, \quad V = W + H,$$

$$2\tilde{L}' = V(\partial_x + A)V^{-1}(\partial_y + B) + 2V.$$

Здесь пара взаимно обратных преобразований Лапласа действует на решениях уравнения $L\psi = 0$:

$$1) \quad L \longmapsto \tilde{L}, \quad \psi \longmapsto \tilde{\psi} = (\partial_y + B)\psi;$$

$$2) \quad L \longmapsto \tilde{L}', \quad \psi \longmapsto \tilde{\psi}' = (\partial_x + A)\psi.$$

Калибровочные инварианты по-прежнему имеют вид H, W или H, V , где

$$2H = \partial_x B - \partial_y A.$$

Для этих инвариантов преобразования Лапласа имеют вид, аналогичный (73):

$$(74) \quad \begin{aligned} 1) \quad \tilde{H} &= H + \frac{1}{2} \partial_1 \partial_2 \log W, \quad \tilde{W} = W + \tilde{H}; \\ 2) \quad \tilde{H}' &= H + \frac{1}{2} \partial_1 \partial_2 \log V, \quad \tilde{V}' = V + \tilde{H}'. \end{aligned}$$

Эти преобразования изучались геометрами; они нашли применения в теории конгруэнций для поверхностей в $\mathbb{R}^3$ ([24]). Классики геометрии (Дарбу, Цицейка, Мутар – см. [25], [26]) исследовали цепочки преобразований Лапласа и выполнили ряд полезных формальных вычислений. Так, было замечено, что бесконечная цепочка преобразований Лапласа

$$\dots, L_{-1}, L_0, L_1, L_2, \dots,$$

где $L_{j+1} = \tilde{L}_j$, эквивалентна нелинейной эволюционной системе, которая в современной литературе называется “димеризованной цепочкой Тода”, интегрируемость которой методом теории солитонов была открыта в [27], а с точки зрения теории поля и алгебр Ли – в [28], [29]. Фактически, ряд формальных результатов был получен еще в начале XX века.

Рассмотрим следующие величины – потенциалы цепочки:

$$W_n = \exp f_n.$$

Из (74) мы получаем:

$$W_{n+1} - W_n = e^{f_{n+1}} - e^{f_n} = H_{n+1}, \quad H_{n+1} - H_n = \frac{1}{2} \partial_x \partial_y (f_n).$$

Делая подстановку $f_n = g_n - g_{n-1}$, мы приходим к “димеризованной цепочке Тода”

$$(75) \quad \frac{1}{2} \square g_n = e^{g_{n+1} - g_n} - e^{g_n - g_{n-1}},$$

где $\square = \partial_x \partial_y$.

Далее, Дарбу была поставлена задача о классификации циклических цепочек Лапласа $L_N = L_0$ периода N . Для $N = 2$ он получил, в частности, что решения уравнения

$$(76) \quad \square g = \operatorname{sh} g$$

определяют класс циклических цепочек.

Его ученик, Цицейка ([26]), поставил вопрос: пусть оператор $L_0 = L_N$ таков, что $H_0 = H_N = 0$. Какие нелинейные системы здесь могут возникнуть? Для $N = 3$ он показал, что такие циклические цепочки порождаются, в частности, решениями уравнения

$$\square g = e^g - e^{-2g}.$$

Однако, в гиперболическом случае, рассматривавшемся классиками, ничего, кроме формальных тождеств, нет.

Хорошо поставленные глобальные задачи возникают лишь в эллиптическом случае $\partial_x \rightarrow \bar{\partial}$, $\partial_y \rightarrow \partial$, который мы и рассматриваем в связи со спектральной теорией оператора Шрёдингера в электрическом и магнитном полях для $n = 2$, особенно когда поля являются гладкими неособыми вещественными двоякопериодическими функциями с какой-то решеткой периодов Γ на плоскости $\mathbb{R}^2$.

ПРИМЕР 2. Пусть $N = 1$. Мы имеем

$$L_1 = L_0, \quad H_1 = H_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0, \\ e^{f_1} = e^{f_0} + H_1.$$

Так как $H_1 = H_0$, мы получаем

$$\Delta f_0 = 0.$$

Если f_0 – неособая двоякопериодическая функция (т.е. $W_0 \neq 0$), то $f_0 = \text{const}$.

Так как $f_1 = f_0$, мы имеем $H_1 = 0 = H_0$. Итак, здесь мы получаем лишь свободный оператор в нулевом магнитном поле, но это – следствие глобальных гипотез.

ПРИМЕР 3. Пусть $N = 2$. Мы имеем:

$$f_2 = f_0, \quad H_2 = H_0.$$

Так как $H_1 = H_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0$, $H_2 = H_0 = H_1 + \frac{1}{2}\Delta f_2$, мы получаем

$$\frac{1}{2}\Delta(f_0 + f_1) = 0,$$

или

$$f_0 = -f_1 + a.$$

Далее, так как

$$e^{f_2} = e^{f_0} = e^{f_1} + H_0, \\ e^{f_1} = e^{f_0} + H_1 = e^{f_0} + H_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0,$$

мы получаем

$$2(e^{f_1} - e^{f_0}) = \frac{1}{2}\Delta f_0, \\ 2(e^{-f_0+a} - e^{f_0}) = \frac{1}{2}\Delta f_0.$$

Пусть $g = f_0 - a/2$. Мы получаем

$$2(e^{-g+a/2} + e^{g+a/2}) = \frac{1}{2}\Delta g, \\ e^{a/2} \text{sh } g = \frac{1}{8}\Delta g.$$

Это показывает, что в неособом двоякопериодическом случае все циклические цепочки Лапласа длины $N = 2$ описываются решениями уравнения

$$\gamma e^{a/2} \text{sh } g = \Delta g.$$

Растяжением осей (x, y) мы сводим это к уравнению sh-Гордон

$$(77) \quad \Delta g = \text{sh } g.$$

ПРИМЕР 4. Пусть $N = 3$, $H_0 = 0 = H_N$. Так как

$$H_0 = H_3 = H_2 + \frac{1}{2}\Delta f_2 = H_0 + \frac{1}{2}\Delta(f_0 + f_1 + f_2),$$

мы получаем для неособых двоякопериодических функций f_j :

$$f_0 + f_1 + f_2 = C.$$

Так как

$$e^{f_0} = e^{f_3} = e^{f_2} + H_3 = e^{f_2} + H_0 + \frac{1}{2}\Delta(f_0 + f_1 + f_2) = e^{f_2} + H_0,$$

мы приходим к выводу: если $H_0 = 0$, то мы имеем

$$e^{f_3} = e^{f_2} = e^{f_0}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} 2f_0 + f_1 &= C, & f_1 &= C_2 f_0, \\ e^{f_2} &= e^{f_1} + H_0 + \frac{1}{2}\Delta(f_0 + f_1) = e^{f_0} = e^{f_1} + \frac{1}{2}\Delta(f_0 + f_1). \end{aligned}$$

Окончательно, мы имеем

$$\begin{aligned} e^{f_0} - e^{f_1} &= \frac{1}{2}\Delta(f_0 + f_1), \\ e^{f_0} - e^{C-2f_0} &= \frac{1}{2}\Delta(f_0 + C - 2f_0) = -\frac{1}{2}\Delta f_0. \end{aligned}$$

Пусть $f_0 = g + a$. Мы получаем

$$e^a e^g - e^{C-2g-2a} = -\frac{1}{2}\Delta g.$$

Если $a = C - 2a$, т.е. $a = C/3$, то окончательно мы получаем

$$e^{C/3}(e^g - e^{-2g}) = -\frac{1}{2}\Delta g,$$

или, после растяжения масштабов,

$$\Delta g = e^{-2g} - e^g.$$

В работах [30], [31] доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана циклическая цепочка преобразований Лапласа

$$\dots, L_0, L_1, L_2, \dots, L_N = L_0$$

такая, что операторы цепочки имеют магнитное поле и потенциал гладкие двоякопериодические вещественные. Тогда все операторы цепочки являются топологически тривиальными, алгебро-геометрическими по отношению к нулевому уровню: $L_j \psi = 0$. Блоховские функции нулевого уровня со всеми комплексными квазиимпульсами определены и замечают риманову поверхность конечного рода; коэффициенты операторов L_j выражаются через тэта-функции этой поверхности (“Ферми-кривой”), общей для всех операторов цепочки.

Напомним, что двумерные алгебро-геометрические операторы были введены и изучены в [32], [33], обзор их теории см. в [34].

Идея доказательства этой теоремы может быть понята для $N = 2$, где требование цикличности цепочки при условиях теоремы сводится к уравнению $\Delta g = \text{sh } g$.

При исследовании поверхностей торической топологии в $\mathbb{R}^3$ с постоянной средней кривизной было установлено, что все двоякопериодические неособые решения этого уравнения являются конечнозонными (алгебро-геометрическими) – см. обзор [35]. В конечном счете, это следует из того, что любое многообразие решений нелинейного эллиптического уравнения на торе (компактном многообразии) конечномерно в своей неособой точке. Дальнейшие аргументы, приводящие к конечнозонности решений уравнения $\Delta g = \text{sh } g$, следуют стандартной схеме, развитой еще в 1974 г. для уравнения KdV (см. обзор [2]): коммутирующие потоки линейно зависимы на конечномерном инвариантном подмногообразии.

Естественное обобщение этого соображения на все $N \geq 2$ и приводит к доказательству теоремы, как заметили авторы работ [30], [31].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Полуциклической цепочкой Лапласа называется набор операторов Шрёдингера

$$L_0, \dots, L_N, \quad L_{j+1} = \tilde{L}_j$$

такой, что $L_N = L_0 + C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Квазициклической цепочкой Лапласа называется набор операторов Шрёдингера

$$L_0, \dots, L_N, \quad L_{j+1} = \tilde{L}_j,$$

такой, что крайние операторы полностью факторизованы с постоянным потенциалом:

$$\begin{aligned} 2L_0 &= Q_{01}Q_{02} + 2V_0, & 2L_N &= Q_{N1}Q_{N2} + 2V_N, \\ V_0 &= \text{const}, & V_N &= \text{const}, \\ Q_{j2} &= \bar{\partial} + B_j(z, \bar{z}), & Q_{j1} &= \partial + A_j(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

При этом мы имеем по определению:

$$\begin{aligned} 2L_j &= Q_{j2}Q_{j1} + 2W_j, & W_0 &= -H_0, & W_N &= -H_N, \\ 2\tilde{L}_j &= W_j Q_{j1}^+ W_j^{-1} Q_{j2} + 2W_j. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5. $N = 1$. Полуциклическая цепочка длины 1. Мы имеем

$$\begin{aligned} 2L_1 &= 2L_0 - 2C, & H_1 &= H_0, \\ e^{f_1} &= e^{f_0} + C = e^{f_0} + H_1, & H_1 &= C. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем

$$\Delta f_0 = 0.$$

В неособом двоякопериодическом случае отсюда следует

$$f_0 = \text{const}, \quad H = C.$$

Таким образом, мы приходим к оператору Ландау в однородном постоянном магнитном поле $H = C$ и нулевом потенциале. Исходя из решений (пусть $C > 0$)

$$Q_{02}\psi_0 = 0, \quad L_0\psi_0 = 0, \quad V_0 = 0,$$

мы получаем все уровни Ландау

$$\begin{aligned} (Q_{01})\psi_0 &= \psi_1, \\ 2L_1\psi_1 = 0 &\implies 2L_0\psi_1 = 2C\psi_1, \quad C = H. \end{aligned}$$

Таким образом, из нижнего уровня $Q_0\psi_0 = 0$ мы получаем первый уровень $\psi_1 = Q_0^+\psi_0$. Эти пространства решений бесконечномерны на каждом уровне, которые называются “уровнями Ландау” для оператора Ландау

$$(78) \quad H + 2L_0 = Q_{02}Q_{01} + H, \quad Q_{02}\psi_0 = 0.$$

Его уровни – это

$$(79) \quad \lambda_n = H + 2nH, \quad \psi_n = (Q_{01})^n\psi_0.$$

ПРИМЕР 6. $N = 2$. Полуциклическая цепочка длины 2. Здесь мы имеем

$$H_2 = H_0.$$

В неособом двоякопериодическом случае из равенства

$$H_2 = H_0 + \frac{1}{2}\Delta(f_0 + f_1)$$

следует, что

$$\Delta(f_0 + f_1) = 0 \implies f_0 + f_1 = a.$$

Так как

$$\begin{aligned} e^{f_2} &= e^{f_0} + C = e^{f_1} + H_2 = e^{f_1} + H_0, \\ e^{f_1} &= e^{f_0} + H_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0, \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} e^{f_0} - e^{f_1} &= H_0 - C, \\ -e^{f_1} + e^{f_0} &= -H_0 - \frac{1}{2}\Delta f_0. \end{aligned}$$

Окончательно, имеем

$$\begin{aligned} 2(e^{f_0} - e^{f_1}) &= -C - \frac{1}{2}\Delta f_0, \\ f_1 &= a - f_0. \end{aligned}$$

Итак, мы приходим к уравнению

$$e^{f_0} - e^{a-f_0} + \frac{C}{2} = -\frac{1}{4}\Delta f_0.$$

Пусть $f_0 = g + a/2$. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} e^{g+a/2} - e^{a/2-g} + \frac{C}{2} &= -\frac{1}{4}\Delta g, \\ -2C - 2e^{a/2} \operatorname{sh} g &= \Delta g. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет обширное семейство двоякопериодических неособых вещественных решений.

Решения уравнения $L_N \psi_N = (L_0 + C)\psi_N = 0$ получаются из решений уравнения $L_0 \psi_0 = 0$ цепочкой алгебраических “операторов рождения”

$$\psi_N = Q_{N-1,2} \cdots Q_{0,2}(\psi_0), \quad L_0 \psi_N = (-C)\psi_N.$$

Таким образом, уровни спектра $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = -C$ для оператора L_0 связаны этими операторами и получаются друг из друга. Легко видеть, что магнитно-блоховские решения переходят в магнитно-блоховские при действии этих операторов, если магнитный поток квантован (т.е. блоховские решения определены).

ЛЕММА 9. *Если $C \neq 0$, то магнитный поток неособой полуциклической цепочки с потенциалами, не обращающимися в нуль, отличен от нуля.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Так как $H_{j+1} = H_j + \frac{1}{2}\Delta(f_j)$ и f_j неособо, мы видим, что потоки операторов L_j совпадают: $[H_{j+1}] = [H_j]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Так как

$$e^{f_N} = e^{f_{N-1}} + H_0 + \frac{1}{2}\Delta\left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j\right) = e^{f_0} + C,$$

и $[e^{f_N}] = [e^{f_{N-1}}] + [H]$, мы получаем:

$$[e^{f_N}] = [e^{f_0}] + [C] = [e^{f_0}] + KC = [e^{f_0}] + N[H].$$

Отсюда следует для потока $N[H] = N[H_0] = KC$,

$$(80) \quad C = \frac{N[H]}{K},$$

где K – площадь элементарной ячейки. Итак, лемма доказана.

(У чисто циклических неособых цепочек мы имеем $C = 0$, т.е. поток всегда равен нулю.)

Наибольший интерес представляют квазициклические цепочки, с которыми связаны основные результаты работ [30], [31].

ТЕОРЕМА 3. Пусть задана квазициклическая цепочка Лапласа операторов Шрёдингера

$$L_0, \dots, L_N, \quad L_{j+1} = \tilde{L}_j, \\ 2L_0 = Q_{0,1}^+ Q_{0,2}, \quad 2L_N = Q_{N,1}^+ Q_{N,2} + 2C_N$$

с двоякопериодическими вещественными величинами (f_j, H_j) , причем магнитный поток $[H_j]$ является положительным $[H] > 0$. Тогда оператор L_N обладает двумя сильно вырожденными дискретными уровнями, изоморфными уровням Ландау, один из которых – нижний:

- а) $L_N \psi = C_N \psi$, $Q_N \psi = 0$, $\lambda = C_N$,
- б) $L_N \psi = 0$, $\lambda = 0$.

При этом $C_N = N[H]/K$, где K – площадь элементарной ячейки.

Здесь $Q_{j2} = \bar{\partial} + B_j(z, \bar{z})$, $Q_{j1} = \partial + A_j(z, \bar{z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, решая уравнение

$$Q_{N,2} \psi = 0$$

по схеме работы [31], мы приходим к собственному значению $L_N \psi = C_N \psi$. При этом, если $[H] > 0$, такое решение имеется и дает громадное пространство, изоморфное, согласно [7], [8], [36], уровню Ландау. Базис в этом пространстве, указанный в [7], [8], [36], – это магнитно-блоховский базис, который годится лишь для случая целочисленного потока $[H] = 2\pi t > 0$, но сам результат верен для всех положительных значений потока.

Второй уровень мы получим так. Решим уравнение $Q_{02} \psi = 0$, согласно [7], [8], и получим также при $[H] > 0$ громадное пространство функций ψ , изоморфное уровню Ландау, которое можно задать эллиптическими формулами для целочисленного потока $[H]$, общего для H_0 и H_N ,

$$[H] = [H_0] = [H_N].$$

Затем мы факторизуем оператор L_0 в виде

$$2L_0 = Q_{0,2} Q_{0,1} + 2H_0 = Q_{0,1}^+ Q_{0,2}.$$

Далее, мы применяем к решению $Q_0 \psi = 0$ операторы рождения N раз:

$$\hat{\psi} = Q_{N-1,1} \circ \dots \circ Q_{0,1} \psi.$$

Новая функция $\hat{\psi}$ уже удовлетворяет уравнению

$$L_N \hat{\psi} = 0 = (Q_{N,1} Q_{N,2} + C_N) \hat{\psi}.$$

При этом функция $\hat{\psi}$ лежит в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, если ψ лежала в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

Найдем теперь число C_N . Мы имеем для цепочки Лапласа следующие граничные условия:

$$-e^{f_0} = H_0, \quad -e^{f_N} = H_N + C_N.$$

Для средних значений мы получаем

$$[e^{f_{j+1}}] = [e^{f_j}] + [H_{j+1}] = [e^{f_j}] + [H] = [e^{f_0}] + (j+1)[H] = (j+2)[H].$$

В частности, для $j+1 = N$ мы получаем

$$e^{f_N} = [H] + [C_N] = (N+1)[H],$$

где $[C_N] = KC_N$, или $C_N = N[H]/K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть оператор L задан в самосопряженной форме,

$$Q = Q_1 = \partial + A, \quad Q_2 = -Q^+ = \bar{\partial} + B, \\ \bar{B} = -A.$$

Удобно также выбирать “Лоренцову калибровку”, для которой все формулы написаны в [7], [8]:

$$(81) \quad \text{Im}(A_{\bar{z}}) = 0.$$

Тогда мы имеем:

$$2L = -Q^+Q + 2W = -QQ^+ + 2V.$$

Далее, если $L\psi = 0$, мы совершаем преобразование Лапласа вместе с калибровочным преобразованием

$$L \mapsto e^g \tilde{L} e^{-g}, \quad W = e^f, \\ \tilde{L} = -WQW^{-1}Q^+ + 2W, \\ \tilde{\psi} \mapsto e^g Q\psi = e^g \tilde{\psi}.$$

Выбирая $g = -f/2$, мы получаем оператор $\tilde{\tilde{L}} = e^{-f/2} \tilde{L} e^{f/2}$ в виде

$$\tilde{\tilde{L}} = e^{-f/2} \tilde{L} e^{f/2} = -\tilde{Q}\tilde{Q}^+ + 2W,$$

где $\tilde{Q} = e^{-f/2} Q e^{f/2}$, $\tilde{Q}^+ = e^{f/2} Q^+ e^{-f/2}$. Получается явно самосопряженный оператор в лоренцовой калибровке.

ПРИМЕР 7. Пусть $N = 1$. Мы имеем по определению для L_0 :

$$2L_0 = -Q_0^+ Q_0 = -Q_0 Q_0^+ + 2H_0,$$

где

$$Q_0 = \partial + A, \quad -Q_0^+ = \bar{\partial} + B, \quad H_0 = W_0 = e^{f_0}.$$

Поэтому

$$2L_1 = -(e^{f_0/2} Q_0^+ e^{f_0/2})(e^{f_0/2} Q_0 e^{-f_0/2}) + 2H_0 = \tilde{\tilde{L}}_0 = e^{-f_0/2} \tilde{L}_0 e^{f_0/2}.$$

Из условия квазицикличности при $N = 1$ получаем

$$H_0 = \text{const}, \quad L_1 = L_0 + 2H_0.$$

Мы приходим к оператору Ландау.

ПРИМЕР 8. Пусть $N = 2$.

$$\begin{aligned} 2L_0 &= -Q_0^+ Q_0 = -Q_0 Q_0^+ + 2H_0, & H_0 &= e^{f_0}, \\ 2L_2 &= -Q_2^+ Q_2 + 2C_2 = -Q_2 Q_2^+ + 2C_2 + 2H_2, \\ e^{f_2} &= C_2 + H_2 = e^{f_1} + H_2. \end{aligned}$$

Мы видим, что $e^{f_1} = \text{const}$. Далее,

$$C_2 = e^{f_1} = e^{f_0} + H_1 = e^{f_0} + H_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0,$$

где $H_0 = e^{f_0}$. Отсюда мы имеем

$$\begin{aligned} C_2 - 2e^{f_0} &= \frac{1}{2}\Delta f_0, \\ 2C_2 &= -4e^{f_0} = \Delta f_0. \end{aligned}$$

Полагая $f_0 = g + a$, где $e^a = C_2/2$, мы получим $\Delta g = e^a(1 - e^g)$. Растяжением осей мы приводим это уравнение к виду

$$(82) \quad \Delta g = 1 - e^g.$$

Последнее уравнение обладает обширным семейством гладких вещественных двояко-периодических решений. Даже его решения, зависящие от одной переменной (например, x), которые можно найти квадратурой, дают нам непрерывное семейство, принадлежащее этому классу, с произвольным периодом по y :

$$\begin{aligned} f_0'' &= 2C_2 - 4e^{f_0}, & C_2 &> 0, \\ \tau'' &= -\frac{\partial}{\partial \tau}(U(\tau)), \\ U(\tau) &= -A\tau + 4e^\tau, & \tau &= f_0, & A &= 2C_2. \end{aligned}$$

Зависимость $f_0(x)$ определится квадратурой:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int \frac{d\tau}{\sqrt{-4e^\tau + A\tau + E}}, \\ E &\geq E_{\min} = A\left(1 - \log \frac{A}{4}\right). \end{aligned}$$

Уравнение (82) встречалось в различных физических задачах – теории плазмы, теории сверхпроводимости и т. д. Эктор де Вега сообщил одному из авторов (С. П. Новикову) о том, что уравнение (82) возникло как редукция Богомольного для уравнения Гинзбурга–Ландау при критическом значении параметра, разделяющего сверхпроводники I и II рода (см. [37]). Однако, неясна применимость этой формы уравнения Гинзбурга–Ландау в критической точке. Кроме того, магнитное поле в этой модели отличается от нашего ненулевой константой, и в теории сверхпроводников нужны решения с особенностями.

ГИПОТЕЗА. Для периодов $N \geq 5$ условие квазипериодичности не дает гладких вещественных двоякопериодических решений, кроме константы. Во всяком случае, константа (оператор Ландау) не допускает никаких вариаций – это решение изолировано.

Согласно гипотезе С. П. Новикова, полученный класс операторов является “максимально точно решаемым” среди двумерных операторов Шрёдингера с гладкими вещественными двоякопериодическими электрическим потенциалом и магнитным полем с ненулевым (пусть целочисленным) потоком $[H] = 2\pi m$.

У этих операторов имеется два дискретных уровня с бесконечнократным вырождением, изоморфных уровням Ландау. Один из этих уровней – основной (т.е. самый нижний), а второй заведомо не является ближайшим к первому (не менее одной “магнитной зоны” лежит между ними). Если имеется три сильно вырожденных дискретных уровня, то, как мы полагаем, оператор будет совпадать с оператором Ландау.

Общее устройство спектра операторов Шрёдингера в магнитном поле с целочисленным потоком, интересные аспекты обратной спектральной задачи, геометрические и топологические свойства спектра этих операторов обсуждались в [15], [38], [39].

Если магнитный поток квантован, то мы имеем “магнитно-блховскую функцию” закона дисперсии с номером $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$

$$(83) \quad \hat{T}_1 \psi = e^{ip_1 T_1} \psi, \quad \hat{T}_2 \psi = e^{ip_2 T_2} \psi, \quad L\psi_m = \varepsilon_m(p_1, p_2) \psi_m,$$

$$\psi = \psi_m(x, y, p_1, p_2), [H] = \Phi \in 2\pi\mathbb{Z}, \Phi \neq 0.$$

Пусть, для определенности, функция ψ нормирована аналогично конечнозонной теории [2]:

$$\psi_m(x, y, p_1, p_2)|_{x=x_0, y=y_0} = 1.$$

Функция $\psi_m(x, y, x_0, y_0, p_1, p_2)$ при фиксированной нормировке (x_0, y_0) задана на “фазовом пространстве”

$$(84) \quad (x, y, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2.$$

При этом функция ψ определена с точностью до нормировки

$$(85) \quad \psi_n \mapsto f(p_1, p_2) \psi_n.$$

Многообразие нулей функции ψ_m , $\psi_m = 0$, делится на две части:

1) “Топологические нули”, где $\psi_m(x, y) \equiv 0$ при фиксированных p_1, p_2 ; эта часть нулей меняется при преобразованиях (85), но “алгебраическое число нулей” есть “класс Черна” $c_1^{(m)}$ закона дисперсии с номером m для оператора L общего положения, где законы дисперсии не пересекаются,

$$\varepsilon_{m_1}(p_1, p_2) \neq \varepsilon_{m_2}(p_1, p_2), \quad m_1 \neq m_2;$$

2) “Геометрические нули”, где локально в общей точке можно считать, что

$$(p_1, p_2) = \gamma_m(x, y), \quad m \geq 0.$$

При $m \rightarrow \infty$ законы дисперсии стягиваются к константам:

$$\varepsilon_m(p_1, p_2) \rightarrow \text{const} = (2m + 1)[H],$$

аналогично запрещенным зонам одномерного периодического оператора Шрёдингера.

ЗАДАЧА. Найти аналог “уравнений Дубровина” для набора $\{\gamma_m(x, y)\}$ для всех m ; решить обратную задачу восстановления оператора L , исходя из набора геометрических данных, в фазовом пространстве (84), аналогичных одномерным, не выходя в комплексную область по квазиимпульсам.

§ 5. Разностные уравнения и преобразования Лапласа. Гиперболический случай

Простейшим гиперболическим разностным уравнением на стандартной квадратной решетке Γ в $\mathbb{R}^2$ является

$$(86) \quad a_n \psi_n + b_n \psi_{n+T_1} + c_n \psi_{n+T_2} + d_n \psi_{n+T_1+T_2} = 0,$$

где $n = (n_1, n_2)$ – номер точки решетки, $n_j \in \mathbb{Z}$, $T_1 = (1, 0)$, $T_2 = (0, 1)$ – базисные векторы решетки. Мы будем обозначать также через T_1 , T_2 и базисные операторы сдвига, действующие на функции на $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} T_1 \psi(n_1, n_2) &= \psi(n_1 + 1, n_2), \\ T_2 \psi(n_1, n_2) &= \psi(n_1, n_2 + 1). \end{aligned}$$

Мы можем записать уравнение (86) следующим образом:

$$(87) \quad L\psi = (a_n + b_n T_1 + c_n T_2 + d_n T_1 T_2)\psi = 0.$$

Еще в работе [40] отмечалось, что для уравнения этого вида имеется класс алгебро-геометрических точно решаемых случаев с эффективными тэта-функциональными формулами.

Оператор L определен с точностью до умножения на функцию: $L \mapsto f_n L$. Имеются также калибровочные преобразования, так что вместе имеется совокупность следующих эквивалентностей уравнения (87):

$$(88) \quad L \mapsto f_n L g_n, \quad \psi_n \mapsto g_n^{-1} \psi_n,$$

где f_n, g_n – не обращающиеся в нуль функции на решетке.

ЛЕММА 10. *Оператор L допускает единственное представление в виде*

$$(89) \quad \text{а) } L = f_n ((1 + u_n T_1)(1 + v_n T_2) + w_n)$$

или в виде

$$(90) \quad \text{б) } L = f'_n ((1 + v'_n T_2)(1 + u'_n T_1) + w'_n).$$

При этом коэффициенты u_n, v_n, w_n, f_n для факторизации а) определяются из формул:

$$(91) \quad a_n = f_n(1 + w_n), \quad f_n u_n = b_n, \quad f_n v_n = c_n, \quad f_n u_n v_{n+T_1} = d_n.$$

Доказательство состоит в простой проверке.

Исходя из обеих факторизаций а) и б), мы определяем 2 преобразования Лапласа уравнения (87) $L\psi = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. *Преобразованием Лапласа 1-го типа* называется преобразование

$$(92) \quad \begin{aligned} L &\longmapsto \tilde{L} = \tilde{f}_n(w_n(1 + v_n T_2 w_n^{-1})(1 + u_n T_1) + w_n), \\ \psi &\longmapsto \tilde{\psi} = (1 + v_n T_2)\psi. \end{aligned}$$

Преобразованием Лапласа 2-го типа называется преобразование

$$(93) \quad \begin{aligned} L &\longmapsto \tilde{L}' = \tilde{f}'(w'_n(1 + u'_n T_1)(w'_n)^{-1}(1 + v'_n T_2) + w'_n), \\ \psi &\longmapsto \tilde{\psi}' = (1 + u'_n T_1)\psi. \end{aligned}$$

ЛЕММА 11. *Преобразования Лапласа 1-го и 2-го типов взаимно обратны.*

Доказательство получается простой подстановкой, как и в непрерывном случае.

Мы будем обозначать преобразование Лапласа первого типа через Λ_{12}^{++} , а второго типа – через Λ_{21}^{++} . Предыдущая лемма утверждает, что $\Lambda_{12}^{++}\Lambda_{21}^{++} = 1$.

Уместно отметить, что совершенно аналогичным образом мы можем определить преобразование Лапласа уравнения (86), отвечающее любой паре ортонормированных базисных сдвигов

$$\begin{aligned} (T_1, T_2), (T_2, T_1): & \Lambda_{12}^{++}, \Lambda_{21}^{++}, \\ (T_1^{-1}, T_2), (T_2, T_1^{-1}): & \Lambda_{12}^{-+}, \Lambda_{21}^{+-}, \\ (T_1, T_2^{-1}), (T_2^{-1}, T_1): & \Lambda_{12}^{+-}, \Lambda_{21}^{-+}, \\ (T_1^{-1}, T_2^{-1}), (T_2^{-1}, T_1^{-1}): & \Lambda_{12}^{--}, \Lambda_{21}^{--}. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем восемь преобразований Лапласа $\Lambda_{12}^{\varepsilon\sigma}, \Lambda_{21}^{\varepsilon\sigma}, \varepsilon, \sigma = \pm$, причем

$$\Lambda_{12}^{\varepsilon\sigma}\Lambda_{21}^{\sigma\varepsilon} = 1.$$

Таким образом, преобразования Лапласа здесь образуют группу с четырьмя образующими $\Lambda_{12}^{\varepsilon\sigma}$, структура которой нам пока не известна.

Вернемся теперь к преобразованию Λ_{12}^{++} , описанному выше. Преобразования Лапласа определяются корректно на классах эквивалентности (88). Поэтому они, как и в непрерывном случае, должны записываться на инвариантах классов эквивалентности, аналогичных магнитному полю и электрическому потенциалу.

ЛЕММА 12. *Полный набор инвариантов относительно эквивалентности (88) дается следующими базисными функциями:*

$$(94) \quad K_{1n} = \frac{b_n c_{n+T_1}}{d_n a_{n+T_1}}, \quad K_{2n} = \frac{c_n b_{n+T_2}}{d_n a_{n+T_2}}.$$

Все прочие инварианты выражаются через K_{1n} , K_{2n} и их сдвиги на решетке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство инвариантности этих величин прямое – непосредственная элементарная проверка. Доказательство их полноты удобно проводить для факторизованной формы (89). Выразив a_n, b_n, c_n, d_n через f_n, u_n, v_n, w_n , мы получаем

$$K_{1n} = \frac{1}{1 + w_n}, \quad K_{2n} = \frac{1}{1 + w_{n+T_2}} (v_n u_{n+T_2} v_{n+T_1}^{-1} u_n^{-1}).$$

При этом очевидно, что потенциал w_n является калибровочным инвариантом, а функция f_n может быть сокращена в классах эквивалентности. Таким образом, все сводится к калибровочной эквивалентности при $f_n = 1$. Здесь калибровочным инвариантом является “потенциал” w_n и “кривизна”

$$(95) \quad H = v_n u_n^{-1} u_{n+T_2} v_{n+T_1}^{-1} = \frac{v_n u_{n+T_2}}{u_n v_{n+T_1}}.$$

Следует найти все калибровочные инварианты оператора

$$L_0 = (1 + u_n T_1)(1 + v_n T_2)$$

относительно преобразований

$$L_0 \mapsto \tau_n (1 + u_n T_1)(1 + v_n T_2) \tau_n^{-1} = \left(1 + u_n \frac{\tau_n}{\tau_{n+T_1}} T_1\right) \left(1 + v_n \frac{\tau_n}{\tau_{n+T_2}} T_2\right).$$

Эта задача легко сводится к классификации калибровочно инвариантных мономов – произведений величин $u_{n+kT_1+lT_2}, v_{n+kT_1+lT_2}$ для разных (конечного числа) k, l . Элементарная комбинаторика приводит к заключению, что все эти мономы являются произведениями мономов (94) и их сдвигов в каких-то степенях. Мы опустим эти детали.

Мы будем использовать базис инвариантов w_n, H_n , аналогично непрерывному случаю.

ЛЕММА 13. *Преобразование Лапласа для инвариантов имеет вид*

$$(96) \quad 1 + \tilde{w}_{n+T_1} = (1 + w_{n+T_2}) \frac{w_n w_{n+T_1+T_2}}{w_{n+T_1} w_{n+T_2}} H_n^{-1},$$

$$\tilde{H}_n = \frac{1 + w_{n+T_2}}{1 + \tilde{w}_{n+T_2}}.$$

Доказательство получается подстановкой выражений для $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ через $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$. Рассмотрим теперь бесконечную цепочку преобразований Лапласа для величин

$$\tilde{H}_n^{(k)} = H_n^{(k+1)}, \quad \tilde{w}_n^{(k)} = w_n^{(k+1)},$$

где $n = (n_1, n_2), k \in \mathbb{Z}$, причем $H_n^{(k+1)}, w_n^{(k+1)}$ получается из предыдущего преобразованием Лапласа. Исключив величину $H_n^{(k)}$ из уравнений, мы получим “полностью дискретный аналог двумеризованной цепочки Тода”:

$$\frac{1 + w_{n+T_1}^{(k+2)}}{1 + w_{n+T_1}^{(k+1)}} \frac{1 + w_{n+T_2}^{(k+1)}}{1 + w_{n+T_2}^{(k)}} = \frac{w_{n+T_1}^{(k)} w_{n+T_2}^{(k)}}{w_n^{(k)} w_{n+T_1+T_2}^{(k)}}.$$

ЗАДАЧА. Найти сопоставление этого полностью дискретного аналога двумеризованной цепочки Тода с системами, изучавшимися в [41], исходя из теории уравнения “Янга–Бакстера”.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим циклическую цепочку длины $N = 2$. После незначительных вычислений мы получаем:

$$w_n^{(1)} = C(w_n^{(0)})^{-1},$$

$$w_{n+T_1+T_2} = w_n^{-1}(C + w_{n+T_1})(C + w_{n+T_2})(1 + w_{n+T_1})^{-1}(1 + w_{n+T_2})^{-1}.$$

Отметим в заключение, что имеется, как указывалось выше, группа всех гиперболических преобразований Лапласа, порожденная четырьмя базисными преобразованиями $\Lambda_{12}^{\varepsilon\sigma}$, $\varepsilon, \sigma = \pm$, отвечающими выбору базисов $(T_1^\varepsilon, T_2^\sigma)$. В принципе, любому слову в этой группе отвечает условие цикличности цепочки. Однако, структура этой группы пока неизвестна.

§ 6. Преобразование Лапласа для эллиптических двумерных разностных операторов на правильной решетке. Уравнения треугольника, кривизна

Оказывается, в эллиптическом случае преобразования Лапласа не могут быть определены для разностных операторов второго порядка на квадратной решетке. Чтобы дать их правильное определение, надо следовать двум принципам.

I. Для того, чтобы в разностном случае сохранялись непрерывные и дискретные “спектральные симметрии” непрерывных операторов Шрёдингера, все сдвиги следует считать ковариантными, как и в одномерном случае (см. § 3).

II. В двумерном случае для эллиптических операторов следует квадратную решетку заменить на правильную треугольную, где следующие сдвиги имеют одинаковую длину:

$$(97) \quad T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, (T_1 T_2)^{\pm 1}.$$

Обозначим любую пару соседних сдвигов (97) (идущих против часовой стрелки) через T_1^*, T_2^* и сопоставим такой паре преобразование Лапласа, порожденное факторизацией

$$(98) \quad L = (x_n + y_n T_1^* + z_n T_2^*)(x_n + y_{n-T_1^*} T_1^{*-1} + z_{n-T_2^*} T_2^{*-1}) + w_n,$$

где самосопряженный оператор L имеет вид

$$(99) \quad L = a_n + b_n T_1 + c_n T_2 + d_{n-T_2} T_1 T_2^{-1} + b_{n-T_1} T_1^{-1} + c_{n-T_2} T_2^{-1} + d_{n-T_1} T_2 T_1^{-1},$$

причем все коэффициенты вещественны и $b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}_+$. Легко видеть, что коэффициент a_n — это числовая функция на решетке $\mathbb{Z}^2$, в то время как коэффициенты b_n, c_n, d_n — это связность, сидящая на соответствующих ребрах решетки. В результате оператор содержит взаимодействие каждой вершины со всеми шестью ближайшими соседями, причем все ребра имеют одинаковую длину. Мы исходим из следующего наблюдения ([42], [43]).

ЛЕММА 14. Самосопряженный вещественный оператор вида (99) с ненулевыми коэффициентами b_n, c_n, d_n всегда допускает однозначное представление в виде

$$(100) \quad L = QQ^+ + w_n, \quad Q = x_n + y_n T_1 + z_n T_2,$$

где $T_1^+ = T_1^{-1}$, $T_2^+ = T_2^{-1}$, $(AB)^+ = B^+ A^+$. При этом имеют место равенства

$$(101) \quad \begin{aligned} x_n y_{n-T_1} &= b_{n-T_1}, \\ x_n z_{n-T_2} &= c_{n-T_2}, \\ y_{n-T_1} z_{n-T_2} &= d_{n-T_1-T_2}. \end{aligned}$$

Всего, следуя [42], [43], мы получаем шесть различных факторизаций, соответствующих следующим шести парам периодов (T_1^*, T_2^*) : 1) (T_1, T_2) , 2) $(T_2, T_1^{-1} T_2)$, 3) $(T_1^{-1} T_2, T_1^{-1})$, 4) (T_1^{-1}, T_2^{-1}) , 5) $(T_2^{-1}, T_2^{-1} T_1)$, 6) $(T_2^{-1} T_1, T_1)$,

$$L = Q_j Q_j^+ + w_{jn},$$

$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. j определено по модулю 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Преобразованием Лапласа P_j типа j называется следующее:

$$(102) \quad \begin{aligned} P_j: L &\mapsto \tilde{L}^{(j)} = w_{jn}^{1/2} Q_j^+ w_{jn}^{-1} Q_j w_{jn}^{1/2} + w_{jn}, \\ P_j: \psi &\mapsto \tilde{\psi} = w_{jn}^{-1/2} Q_j^+ \psi. \end{aligned}$$

Оно определено, если $w_{jn} > 0$.

ЛЕММА 15. Преобразования Лапласа P_j и P_{j+3} взаимно обратны. Остальные связаны следующими соотношениями:

$$(103) \quad \begin{aligned} w_{1n} &= w_{3n} = w_{5n}, \\ Q_1 &= Q_3 T_1 = Q_5 T_2, \\ \tilde{L}^{(1)} &= \sqrt{\frac{w_n}{w_{n-T_1}}} T_1^{-1} \tilde{L}^{(3)} T_1 \sqrt{\frac{w_n}{w_{n-T_1}}} = \sqrt{\frac{w_n}{w_{n-T_2}}} T_2^{-1} \tilde{L}^{(5)} T_2 \sqrt{\frac{w_n}{w_{n-T_2}}}. \end{aligned}$$

В классе эквивалентности

$$(104) \quad L \mapsto f_n L f_n$$

операторы $\tilde{L}^{(1)}, \tilde{L}^{(3)}, \tilde{L}^{(5)}$ унитарно сопряжены.

Для $j = 2, 4, 6$ имеют место аналогичные формулы:

$$\tilde{L}^{(4)} = \sqrt{\frac{w_n}{w_{n+T_1}}} T_1 \tilde{L}^{(6)} T_1^{-1} \sqrt{\frac{w_n}{w_{n+T_1}}} = \sqrt{\frac{w_n}{w_{n+T_2}}} T_2 \tilde{L}^{(2)} T_2^{-1} \sqrt{\frac{w_n}{w_{n+T_2}}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В определении преобразований Лапласа можно отказаться от требования $w_n > 0$, заменив его на условие $w_n \neq 0$, и положить

$$\tilde{L}^{(j)} = Q_j^+ w_{jn}^{-1} Q_j + 1, \quad \tilde{\psi} = Q_j^+ \psi.$$

Мы получим те же преобразования с точностью до эквивалентности (104), но P_j и P_{j+3} не будут в точности взаимно обратными. Отметим, что в дискретном случае, в отличие от непрерывного, условие $w \neq 0$ не означает знакопостоянства функции w .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Соотношения (103) не были замечены в [42]–[44].

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если потенциал $w_n \equiv w_0$ является константой (например, для 1-й факторизации), то преобразование Лапласа

$$P_1: L \mapsto \tilde{L}^{(1)}$$

действует на собственные функции всех уровней $L\psi = \lambda\psi$:

$$P_1\psi = Q_1^+\psi, \quad P_1L = Q_1^+Q_1 + w_0 = \tilde{L}^{(1)}.$$

В рамках класса эквивалентности (104) вещественных самосопряженных операторов всегда можно добиться того, чтобы было $w_n = \text{const}$, если $w_n = \exp f_n \neq 0$. Однако, эти преобразования осуществляют формальную эквивалентность спектральных теорий только на нулевом уровне $L\psi = 0$, и поэтому применять преобразование Лапласа ко всем уровням можно, вообще говоря, только один раз (особые случаи см. ниже).

Доказательство леммы можно получить непосредственной проверкой.

Исследование циклических цепочек разностных операторов не проводилось. Представляют интерес классы чисто факторизуемых операторов вида а) или б):

$$\text{а) } L = Q^+Q; \quad \text{б) } \tilde{L} = QQ^+,$$

где

$$(105) \quad Q = 1 + ce^{l_1(n)}T_1 + de^{l_2(n)}T_2,$$

а

$$l_j(n) = l_{j1}n_1 + l_{j2}n_2$$

– линейные формы от $n = (n_1, n_2)$.

Рассмотрим, следуя [43], [44], “уравнение черных треугольников”, имеющих вид $\langle n, n + T_1, n + T_2 \rangle$:

$$Q\psi = 0,$$

и “уравнение белых треугольников”, имеющих, соответственно, вид $\langle n, n - T_1, n - T_2 \rangle$:

$$Q^+\psi = 0.$$

ТЕОРЕМА 4. 1) *Уравнение черных треугольников $Q\psi = 0$ заведомо имеет бесконечномерное пространство решений $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$, если выполнено одно из следующих условий:*

- а) $l_{11}, l_{22} > 0, l_{11}l_{22} - l_{12}^2 > 0$;
- б) $l_{11}, l_{22} > 0, l_{11}l_{22} - l_{21}^2 > 0$;
- в') $l_{11} > 0, l_{11}l_{22} - l_{12}^2 > l_{11}(l_{21} - l_{12})$;
- в'') $l_{22} > 0, l_{11}l_{22} - l_{21}^2 > l_{22}(l_{21} - l_{12})$.

2) *Уравнение белых треугольников $Q^+\psi = 0$ заведомо обладает бесконечномерным пространством решений $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$, если выполнено одно из следующих условий, которые получаются из предыдущих заменой $l_{ij} \rightarrow -l_{ij}$:*

- а) $l_{11}, l_{22} < 0, l_{11}l_{22} - l_{12}^2 > 0$;
- б) $l_{11}, l_{22} < 0, l_{11}l_{22} - l_{21}^2 > 0$;
- в') $l_{11} < 0, l_{11}l_{22} - l_{12}^2 > l_{11}(l_{12} - l_{21})$;
- в'') $l_{22} < 0, l_{11}l_{22} - l_{21}^2 > l_{22}(l_{12} - l_{21})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы явно построим решения наших уравнений при выполнении указанных условий. Разберем сначала случай черных треугольников. Будем искать решение в виде

$$\psi_n = e^{-K_2(n)} \chi_n,$$

где

$$K_2(n) = \alpha n_1^2 + 2\beta n_1 n_2 + \delta n_2^2.$$

Для χ_n получаем уравнение

(106)

$$0 = \chi_n + ce^{-\alpha} e^{(l_{11}-2\alpha)n_1 + (l_{12}-2\beta)n_2} \chi_{n+T_1} + de^{-\delta} e^{(l_{21}-2\beta)n_1 + (l_{22}-2\delta)n_2} \chi_{n+T_2}.$$

Рассмотрим три случая:

- а) коэффициенты (106) зависят только от n_1 ;
- б) коэффициенты (106) зависят только от n_2 ;
- в) коэффициенты (106) зависят только от $n_1 + n_2$.

Это приводит, соответственно, к условиям:

- а) $l_{12} = 2\beta, l_{22} = 2\delta$;
- б) $l_{11} = 2\alpha, l_{21} = 2\beta$;
- в) $l_{11} - 2\alpha = l_{12} - 2\beta, l_{21} - 2\beta = l_{22} - 2\delta$.

В случае а) делаем подстановку

$$(107) \quad \chi_n = w^{n_2} \varphi_{n_1}$$

и получаем уравнение на φ_m :

$$0 = \varphi_m + ce^{-\alpha} e^{(l_{11}-2\alpha)(m+1)} \varphi_{m+1} + wde^{-\delta} e^{(l_{21}-l_{12})m} \varphi_m.$$

Положим дополнительно $l_{11} = 2\alpha$. После этого мы получим

$$(108) \quad (1 + wce^{-l_{22}/2} e^{(l_{21}-l_{12})m}) \varphi_m = -ce^{-\alpha} \varphi_{m+1}.$$

Возможны два случая.

Случай 1. $l_{21} > l_{12}$. Выберем такое значение w_q , что

$$(109) \quad 1 + w_q de^{-\delta/2} e^{(l_{21}-2\beta)q} = 0,$$

где $2\delta = l_{22}$, $2\beta = l_{12}$. Из этого мы получим “условие квантования”, выделяющее дискретный ряд допустимых значений $w = w_q$, где q пробегает $\mathbb{Z}$. При этом условии $\varphi_m^{(q)} = 0$ при $m > q$.

Далее, рассмотрим соотношение

$$\varphi_m^{(q)} = -(ce^{-\alpha})(1 + w_q e^{k_2 - \delta} e^{(l_{21}-2\beta)m})^{-1} \varphi_{m+1}$$

при $m \rightarrow \infty$. Если $l_{21} - 2\beta > 0$, то при $m < 0$ и $|m| \rightarrow \infty$ мы будем иметь асимптотику

$$\varphi_m^{(q)} \sim (\text{const})^{|m|}.$$

Наше решение построено в виде

$$(110) \quad \psi_n^{(q)} = e^{-K_2(n)} w^{n_2} \varphi_{n_1}^{(q)},$$

где $2K_2(n) = l_{11}n_1^2 + 2l_{12}n_1n_2 + l_{22}n_2^2$. Эта форма строго положительна, если и только если

$$l_{11} > 0, \quad l_{22} > 0, \quad l_{11}l_{22} - l_{12}^2 > 0.$$

Функция $\psi_n^{(q)}$ заведомо принадлежит пространству $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$ и обращается в нуль при $n_1 > q$.

Случай 2. $l_{12} \geq l_{21}$. В этом случае решение φ_m уравнения (108) растет не быстрее, чем $(\text{const})^{|m|}$, $m \rightarrow \pm\infty$, при любом w .

Итак, мы построили нужное решение для случая а) черных треугольников.

В случае б) мы меняем местами n_1 и n_2 . В случае в) мы требуем зависимости φ только от $n_1 + n_2$. Например, в случае в') мы полагаем

$$2K_2(n) = l_{11}n_1^2 + 2l_{12}n_1n_2 + (l_{22} - l_{21} + l_{12})n_2^2$$

и делаем подстановку

$$\chi_n = w^{n_1} \varphi_{n_1+n_2}.$$

На функцию φ_n получаем следующее уравнение

$$\varphi_n + (cwe^{-l_{11}/2} + de^{(l_{21}-l_{12}-l_{22})/2}e^{(l_{21}-l_{12})(n_1+n_2)})\varphi_{n+1} = 0.$$

В случаях а)–в) для белых треугольников мы действуем полностью аналогично.

Других случаев, когда решения лежат в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$, пока найти не удалось.

Форма $K_2(n)$ может быть записана следующим образом.

Случай черных треугольников:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2K_2 &= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}; \\ \text{б) } 2K_2 &= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}; \\ \text{в') } 2K_2 &= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} - l_{21} + l_{12} \end{pmatrix}; \\ \text{в'') } 2K_2 &= \begin{pmatrix} l_{11} - l_{21} + l_{12} & l_{21} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Случай белых треугольников:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2K_2 &= \begin{pmatrix} -l_{11} & -l_{12} \\ -l_{12} & -l_{22} \end{pmatrix}; \\ \text{б) } 2K_2 &= \begin{pmatrix} -l_{11} & -l_{21} \\ -l_{21} & -l_{22} \end{pmatrix}; \\ \text{в') } 2K_2 &= \begin{pmatrix} -l_{11} & -l_{12} \\ -l_{12} & -l_{22} + l_{21} - l_{12} \end{pmatrix}; \\ \text{в'') } 2K_2 &= \begin{pmatrix} -l_{11} + l_{21} - l_{12} & -l_{21} \\ -l_{21} & -l_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Можно наложить аналогичные условия на коэффициенты l_{ij} и их связь с α, β, δ , требуя, чтобы коэффициенты уравнения (106) для χ_n зависели только от комбинации вида $(\kappa n_1 + \tau n_2)$. Если $(\kappa n_1 + \tau n_2)$ и $(un_1 + vn_2)$ – базис решетки, то условие зависимости только от одной переменной имеет вид:

$$\begin{aligned} (111) \quad & (l_{11} - 2\alpha)\tau = (l_{12} - 2\beta)\kappa, \\ & (l_{21} - 2\beta)\tau = (l_{22} - 2\delta)\kappa. \end{aligned}$$

После этого можно искать решение в виде

$$(112) \quad \chi_n = w^{un_1 + vn_2} \varphi_{\kappa n_1 + \tau n_2}.$$

Далее, для функции φ_s , $s \in \mathbb{Z}$, получится разностное уравнение вида

$$(113) \quad 0 = \varphi_s + A(s)\varphi_{s+\kappa} + B(s)\varphi_{s+\tau}.$$

Только в трех указанных выше случаях это уравнение легко решается:

$$\text{а) } \kappa = 1, \tau = 0; \quad \text{б) } \kappa = 0, \tau = 1; \quad \text{в) } \kappa = \tau = 1.$$

В остальных случаях получаются разностные уравнения порядка 2 и выше. Нам не известно, как можно было бы найти их решения, приводящие к функциям $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$.

Из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *При указанных в теореме условиях положительные операторы $L = QQ^+$ или $\tilde{L} = Q^+Q$ имеют спектр в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$ такой, что точка $\lambda = 0$ является бесконечнократно вырожденной точкой дискретного спектра, собственные функции для которой удовлетворяют уравнению черных или белых треугольников*

$$1) \quad Q\psi = 0 \quad \text{или} \quad 2) \quad Q^+\psi = 0.$$

Собственные функции основного состояния $\lambda = 0$ могут быть указаны явными формулами, вытекающими из данного выше построения.

Это утверждение является разностным аналогом результатов [7], [8], [36] об основных состояниях оператора Паули в непрерывном чисто магнитном случае.

Задачи. 1. Доказать, что построенные пространства решений уравнений $Q\psi = 0$ и $Q^+\psi = 0$ полны в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$ среди всех решений, найти удобные ортонормированные базисы. Выяснить, какие имеются случаи разрешимости в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$ уравнений черных или белых треугольников, кроме найденных выше. Даже в классе операторов, коэффициенты которых являются экспонентами от линейных форм $l_j(n)$, этот вопрос не решен.

2. Доказать, что при выполнении условий теоремы спектр операторов $L = QQ^+$ и $L = \tilde{Q}^+Q$ содержит нетривиальную щель Δ между основным состоянием $\lambda_0 = 0$ и следующим уровнем $\lambda_1 \geq \Delta > 0$.

3. Найти класс операторов Q таких, что спектр операторов $L = QQ^+$ и $\tilde{L} = Q^+Q$ начинается с точки $\lambda = 0$ и непрерывен, т.е. точка $\lambda = 0$ является дном непрерывного спектра ($\Delta = 0$).

Последняя задача представляет особый интерес. Мы рассмотрим ниже алгебраические условия типа коммутирования операторов Q, Q^+ , которые предположительно приводят к ситуации, обсуждаемой в задаче 3.

Для начала мы рассмотрим разностные (чисто вещественные) q -аналоги непрерывного оператора Шрёдингера–Ландау в однородном (постоянном) магнитном поле.

Пусть операторы Q, Q^+ имеют вид (105):

$$Q_{c,d} = 1 + ce^{l_1(n)}T_1 + de^{l_2(n)}T_2,$$

и зависят от параметров

$$c = e^{k_1}, \quad d = e^{k_2}, \quad l_j = l_{j1}n_1 + l_{j2}n_2.$$

ЛЕММА 16. Операторы Q, Q^+ вида (105) удовлетворяют соотношению

$$(114) \quad Q_{c,d}Q_{c,d}^+ - 1 = q(Q_{c',d'}^+Q_{c',d'} - 1),$$

если матрица l_{ij} и параметры c, d, c', d' связаны следующими равенствами:

$$(115) \quad \begin{aligned} c &= u^{-2}c', & d &= u^{-2}d', & q &= u^{-2}, & u &= e^{l_{11}}, \\ 2l_{11} &= 2l_{22} = l_{12} + l_{21}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В обозначениях

$$e^{l_{11}} = u, \quad e^{l_{12}} = v$$

оператор Q запишется в виде

$$(116) \quad Q_{c,d} = 1 + cu^{n_1}v^{n_2}T_1 + d(u^2/v)^{n_1}u^{n_2}T_2.$$

Зависимость от параметров (u, v) в (114) опущена. Такие обозначения использовались в [43], где эти операторы были впервые введены и найдены собственные функции.

Доказательство леммы состоит в прямой проверке.

Сопоставляя результат леммы с теоремой 4 выше, мы получаем следующий результат ([43]).

ТЕОРЕМА 5. Рассмотрим операторы $L = QQ^+$ и $\tilde{L} = Q^+Q$ при условиях (115). Спектр этих операторов в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ при $0 \leq \lambda < 1$ является чисто дискретным, бесконечнократно вырожденным и может лежать лишь в следующих точках:

$$(117) \quad \text{а) } \lambda_j = 1 - u^{2j}, \quad j \geq 0, \quad u < 1;$$

$$(118) \quad \text{б) } \lambda_j = 1 - u^{-2j}, \quad j \geq 0, \quad u > 1.$$

В следующих случаях спектр оператора L занимает все точки (117), а спектр оператора $\tilde{L}$ – все точки (118), кроме λ_0 :

$$(119) \quad \text{а') } u^{-3} > v^{-1} > u^{-1} > 1; \quad \text{а'') } u^{-1} > \max(v, v^{-1}) \geq 1.$$

Аналогично, спектр оператора $\tilde{L}$ занимает все точки (118), а L – все, кроме λ_0 , если выполнено одно из следующих условий:

$$(120) \quad \text{б') } u^3 > v > u > 1; \quad \text{б'') } u > \max(v, v^{-1}) \geq 1.$$

Все собственные функции, обсуждаемые в теореме, получаются из решений уравнений $Q\psi = 0$ или $Q^+\psi = 0$ при надлежащих значениях констант c, d, u, v применением “операторов рождения”:

$$1) \quad Q_{c,d}\tilde{\psi}_0 = 0, \quad \tilde{L}_{c,d}\tilde{\psi}_0 = Q_{c_0,d_0}^+Q_{c_0,d_0}\tilde{\psi}_0 = 0, \quad \tilde{\psi} = Q_{c_0,d_0}^+ \circ \dots \circ Q_{c_{k-1},d_{k-1}}^+ \tilde{\psi}_0, \\ \tilde{L}_{c_0,d_0}\psi = (1 - u^{\pm 2k})\psi;$$

$$2) \quad Q^+\psi_0 = 0, \quad L_{c,d}\psi_0 = Q_{c,d}Q_{c,d}^+\psi_0 = 0, \quad \psi = Q_{c_0,d_0} \circ \dots \circ Q_{c_{k-1},d_{k-1}}\psi_0, \quad L_{c_0,d_0}\psi = (1 - u^{\pm 2k})\psi,$$

$$c_j = u^2c_{j-1}, \quad d_j = u^2d_{j-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Из двух случаев, упомянутых в доказательстве теоремы 4, в данной ситуации реализуется только случай 1, в котором найденные собственные функции $\psi^{(q)}$ обнуляются на целой полуплоскости.

Ситуация, описанная в теореме 5, полностью аналогична [22], т.е. теореме 1 из §3. Отличие состоит в том, что при $n = 2$ пространства решений бесконечномерны (полнота найденных решений на соответствующих уровнях пока не установлена).

Заметим, что условия (119), (120) непосредственно получаются из условия теоремы 4 выше, но случай в) здесь не реализуется при условиях (115).

ЗАДАЧА. Доказать, что спектр оператора $L = Q_{c,d}Q_{c,d}^+$ и $\tilde{L} = Q_{c,d}^+Q_{c,d}$ в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$ при $\lambda \geq 1$ непрерывен и замывает всю полуось $\lambda \geq 1$. Как мы полагаем, это – простой лебеговский спектр.

Обратим внимание на то, что наши операторы Q зависят от констант c, d, u, v (если зависимость от u, v явно не пишется, то в данной формуле считается, что u, v не меняются). Верны формулы

$$(121) \quad \begin{aligned} T_1 Q_{c,d} T_1^{-1} &= Q_{c',d'}, & c' &= cd^{l_{11}}, & d' &= de^{l_{12}}, \\ T_2 Q_{c,d}^+ T_2^{-1} &= Q_{c'',d''}, & c'' &= cd^{l_{12}}, & d'' &= de^{l_{22}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{c,d} &= 1 + ce^{l_1(n)}T_1 + de^{l_2(n)}T_2, \\ Q_{c,d}^+ &= q + ce^{l_1(n-T_1)}T_1^{-1} + de^{l_2(n-T_2)}T_2^{-1}. \end{aligned}$$

То же самое верно и для операторов $L = QQ^+, \tilde{L} = Q^+Q$:

$$\begin{aligned} T_1 L_{c,d} T_1^{-1} &= L_{c',d'}, \\ T_2 L_{c,d} T_2^{-1} &= L_{c'',d''}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Мы будем называть *собственным вектор-сечением* функцию $\psi_{c,d}(n)$, аналитически зависящую от всех параметров c, d, u, v , такую, что

$$L\psi = \lambda\psi \quad \text{или} \quad \tilde{L}\psi = \lambda\psi,$$

где λ не зависит от параметров. *Блоховским вектор-сечением* $\psi_{c,d}(n, p)$ мы назовем такое ψ , что

$$L\psi = \lambda\psi, \quad T_1\psi_{c,d} = e^{ip_1}\psi_{c',d'}, \quad T_2\psi_{c,d} = e^{ip_2}\psi_{c'',d''}.$$

В силу (121) функции $T_j\psi_{c,d}$ удовлетворяют тем же уравнениям, но со сдвинутыми параметрами (c', d') или (c'', d'') . Это определение имеет смысл и в одномерном случае (54), где мы имели

$$\begin{aligned} Q_c &= 1 + ce^{l(n)}T, & l(n) &= ln, \\ T &= T_1, \quad n = n_1, & T_1 Q_c T_1^{-1} &= Q_{ca}, \quad a = e^l. \end{aligned}$$

Построим блоховское вектор-сечение для $\lambda = 0$ при $a > 1$. Выберем $c = c_0 > 0$. Положим, выбирая любое ψ_{0,c_0} :

$$(122) \quad \psi_{c_0 a^m}(n, p) = T_1^m(\psi_{0,c_0}(n))e^{-imp}.$$

Ограничения на построение возникают при $a \rightarrow 1$. Решений в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ вообще нет при $a < 1$, если мы говорим об уравнении $Q_c \psi = 0$, отвечающем $\lambda = 0$. Поэтому $a \geq 1$, $c \neq 0$.

При $a \rightarrow 1 + 0$ оператор стремится к оператору с постоянными коэффициентами, где имеются сингулярности блоховского вектор-сечения.

По-видимому, при $|c| \rightarrow 1, a \rightarrow 1$ можно говорить о переходе блоховского вектор-сечения, отвечающего $\lambda \leq 1$, в обычное блоховское решение для уравнения с постоянными коэффициентами (т.е. решение типа чистой экспоненты), так как для $c \neq 0$ спектр оператора при $a = 1$ имеет вид $(1 - |c|)^2 \leq \lambda \leq (1 + |c|)^2$.

Кроме того, при $a = 1$ спектр ограничен в $\mathcal{L}_2$, $|\lambda| \leq (1 + |c|)^2$, в то время как при $a > 1$ оператор заведомо неограничен. Таким образом, здесь обязательно имеется сингулярность. При $\lambda \geq 1$ ситуация не ясна.

ЗАДАЧА. Построить для операторов $L = QQ^+$ или $\tilde{L} = Q^+Q$, коэффициенты которых являются экспонентами от линейных функций, полный базис собственных функций в виде “блоховских сечений”, зависящих аналитически от всех параметров c, d, l_{ij} и имеющих минимально возможные особенности в подмногообразиях, где мы имеем операторы с постоянными коэффициентами по какой-то из переменных.

Обратимся теперь к случаю, когда точка $\lambda = 0$ является предположительно нижней границей непрерывного спектра для операторов вида

$$(123) \quad L = QQ^+,$$

где Q имеют вид (105).

ГИПОТЕЗА. Если операторы Q, Q^+ коммутируют, $QQ^+ = Q^+Q$, и существует их общее решение $Q\psi = 0, Q^+\psi = 0$, ограниченное на решетке $\mathbb{Z}^2$ (или растущее достаточно медленно?), то точка $\lambda = 0$ является нижней границей непрерывного спектра в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$ для оператора $L = \tilde{L}$. Естественное обобщение этой гипотезы мы укажем ниже.

ПРИМЕР 10. Пусть операторы $Q_{c,d}, Q_{c,d}^+$ таковы, что $l_{11} = l_{22} = 0$, или $u = 1$. Тогда мы имеем

$$(124) \quad Q_{c,d}Q_{c,d}^+ = Q_{c,d}^+Q_{c,d},$$

как следует из (114). Операторы имеют вид

$$(125) \quad \begin{aligned} Q_{c,d} &= 1 + cv^{n_2}T_1 + dv^{-n_1}T_2, \\ Q_{c,d}^+ &= 1 + cv^{n_2}T_1^{-1} + dv^{-n_1}T_2^{-1}. \end{aligned}$$

Поставим следующий вопрос. Пусть заданы два оператора вида

$$(126) \quad Q_1 = 1 + a_n T_1 + b_n T_2, \quad Q_2 = 1 + c_n T_1^{-1} + d_n T_2^{-1}$$

с коэффициентами, не обращающимися в нуль. Рассмотрим систему уравнений черных и белых треугольников вместе:

$$(127) \quad \begin{cases} Q_1 \psi = 0, \\ Q_2 \psi = 0. \end{cases}$$

В таком случае система (127) полностью локально совместна?

Более содержательная постановка такова. Пусть задано “начальное условие” для (127) в виде двух произвольных значений ψ в концах любого ребра решетки (например, ψ_{n-T_1} и ψ_n). Используя уравнения (127), мы можем решить систему и найти значение в любой другой точке $n' \in \mathbb{Z}^2$, двигаясь вдоль пути из треугольников – черных и белых: зная значения в концах любого ребра, мы найдем значение в третьей вершине любого черного или белого треугольника, имеющего это ребро своей гранью. Рассматривая пучок из шести треугольников с общей вершиной n , мы можем пройти по циклу и вернуться снова к ребру $[n - T_1, n]$, причем линейное “преобразование кривизны” будет задано верхнетреугольной (2×2) -матрицей:

$$\begin{aligned} \psi_{n-T_1}^{(new)} &= A_n \psi_{n-T_1}^{(old)} + B_n \psi_n^{(old)}, \\ \psi_n^{(new)} &= \psi_n^{(old)}. \end{aligned}$$

Коэффициенты матрицы – это “кривизны” A_n, B_n . Они выражаются через коэффициенты системы (127):

$$(128) \quad \begin{aligned} A_n &= \frac{b_{n-T_1} d_{n+T_1}}{b_n c_{n+T_2} d_n a_{n-T_2}}, \\ B_n &= \frac{b_{n-T_1}}{c_{n+T_2}} \left(\frac{1}{b_n} \left(\frac{d_{n+T_1}}{a_{n-T_2}} \left(\frac{1}{d_n} - b_{n-T_2} \right) - c_{n+T_1} + 1 \right) - d_{n+T_2} \right) - a_{n-T_1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 17. *Условие $A_n = 1, B_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}^2$ является необходимым и достаточным для возможности однозначного решения системы (127) на плоскости $\mathbb{Z}^2$ при произвольных начальных условиях, заданных в концах любого фиксированного ребра. Для этого также необходимо и достаточно выполнение следующего алгебраического соотношения на операторы Q_1, Q_2 :*

$$(129) \quad ((Q_1 - 1)(Q_2 - 1) - 1) = f_n((Q_2 - 1)(Q_1 - 1) - 1), \quad f_n \neq 0.$$

Доказательство леммы мы опускаем.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если система (127) полностью совместна, то ее решение определяется произвольным решением одномерного разностного уравнения второго порядка вдоль любого пути из ребер без самопересечений – в частности, вдоль пути $n_1 = \text{const}$ (уравнение получится по переменной n_2) или $n_2 = \text{const}$ (уравнение получится по переменной n_1). Если кривизна тривиальна, то все эти уравнения эквивалентны.*

ПРИМЕР 11. Для коммутирующих операторов $Q_1 = Q_2^+ = Q_{c,d}$ из (125) условие совместности выполнено. По переменной n_1 ($n_2 = \text{const}$) мы приходим к уравнению

$$(130) \quad cv^{n_2}(\psi_{n-T_1} + \psi_{n+T_1}) + (1 + c^2 v^{2n_2} - dv^{-2n_1})\psi_n = 0.$$

В завершение этого параграфа мы приведем сведения о факторизациях и преобразованиях Лапласа для общих несамосопряженных операторов L второго порядка на правильной треугольной решетке, а также комплексных эрмитовых операторов. Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы оператор

$$(131) \quad L = a_n + b_n T_1 + c_n T_2 + d_{n-T_1} T_1^{-1} T_2 + e_{n-T_1} T_1^{-1} + f_{n-T_2} T_2^{-1} + g_{n-T_2} T_1 T_2^{-1}$$

представлялся в виде

$$\text{а) } L = Q_1 Q_2 + w_n \quad \text{или} \quad \text{б) } L = Q_2 Q_1 + w_n,$$

где Q_1 и Q_2 имеют вид

$$Q_1 = x_n + y_n T_1 + z_n T_2, \quad Q_2 = p_n + q_{n-T_1} T_1^{-1} + r_{n-T_2} T_2^{-1},$$

необходимо и достаточно выполнения условий

$$(132) \quad \begin{aligned} \text{а) } & b_{n+T_2} d_n f_{n+T_1} = g_n e_{n+T_2} c_{n+T_1}, \\ \text{б) } & f_n d_n b_n = c_n e_n g_n. \end{aligned}$$

Если выполнены оба условия, то преобразования Лапласа

$$(133) \quad \text{а) } L = Q_1 Q_2 + w \mapsto \tilde{L} = Q_2 w^{-1} Q_1 + 1,$$

$$(134) \quad \text{б) } L = Q_2 Q_1 + v \mapsto \tilde{L} = Q_1 w^{-1} Q_2 + 1$$

можно утерировать, причем неограниченное число раз (если $w, v \neq 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Условия факторизуемости (132) инвариантны относительно вращения решетки на угол $2\pi/3$. По аналогии с определением 10 мы можем ввести шесть типов преобразований Лапласа. Тогда 1-е, 3-е и 5-е преобразования будут унитарно сопряжены и обратны к 4-му, 6-му и 2-му преобразованиям соответственно. То же самое относится и к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 7. Для того чтобы оператор L вида

$$(135) \quad L = a_n + b_n T_1 + \bar{c}_n T_2 + d_{n-T_1} T_2 T_1^{-1} + \bar{b}_{n-T_1} T_1^{-1} + c_{n-T_2} T_2^{-1} + \bar{d}_{n-T_2} T_1 T_2^{-1}$$

факторизовался в виде

$$\text{а) } L = Q Q^+ + w_n \quad \text{или} \quad \text{б) } L = Q^+ Q + w_n,$$

необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$(136) \quad \begin{aligned} \text{а) } & b_{n-T_1} c_{n-T_2} d_{n-T_1-T_2} \in \mathbb{R}, \\ \text{б) } & d_n c_n b_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В частности, если выполнены оба эти условия, то преобразования Лапласа можно итерировать неограниченное число раз.

Доказательство этих теорем прямое.

Для комплексных эрмитовых операторов L естественно определен класс “фазовых” калибровочных преобразований

$$L \mapsto e^{if_n} L e^{-if_n}, \quad \psi_n \mapsto e^{if_n} \psi_n$$

таких, что $f_n \in \mathbb{R}$. Эти преобразования сохраняют оператор формально эрмитовым относительно прежнего стандартного скалярного произведения в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$

$$(137) \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \varphi_n \bar{\psi}_n.$$

У оператора L естественно имеется “вещественная” и “фазовая” проекции

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{R}} &= a_n + \beta_n T_1 + \gamma_n T_2 + \delta_{n-T_1} T_2 T_1^{-1} + \beta_{n-T_1} T_1^{-1} + \gamma_{n-T_2} T_2^{-1} + \delta_{n-T_2} T_1 T_2^{-1}, \\ L_{\Phi} &= a_n + B_n T_1 + \bar{C}_n T_2 + D_{n-T_1} T_2 T_1^{-1} + \bar{B}_{n-T_1} T_1^{-1} + C_{n-T_2} T_2^{-1} + \bar{D}_{n-T_2} T_1 T_2^{-1}, \\ b_n &= \beta_n B_n, c_n = \gamma_n C_n, d_n = \delta_n D_n, \text{ где } \beta_n, \gamma_n, \delta_n, a_n, w_n - \text{вещественные числа, а} \\ &B_n, C_n, D_n - \text{комплексные, по модулю равные 1.} \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Физическим магнитным полем* называется фазовая часть произведения коэффициентов оператора (связности) вдоль границы любого черного или белого треугольника

$$\begin{aligned} (\text{черные}) \quad e^{-i\Phi_n^{(1)}} &= B_{n-T_1} C_{n-T_2} D_{n-T_1-T_2}, \\ (\text{белые}) \quad e^{i\Phi_n^{(2)}} &= D_n C_n B_n. \end{aligned}$$

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 18. *Оператор L приводится фазовым калибровочным преобразованием $e^{if_n} L e^{-if_n}$ к чисто вещественному виду, если и только если магнитное поле (т.е. все “магнитные потоки” $\Phi_n^{(j)}$) тривиальны*

$$\Phi_n^{(j)} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \quad j = 1, 2.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Комплексный эрмитов оператор L допускает неограниченное количество преобразований Лапласа всех шести видов, если и только если он приводится фазовым калибровочным преобразованием к чисто вещественному оператору.*

Таким образом, q -аналоги оператора Шрёдингера–Ландау на решетке не имеют отношения к магнитному полю. Разностные операторы в физическом магнитном поле, вообще говоря, не факторизуются. Чистый аналог оператора в однородном магнитном поле можно (выбрав определенную калибровку – “вектор-потенциал”, состоящий из коэффициентов b_n, c_n, d_n таких, что $|b_n| = |c_n| = |d_n| = 1$) записать в виде:

$$(138) \quad L = 6 - e^{i\Phi_{n_2}} T_1 - e^{-i\Phi_{n_1}} T_2 - e^{i\Phi_{(n_1+n_2)}} T_2 T_1^{-1} - e^{-i\Phi_{n_2}} T_1^{-1} - e^{i\Phi_{n_1}} T_2^{-1} - e^{-i\Phi_{(n_1+n_2)}} T_1 T_2^{-1}.$$

§ 7. Факторизации и преобразования Лапласа на многомерных решетках правильных тетраэдров в $\mathbb{R}^N$

Рассмотрим решетку в $\mathbb{R}^N$, концы базисных векторов $T_1, \dots, T_N$ которой вместе с точкой 0 образуют правильный N -мерный симплекс (тетраэдр для $N = 3$). Мы будем называть этот симплекс, а также все другие, полученные из него сдвигами на вектор решетки, *черными*. *Белыми тетраэдрами* (N -мерными симплексами) мы будем называть тетраэдр $\langle 0, -T_1, \dots, -T_N \rangle$ и все остальные, полученные из него целочисленными сдвигами.

Два черных (белых) тетраэдра могут иметь друг с другом не более одной общей вершины. Черный и белый тетраэдры могут иметь друг с другом самое большее общее ребро. Это верно для любой размерности ≥ 2 .

Рассмотрим вещественный самосопряженный оператор вида

$$L = a_n + \sum_{k=1}^N (b_{k,n} T_k + b_{k,n-T_k} T_k^{-1}) + \sum_{k \neq j} (c_{kj,n-T_j} T_k T_j^{-1} + c_{kj,n-T_k} T_j T_k^{-1}).$$

Мы считаем, что коэффициенты $b_{k,n}, c_{kj,n}$ — это вещественная связность, все они не равны нулю.

ТЕОРЕМА 8. Оператор L допускает представление в виде

$$L = QQ^+ + w_n,$$

где

$$Q = x_n + \sum_{k=1}^N y_{k,n} T_k,$$

если и только если выполнено следующее условие на коэффициенты $b_{k,n}, c_{kj,n}$:

$$(139) \quad \frac{b_{k,n-T_k} b_{j,n-T_j}}{c_{kj,n-T_k-T_j}} = x_n \text{ не зависит от } k, j.$$

Аналогично, условием факторизации $L = Q^+Q + w_n$ является независимость от k, j выражения $b_{k,n} b_{j,n} / c_{kj,n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Для $N = 2$ никаких условий нет. При $N = 3$ имеется два условия для любого белого тетраэдра: произведение коэффициентов связности, сидящих на парах противоположных (скрещивающихся) ребер тетраэдра одно и то же. Всего у тетраэдра шесть ребер, образующих три скрещенных пары, так что имеем два условия. Если мы желаем иметь все виды факторизации, то это условие должно быть выполнено и для черных тетраэдров.

Утверждение теоремы, как и ранее, проверяется непосредственно.

Рассмотрим теперь факторизуемые операторы, для которых коэффициенты соответствующих операторов Q, Q^+ имеют вид экспонент от линейных функций, как и для $N = 2$:

$$(140) \quad Q = 1 + ce^{l_1(n)} T_1 + de^{l_2(n)} T_2 + fe^{l_3(n)} T_3,$$

$$l_j(n) = \sum_{i=1}^N l_{ji} n_i.$$

Для таких операторов верна

ТЕОРЕМА 9. *Уравнения*

$$(141) \quad 1) \quad Q\psi = 0 \text{ (уравнение черных тетраэдров)}$$

или

$$(142) \quad 2) \quad Q^+\psi = 0 \text{ (уравнение белых тетраэдров)}$$

заведомо имеют бесконечномерные пространства решений $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^N)$, если выполнены следующие условия:

1)

$$(143)$$

$$1a) \quad \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} > 0, \quad l_{32} = l_{23},$$

$$(144)$$

$$1б) \quad \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} - l_{21} + l_{12} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} > 0, \quad l_{23} + l_{31} = l_{32} + l_{13},$$

$$(145)$$

$$1в) \quad \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} - l_{21} + l_{12} & l_{23} - l_{21} + l_{12} \\ l_{13} & l_{23} - l_{21} + l_{12} & l_{33} - l_{31} + l_{13} \end{pmatrix} > 0, \quad l_{23} - l_{21} + l_{12} = l_{32} - l_{31} + l_{13};$$

2) те же с заменой $l_{ij} \rightarrow -l_{ij}$;

а также условия, получающиеся из указанных произвольной перестановкой индексов 1, 2, 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Операторы $L = QQ^+$ и $\tilde{L} = Q^+Q$ при выполнении условий теоремы имеют $\lambda = 0$ точкой дискретного спектра, которая бесконечнократно вырождена.

ЗАДАЧА. Доказать, что собственные функции, построенные по схеме доказательства теоремы 4, дают полный базис для $\lambda = 0$. Доказать, что остальной спектр отделен от $\lambda = 0$ конечной щелью $\Delta > 0$, в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^3)$.

ТЕОРЕМА 10. Если выполнены соотношения

$$(146) \quad l_{ij} + l_{ji} = h,$$

то операторы Q, Q^+ удовлетворяют соотношениям

$$(147) \quad Q_{c,d,f} Q_{c,d,f}^+ - 1 = q(Q_{c',d',f'}^+ Q_{c',d',f'} - 1),$$

где

$$q = e^h, \quad c' = e^{-h}c, \quad d' = e^{-h}d, \quad f' = e^{-h}f.$$

Эта теорема обобщает лемму 16, сформулированную для $N = 2$.

Существенно отметить, что условия (146) противоречат условию теоремы 9, и мы не можем явно найти решения уравнений

$$(148) \quad Q_{c,d,f}\psi = 0,$$

$$(149) \quad Q_{c,d,f}^+\psi = 0,$$

принадлежащие $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$, и необходимые для построения спектра операторов $L, \tilde{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Как и ранее, мы можем искать решения (141) в виде

$$\psi_n = e^{-K_2(n)} \chi_n,$$

где форма $K_2(n)$ выбрана так, что коэффициенты уравнения для χ_n уже не содержали переменной n_1 . Далее, однако, не удастся свести полученное уравнение к одной переменной. После подстановки

$$\chi_n = w^{n_1} \varphi_{n_2, n_3}$$

мы приходим к двумерному уравнению треугольников

$$(150) \quad A_n \varphi_n + B_n \varphi_{n+T_2} + C_n \varphi_{n+T_3} = 0.$$

К сожалению, коэффициенты этого уравнения более сложны, и пока мы не знаем, как найти явно его решения.

Очевидно, одно уравнение (141) всегда может быть решено в полупространстве определенного направления, если начальные условия заданы произвольно на вершинах в любой плоскости одного из четырех видов:

$$(151) \quad n_1 = \text{const}, \text{ или } n_2 = \text{const}, \text{ или } n_3 = \text{const}, \text{ или } n_1 + n_2 + n_3 = \text{const}.$$

Здесь уравнение тетраэдра (как и треугольника для $N = 2$) трактуется как эволюционное уравнение. Оно необратимо, как и для $N = 2$, так как решение в обратную сторону по “времени” уже не локально; его разрешимость зависит от принадлежности начального условия к специальному функциональному классу.

Теперь мы рассмотрим условие совместности пары уравнений (черного и белого)

$$(152) \quad \begin{aligned} Q_1 \psi &= 0, & Q_1 &= 1 + x_n T_1 + y_n T_2 + z_n T_3, \\ Q_2 \psi &= 0, & Q_2 &= 1 + p_n T_1^{-1} + q_n T_2^{-1} + r_n T_3^{-1}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 11. Система (152) является полностью совместной, т.е. ее решение определяется произвольным решением некоторого разностного уравнения второго порядка в любой из плоскостей (151), если выполнено следующее соотношение

$$(153) \quad (1 - Q_1)(1 - Q_2) - 1 = f_n((1 - Q_2)(1 - Q_1) - 1),$$

где f_n – некоторая ненулевая функция (в частности, при $f_n \equiv 1$ это равенство превращается в условие коммутирования $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1$). Соответствующее уравнение второго порядка, например, для плоскости $n_1 + n_2 + n_3 = \text{const}$ имеет вид

$$(1 - Q_1)(1 - Q_2)\psi = \psi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как уравнения (152) имеют вид

$$(1 - Q_1)\psi = \psi, \quad (1 - Q_2)\psi = \psi,$$

мы видим, что условия

$$(1 - Q_1)(1 - Q_2)\psi = \psi$$

и

$$(1 - Q_2)(1 - Q_1)\psi = \psi,$$

которые представляют собой уравнения второго порядка в плоскости $n_1 + n_2 + n_3 = \text{const}$, должны быть эквивалентны. Отсюда следует, что существует ненулевая функция f_n такая, что

$$(1 - Q_1)(1 - Q_2) - 1 = f_n((1 - Q_2)(1 - Q_1) - 1).$$

Итак, теорема доказана для плоскости $n_1 + n_2 + n_3 = \text{const}$.

Расписывая наши условия локально, в звезде любой вершины, мы видим, что оно инвариантно относительно вращений, переводящих решетку в себя. Все четыре указанные выше направления плоскостей равноправны. Теорема доказана.

ПРИМЕР 12. Рассмотрим операторы (147), где $h = 0$. В этом случае операторы Q, Q^+ коммутируют. Соответствующее уравнение в гиперплоскости $n_3 = \text{const}$ имеет вид

$$(154) \quad 0 = (A + C^2 e^{2\alpha n_2} + D^2 e^{-2\alpha n_1})\psi_n + C e^{\alpha n_2}(\psi_{n+T_1} + \psi_{n-T_1}) \\ + D e^{-\alpha n_1}(\psi_{n+T_2} + \psi_{n-T_2}) + C D e^{\alpha(n_2-n_1)}(e^{\alpha}\psi_{n+T_2-T_1} + e^{-\alpha}\psi_{n+T_1-T_2}).$$

Рассмотрим теперь “векторную факторизацию” для $N = 3$, где операторы Q^+ представляют векторы $(Q^{+\alpha})$, $\alpha = 1, 2$. Тем самым, факторизация оператора определяется в виде

$$(155) \quad \begin{aligned} \text{а) ББ: } L &= \sum_{\alpha=1}^2 Q^{\alpha} Q^{+\alpha} + w_n, \\ \text{б) ЧЧ: } L &= \sum_{\alpha=1}^2 Q^{+\alpha} Q^{\alpha} + w_n, \\ \text{в) ЧБ: } L &= Q^1 Q^{+1} + Q^{+2} Q^2 + w_n, \end{aligned}$$

где

$$Q^{\alpha} = x_n^{\alpha} + y_n^{\alpha} T_1 + z_n^{\alpha} T_2 + t_n^{\alpha} T_3.$$

ЛЕММА 19. *Векторная факторизация самосопряженного оператора L всегда возможна (хотя и неоднозначна). При этом потенциал можно считать константой $w_n = w_0$.*

Векторные факторизации всех трех видов порождают преобразования Лапласа, которые, однако, нельзя итерировать.

Отыскание собственных функций основного состояния иногда можно производить в одной из них:

$$(156) \quad \begin{aligned} \text{а) } Q^{+1}\psi &= 0, Q^{+2}\psi = 0 \text{ для (ББ),} \\ \text{б) } Q^1\psi &= 0, Q^2\psi = 0 \text{ для (ЧЧ),} \\ \text{в) } Q^{+1}\psi &= 0, Q^2\psi = 0 \text{ для (ЧБ).} \end{aligned}$$

Если константа w_0 при факторизации выбрана правильно, то нижний уровень получается из уравнений (156), а), б) или в).

Трудно найти критерий существования одного решения для систем (156). Однако, как и ранее, мы укажем здесь критерий полной локальной совместности этих систем.

ТЕОРЕМА 12. *Система (156) а) (или б)) имеет решения, однозначно определяемые произвольными начальными условиями, заданными на вершинах любой прямой с направляющим вектором T_1, T_2, T_3 или $T_i T_j^{-1}, i \neq j$, внутри двугранного угла, в котором лежат белые (соответственно, черные) тетраэдры, примыкающие к данной прямой по ребру, тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для любых четырех белых (соответственно, черных) тетраэдров, расположенных по углам тетраэдра вдвое большего размера, восемь соответствующих им уравнений линейно зависимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим систему (156) б). На значения ψ в вершинах каждого черного тетраэдра мы имеем по два уравнения. Это значит, что, зная значения ψ в двух вершинах черного тетраэдра, мы можем найти значения в двух оставшихся. Отсюда легко видеть, что если ψ задано на всех вершинах некоторой прямой, то наша система диктует продолжение ψ внутрь указанного сектора. Таким образом, нам нужно лишь выяснить, когда это продолжение возможно при любых начальных условиях.

Рассмотрим тетраэдр T_N , подобный черному, с ребром длины N . Пусть $V(N)$ – число черных тетраэдров, укладывающихся в T_N , $V(N) = N(N+1)(N+2)/6$. На значения ψ в $V(N+1)$ вершинах, лежащих внутри и на границе T_N , мы имеем, таким образом, $2V(N)$ уравнений, среди которых лишь $V(N+1) - N - 1$ должны быть линейно независимы для выполнения условия полной совместности. Но $2V(N) - V(N+1) + N + 1 = V(N-1)$ есть число удвоенных тетраэдров $T_2 \subset T_N$.

Условие совместности системы (156) в) рассматривалось в теореме 11.

§ 8. Факторизации операторов и преобразования Лапласа на двумерных поверхностях

Рассмотрим двумерное многообразие без края, триангулированное так, что двумерные симплексы можно раскрасить в два цвета (черный и белый) и при этом два треугольника, примыкающие по ребру, имеют разные цвета. В этом случае в каждой вершине должно сходиться четное число треугольников.

Метрика на поверхности выбирается такой, что все треугольники эквивалентны правильному треугольнику на евклидовой плоскости. Отсюда немедленно следует, что в любой вершине полная кривизна имеет вид $(2\pi - N_{\text{tr}}\pi/3)$, где N_{tr} – число треугольников, сходящихся в данной вершине. Если $N_{\text{tr}} = 6$, то кривизна равна нулю. Если $N_{\text{tr}} = 4$, то кривизна положительна. Если же $N_{\text{tr}} > 6$, то кривизна отрицательна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Вершинным скалярным оператором Шрёдингера* называется оператор L , действующий на функции от вершины по формуле

$$(157) \quad (L\psi)_P = \sum_{P'} b_{P:P'} \psi_{P'} + a_P \psi_P,$$

где суммирование идет по вершинам P' , ближайшим к вершине P , но с ней не совпадающим. Условие самосопряженности оператора L имеет вид

$$(158) \quad b_{P':P} = \bar{b}_{P:P'}, \quad a_P \in \mathbb{R}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. 1) *Треугольным (черным) оператором Шрёдингера I типа* называется оператор L , действующий на функции ψ_T от черных треугольников T так, что

$$(159) \quad (L\psi)_T = \sum_{T'} b_{T:T'} \psi_{T'} + a_T \psi_T,$$

где T' – все черные треугольники, имеющие с T общую вершину.

2) *Треугольным (черным) оператором Шрёдингера II типа* называется оператор L , действующий на ψ_T по формуле (159), но T' теперь пробегает все черные треугольники, имеющие с T общий соседний (т.е. примыкающий по ребру) белый треугольник.

Аналогично определяются белые треугольные операторы I и II типов. В обоих случаях условие самосопряженности относительно стандартного скалярного произведения

$$(160) \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \sum_T \varphi_T \bar{\psi}_T$$

имеет вид

$$b_{T':T} = \bar{b}_{T:T'}, \quad a_T \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 13. *Любой вещественный самосопряженный вершинный оператор L допускает однозначную факторизацию вида*

$$L = QQ^+ + w_P,$$

где

$$(161) \quad (Q^+ \psi)_T = \sum_P y_{T:P} \psi_P + x_T \psi_T,$$

сумма берется по всем вершинам P черного треугольника T . Для любого черного треугольника T и двух его вершин P_1, P_2 имеет место равенство (ср. с (101)):

$$(162) \quad y_{T:P_1} y_{T:P_2} = b_{P_1:P_2}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для белых треугольников.

ТЕОРЕМА 14. *Вещественный треугольный черный самосопряженный оператор $\tilde{L}$ I типа допускает факторизацию вида*

$$(163) \quad \tilde{L} = Q^+ Q + v_T,$$

где оператор Q^+ имеет вид (161), если и только если для каждой вершины P матрица $B_P = (b_{T:T'})$, где черные треугольники T, T' принадлежат звезде вершины P , имеет вид

$$(164) \quad B_P = \text{Diag} + \Lambda_P, \quad \text{rk } \Lambda_P = 1.$$

Для кратностей $N_{\text{tr}} = 4, 6$ это условие всегда выполнено.

Оператор Q в (163) определен с точностью до преобразования, не меняющего ни одного из произведений вида

$$y_{T:P} u_{T':P} \quad (T \neq T').$$

В частности, при $N_{\text{tr}} \geq 6$ коэффициенты $y_{T:P}$ определены однозначно, а при $N_{\text{tr}} = 4$ – с точностью до преобразования $(T \neq T')$

$$y_{T:P} \mapsto \mu_P y_{T:P}, \quad u_{T':P} \mapsto \mu_P^{-1} u_{T':P},$$

где $0 \neq \mu_P$ – любая ненулевая функция от вершин с $N_{\text{tr}}(P) = 4$.

ТЕОРЕМА 15. *Треугольный (черный) оператор Шрёдингера II типа всегда допускает факторизацию вида*

$$(165) \quad L = Q Q^+ + u_T,$$

где

$$(Q^+ \psi)_{T_1} = \sum_T y_{T_1:T} \psi_T + x_{T_1} \psi_{T_1},$$

T_1 – белый треугольник, сумма берется по примыкающим к T_1 черным треугольникам T . Фактически, коэффициенты $y_{T_1:T}$ соответствуют ребрам триангуляции.

Имеют место равенства

$$(166) \quad y_{T:T_1} u_{T':T_1} = b_{T:T'}$$

для любых трех последовательно примыкающих друг к другу треугольников T, T_1, T' (черного, белого, черного) из звезды вершины с $N_{\text{tr}} \geq 6$;

$$(167) \quad y_{T:T_1} u_{T':T_1} + y_{T:T'_1} u_{T':T'_1} = b_{T:T'}$$

для черных треугольников T, T' и белых треугольников T_1, T'_1 из звезды вершины с $N_{\text{tr}} = 4$.

Факторизация однозначна в окрестности всех вершин P таких, что $N_{\text{tr}}(P) \geq 6$. В окрестности вершин P с $N_{\text{tr}}(P) = 4$ факторизация неоднозначна: каждое уравнение вида (167) можно заменить на два:

$$(168) \quad y_{T:T_1} u_{T':T_1} = b_{T:T'}^{(1)}, \quad y_{T:T'_1} u_{T':T'_1} = b_{T:T'}^{(2)},$$

где $b_{T:T'} = b_{T:T'}^{(1)} + b_{T:T'}^{(2)}$ – произвольное разбиение $b_{T:T'}$ в сумму двух ненулевых слагаемых. Полученная система будет однозначно разрешима.

В этой теореме, очевидно, черный и белый цвета можно поменять местами.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Если для всех вершин триангуляции мы имеем $N_{\text{tr}} = 4, 6$, то классы операторов I и II типов совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 5. 1) Если для всех вершин мы имеем $N_{\text{tr}} \leq 6$ (т.е. кривизна неотрицательна), то определены факторизации всех видов. Соответственно, определены все связанные с ними преобразования Лапласа. Например, в случае вершинного оператора преобразование Лапласа имеет вид:

$$(169) \quad L = QQ^+ + w \longmapsto \tilde{L} = Q^+w^{-1}Q + 1.$$

2) Всегда определены факторизации треугольных операторов Шрёдингера L II типа через треугольники противоположного цвета. Степень неоднозначности этих факторизаций и соответствующих преобразований Лапласа определяется количеством вершин P положительной кривизны, $N_{\text{tr}}(P) = 4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Для правильной треугольной решетки на плоскости пространства функций на вершинах, на черных и на белых треугольниках можно отождествить, и тогда указанные факторизации совпадут (с точностью до эквивалентности (104)) с рассмотренными в § 6 факторизациями операторов на правильной решетке.

Вывод: Постановка вопроса о циклических цепочках Лапласа возникает в двух случаях:

Случай 1: при $N_{\text{tr}} \leq 6$ (следствие 5).

Случай 2: при наличии вершин с $N_{\text{tr}} = 4$ в условиях следствия 5.

В случае 2 можно ограничиться преобразованиями Лапласа для операторов II типа, переводящих функции на черных треугольниках в функции на белых и обратно. Это похоже на одномерные преобразования Дарбу.

§ 9. Симплициальные связности. Обобщения

Рассмотрим симплициальный комплекс K . Через σ^l мы всюду обозначаем симплекс размерности l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Симплициальной связностью типа (q, j, k) , $0 \leq j < k$, мы назовем уравнение

$$(170) \quad \sum_{\sigma^q \subset \sigma^{q+k}} c_{\sigma^{q+k}; \sigma^q} \psi_{\sigma^q} = 0,$$

определенное вектор-функцией, сопоставляющей каждой паре симплексов $\sigma^q, \sigma^{q+k} \subset K$ такой, что $\sigma^q \subset \sigma^{q+k}$, набор

$$(171) \quad c_{\sigma^{q+k}; \sigma^q} = (c_{\sigma^{q+k}; \sigma^q}^\alpha) \in \mathbb{R}^m, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

где

$$m = C_{q+k+1}^{q+1} - C_{q+j+1}^{q+1}.$$

При этом требуется, чтобы функция $c_{\sigma^{q+k}; \sigma^q}$ удовлетворяла условиям невырожденности и локальности (см. ниже).

Такая функция определяет оператор Q^+ , действующий из пространства числовых функций от симплексов σ^q в пространство m -вектор-функций от симплексов σ^{q+k}

$$(172) \quad (Q^+\psi)_{\sigma^{q+k}} = \sum_{\sigma^q} c_{\sigma^{q+k}; \sigma^q} \psi_{\sigma^q} \in \mathbb{R}^m.$$

Симплициальная связность зависит только от 0-пространства этого оператора:

$$(173) \quad Q^{+\alpha} \psi = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Фактически, это соотношение написано по отдельности в каждом симплексе σ^{q+k} .

Требование невырожденности: Уравнение (170) должно быть таким, чтобы у любого подсимплекса $\sigma^{q+k} \subset K$ произвольно заданный набор значений ψ_{σ^q} в симплексах σ^q , составляющих q -мерный остов любого симплекса $\sigma^{q+j} \subset \sigma^{q+k}$, однозначно и непротиворечиво определял значения ψ на всех оставшихся q -мерных подсимплексах в $\sigma^{q+k} \subset K$.

Итак, мы можем произвольно задавать значения ψ в q -мерном остове симплексов $\sigma^{q+j} \subset \sigma^{q+k}$.

ЛЕММА 20. Пусть задан путь γ , составленный из $(q+k)$ -мерных симплексов $\sigma_1^{q+k}, \sigma_2^{q+k}, \dots$, где σ_s^{q+k} и σ_{s+1}^{q+k} пересекаются точно по грани размерности $q+j$ для всех s . Тогда симплициальная связность непротиворечиво определяет решение уравнения (170) вдоль пути γ , исходя из произвольных начальных данных, заданных в q -мерном остове какой-либо $(q+j)$ -мерной грани любого из симплексов σ_s^{q+k} , составляющих этот путь.

Доказательство леммы несложно получается из определений: решение строится, переходя от симплекса σ_s^{q+k} к симплексу σ_{s+1}^{q+k} , $s = 1, 2, \dots$.

Аналог кривизны естественно возникает для “замкнутых” путей γ , в которых $\sigma_1^{q+k} = \sigma_N^{q+k}$. В этом случае возникает “преобразование голономии” симплициальной связности (170) вдоль пути γ : решая уравнение (170) вдоль пути согласно лемме, стартуя с некоторой грани $\sigma_0^{q+j} \subset \sigma_1^{q+k}$, мы в конечном счете находим значения ψ на всех q -мерных гранях симплекса σ_N^{q+k} , в том числе на $\sigma^q \subset \sigma_0^{q+j}$. Эти значения могут не совпадать с исходными. Возникает линейное отображение

$$R_\gamma: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M,$$

где $M = C_{q+j+1}^{q+1}$ – число q -мерных граней в симплексе $\sigma_0^{q+j} \subset \sigma_1^{q+k}$, на которых значения функции ψ_{σ^q} задавались произвольно.

Исходя из требования невырожденности, мы можем привести уравнение (170) в любом симплексе σ^{q+k} к такому виду, что заданы обратимые операторы для любой пары симплексов $\sigma_1^{q+j}, \sigma_2^{q+j} \subset \sigma^{q+k}$

$$L_{12}: \mathbb{R}_1^M \rightarrow \mathbb{R}_2^M,$$

где пространство $\mathbb{R}_\varepsilon^M$ состоит из всех возможных значений ψ на симплексах $\sigma^q \subset \sigma_\varepsilon^{q+j}$, $\varepsilon = 1, 2$, базисы в них – это δ -функции симплексов σ^q .

Требование локальности: Все операторы L_{12} однозначно определяются только минимальным симплексом, содержащим σ_1^{q+j} и σ_2^{q+j} :

$$(\sigma_1^{q+j} \cup \sigma_2^{q+j}) \subset \sigma^{q+j+s} \subseteq \sigma^{q+k}.$$

Это означает, что если два симплекса σ_1^{q+k} и σ_2^{q+k} пересекаются по симплексу σ^{q+j+s} , где $s > 0$, то для них все операторы L_{12} внутри симплекса σ^{q+j+s} совпадают.

Последнее требование локальности автоматически выполнено в двух случаях.

Случай 1. $k = j + 1$. Здесь всегда $\sigma^{q+j+1} = \sigma^{q+k}$.

Случай 2. В симплицальном комплексе K симплексы σ_1^{q+k} и σ_2^{q+k} совпадают, если они пересекаются по грани размерности больше чем $q + j$.

В примерах, уже рассматривавшихся в этой работе (выше), мы имели всегда $q = 0$, т.е. функции ψ были определены на вершинах. Локальность соответствовала случаям 1 или 2.

ТРИВИАЛЬНЫЙ ПРИМЕР. Пусть $k = 1, q = 0, j = 0$. Мы имеем обычную абелеву связность, сидящую на ребрах комплекса K . Действительно, из уравнения (170)

$$c_{\sigma^1:\sigma_1^0}\psi_{\sigma_1^0} + c_{\sigma^1:\sigma_2^0}\psi_{\sigma_2^0} = 0$$

мы приходим в данном случае к оператору умножения

$$L_{12} = -\frac{c_{\sigma^1:\sigma_1^0}}{c_{\sigma^1:\sigma_2^0}}: \psi_{\sigma_1^0} \mapsto \psi_{\sigma_2^0} = L_{12}(\psi_{\sigma_1^0}).$$

ПРИМЕР 13. а) Пусть $q = 0, k = 2, j = 1$ и K – триангуляция двумерной поверхности. Здесь мы имеем одно уравнение. Эта ситуация изучалась выше (см. § 6).

Для $K = \mathbb{R}^2$ с правильной треугольной решеткой особое внимание уделялось случаю “нулевой локальной кривизны”, где решение уравнения $Q^+\psi = 0$ сводится к разностному уравнению второго порядка на прямой (см. пример 11). Согласно гипотезе авторов, эта ситуация возникает в некоторых интересных случаях, когда точка $\lambda = 0$ предположительно является нижней границей непрерывного спектра операторов Шрёдингера (123). На поверхностях с нетривиальной топологией случай нулевой локальной кривизны приведет к глобальной монодромии, определенной на группе π_1 .

б) Пусть $q = 0, j = 1, k = 2$ и K – это “черная часть” (или “белая часть”) черно-белой триангуляции поверхности. Здесь мы также имеем одно уравнение $Q^+\psi = 0$, но локальной кривизны нет, так как черные треугольники примыкают друг к другу по вершинам (нет общих ребер). Поэтому нетривиальные пути отсутствуют.

в) Пусть $q = 0, j = 0, k = 2$, K такой же, как в случае б). Здесь имеет место кривизна.

ПРИМЕР 14. Пусть $q = 0, k = 3$, K – решетка правильных тетраэдров в $\mathbb{R}^3$. Мы имеем $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 – это “черная” часть, а K_2 – “белая” часть, $K_1 \cap K_2$ – это одномерный остов. Примыкание двух тетраэдров в K возможно не более, чем по ребру, а примыкание тетраэдров внутри K_1 (или K_2) возможно только по вершине. Мы уже рассматривали следующие случаи а), б) – см. § 7:

а) $j = 2$, комплекс K_1 (или K_2). Здесь нет локальной кривизны.

б) $j = 2$, комплекс K . Здесь тоже нет локальной кривизны, так как нет путей γ . Тем не менее, имеется нетривиальное условие совместности (153), обеспечивающее обширное пространство решений уравнения $Q^+\psi = 0$. Этот своеобразный аналог кривизны в общем виде не изучался.

в) $j = 1$, комплекс K . Здесь возникает уже понятие локальной кривизны, так как имеется много путей γ . Система (170) имеет решение во всем $\mathbb{Z}^3$, однозначно определяемое произвольной парой значений ψ в вершинах любого ребра тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: восемь уравнений, соответствующих каждой четверке тетраэдров – паре черных и паре белых из звезды одной вершины – такой,

что оба черных тетраэдра граничат с каждым из белых по ребру, линейно зависимы. Это утверждение означает, что наша система в звезде каждой вершины имеет двумерное локальное пространство решений. Геометрически, “кривизны”, препятствующие этому решению, соответствуют на границе звезды – сфере S^2 , разбитой на треугольники и квадраты – именно квадратам. Всего это – шесть условий в каждой вершине (число квадратов), но одно из них зависимо.

г) Пусть $q = 0, j = 0, K$ – это K_1 . Здесь появляются пути, составленные из тетраэдров, сцепленных вдоль вершин. Пространство $\mathbb{R}^M$ при $j = 0$ одномерно, и мы приходим лишь к абелевым связностям. Это верно для $j = 0$ в любых симплицальных комплексах при любых q .

ЛЕММА 21. *Симплициальная связность типа (q, j, k) , удовлетворяющая условиям невырожденности и локальности, определяет мультипликативное преобразование кривизны*

$$(174) \quad R_\gamma: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M, \quad R_{\gamma_1 \gamma_2} = R_{\gamma_1} R_{\gamma_2}, \quad R_{\gamma^{-1}} = R_\gamma^{-1}$$

для любого пути γ ,

$$\gamma = \sigma_1^{q+k} \sigma_2^{q+k} \dots \sigma_N^{q+k},$$

где $\sigma_N^{q+k} = \sigma_1^{q+k}$ и пересечение $\sigma_s^{q+k} \cap \sigma_{s+1}^{q+k}$ является гранью размерности большей или равной $q + j$ для всех $s = 1, \dots, N$.

Доказательство леммы легко получается из предыдущего.

Рассмотрим теперь вещественные дискретные самосопряженные операторы

$$(175) \quad (L\psi)_{\sigma_2^q} = \sum_{\sigma_1^q} b_{\sigma_1^q: \sigma_2^q} \psi_{\sigma_1^q},$$

действующие на функциях от q -симплексов комплекса K . Мы будем рассматривать лишь “операторы второго порядка”, где коэффициенты $b_{\sigma_1^q: \sigma_2^q}$ отличны от нуля только для “ближайших соседей”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Симплексы σ_1^q, σ_2^q являются k_+ -ближайшими (k_- -ближайшими), если эта пара содержится в некотором симплексе σ^{q+k_+} (соответственно, если пересечение $\sigma_1^q \cap \sigma_2^q$ является симплексом σ^{q-k_-}).

Мы можем представить оператор L как сумму операторов двух типов $L = L_+ + L_-$. Рассмотрим эти типы по отдельности:

$$(\text{тип } +) \quad (L_+ \psi)_{\sigma_2^q} = \sum_{\sigma_1^q, \sigma_2^q \subset \sigma^{q+k_+}} b_{\sigma_2^q: \sigma^{q+k_+}: \sigma_1^q} \psi_{\sigma_1^q},$$

$$(\text{тип } -) \quad (L_- \psi)_{\sigma_4^q} = \sum_{\sigma_3^q \cap \sigma_4^q \supset \sigma^{q-k_-}} b_{\sigma_4^q: \sigma^{q-k_-}: \sigma_3^q} \psi_{\sigma_3^q},$$

где σ_1^q, σ_2^q являются k_+ -ближайшими, а $\sigma_3^q, \sigma_4^q - k_-$ -ближайшими. Пусть $k_+ = k_- = k$. Рассмотрим операторы Q^+ такого же типа, как при определении симплициальной связности, и оператор Q_1 :

$$(Q^+ \psi)_{\sigma^{q+k}} = \sum_{\sigma^q} c_{\sigma^{q+k}: \sigma^q} \psi_{\sigma^q},$$

$$(Q_1 \psi)_{\sigma^{q-k}} = \sum_{\sigma^q} c_{\sigma^q: \sigma^{q-k}} \psi_{\sigma^q}.$$

Здесь образы – это вектор-функции, ψ – скаляры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. 1) Мы назовем *факторизацией 1-го типа* представление L^+ в виде

$$(176) \quad L_+ = QQ^+ + w,$$

где Q^+ – оператор, сопряженный к Q , и $w = w_{\sigma^q}$ – оператор умножения на числовую функцию.

Специальной факторизацией 1-го типа мы назовем представление (176), где $w = \text{const}$.

2) Мы назовем *факторизацией 2-го типа* представление оператора L_- в виде

$$(177) \quad L_- = Q_1^+ Q_1 + v,$$

где v – оператор умножения на функцию от σ^q и оператор Q_1^+ сопряжен к Q_1 .

Специальной факторизацией 2-го типа мы назовем случай, когда $v = \text{const}$.

3) Преобразование Лапласа операторов $L_{\pm}$ определяется формулами

$$(178) \quad \begin{aligned} L_+ &\longmapsto \tilde{L}_+ = Q^+ w^{-1} Q + 1, \\ L_- &\longmapsto \tilde{L}_- = Q_1 v^{-1} Q_1^+ + 1, \end{aligned}$$

а их нулевые собственные векторы переходят по известным формулам в собственные векторы для $\tilde{L}_{\pm}$:

$$\begin{aligned} \psi^+ &\longmapsto \tilde{\psi}^+ = Q^+ \psi^+, & \tilde{L}_+ \tilde{\psi}^+ &= 0, & L_+ \psi^+ &= 0, \\ \psi^- &\longmapsto \tilde{\psi}^- = Q_1 \psi^-, & \tilde{L}_- \tilde{\psi}^- &= 0, & L_- \psi^- &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, оператор $\tilde{L}_+$ записывается аналогично L_- , где $\tilde{Q}^+ = v^{-1/2} Q^+$. Эти формулы предполагают, что $w \geq 0$, $v \geq 0$, хотя здесь это серьезной роли не играет.

Исследованию факторизаций и преобразований Лапласа были посвящены детальные исследования в частных случаях – выше. Рассмотрим здесь только простейший пример. Это – стандартный дискретный вещественный оператор Шрёдингера.

ПРИМЕР 15. Пусть $q = 0$, $k = 1$, $j = 0$. Мы имеем оператор на функциях от вершин

$$L = L_+, \quad (L\psi)_{\sigma_2^0} = \sum_{\sigma_1^0 \cup \sigma_2^0 = \partial \sigma^1} b_{\sigma_2^0: \sigma_1^0: \sigma_1^0} \psi_{\sigma_1^0} + b_{\sigma_1^0} \delta(\sigma_2^0, \sigma_1^0) \psi_{\sigma_1^0}.$$

(Последнее слагаемое присутствует только для $\sigma_2^0 = \sigma_1^0$, что указывается δ -функцией.)

Всегда можно факторизовать такой оператор в виде (пусть всегда $b_{\sigma_2^0: \sigma_1^0: \sigma_1^0} \neq 0$)

$$(179) \quad L = QQ^+ + w,$$

где w – некоторая функция. Эта факторизация неоднозначна.

ВОПРОС. Всегда ли существует “специальная факторизация”, где $w = \text{const}$? Она существует для комплекса $K = \mathbb{Z}^1$ – см. §3 – но в общем случае ответ не ясен (мы предполагаем, что $b_{\sigma^0} \geq 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Ранее (см. § 8) в связи с преобразованием Лапласа на поверхностях с черно-белой триангуляцией мы рассматривали еще один вид факторизации: задан комплекс K и два подкомплекса K_1, K_2 , где $K_1 \cap K_2$ – это $(q-1)$ -мерный остов комплекса K , оператор L действует на функции от $\sigma^q \subset K_1$ (белые q -симплексы):

$$(L\psi)_{\sigma_2^q} = \sum_{\sigma_1^q} b_{\sigma_1^q: \sigma_2^q} \psi_{\sigma_1^q}, \quad \sigma_1^q, \sigma_2^q \subset K_1.$$

Понятие “ближайшего k -соседства” определяется для симплексов из K_1 через посредство граней размерности $q-k$, общей для них с каким-то “черным” q -симплексом из K_2 . Факторизация ищется в виде (179), где w – оператор умножения на функцию, и Q^+ – оператор вида

$$(180) \quad (Q^+\psi)_{\bar{\sigma}^q} = \sum c_{\bar{\sigma}^q: \sigma^{q-k}: \sigma^q} \psi_{\sigma^q},$$

где $\bar{\sigma}^q \subset K_2$, $\sigma^q \subset K_1$, $\sigma^{q-k} \subset \bar{\sigma}^q \cap \sigma^q$. Аналогично, операторы $\bar{L}$ действуют на “черные” q -симплексы $\bar{\sigma}^q \subset K_2$, и ищется факторизация вида

$$\bar{L} = Q^+Q + v.$$

Прежними формулами определяются преобразования Лапласа, а также специальные преобразования Лапласа, если потенциалы v, w являются константами.

ПРИМЕР 16. Пусть K – это q -мерное триангулированное многообразие с черно-белой раскраской q -мерных симплексов, $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2$ – это $(q-1)$ -мерный остов. Для случая $k = 1$ мы имеем σ^{q-1} как общую грань ровно двух симплексов $\sigma^q, \bar{\sigma}^q$ – черного и белого. По аналогии со случаем $q = 2$ (см. § 8), условие факторизации зависит от $N(\sigma^{q-2})$ – кратности $(q-2)$ -мерных симплексов $\sigma^{q-2} \subset K$, равной числу примыкающих $(q-1)$ -мерных $\sigma^{q-1} \supset \sigma^{q-2}$. Это число четно, $N \geq 4$. Мы имеем для $\sigma_j^q \subset K_1, \bar{\sigma}_j^q \subset K_2$:

- а) $b_{\sigma_1^q: \sigma_2^q} = c_{\sigma_1^q: \sigma_1^{q-1}: \bar{\sigma}_2^q} c_{\sigma_2^q: \sigma_2^{q-1}: \bar{\sigma}_1^q}$, $\sigma^{q-2} = \sigma_1^{q-1} \cap \sigma_2^{q-1}$, $N(\sigma^{q-2}) \geq 6$;
- б) $b_{\sigma_1^q: \sigma_2^q} = c_{\sigma_1^q: \sigma_1^{q-1}: \bar{\sigma}_1^q} c_{\sigma_2^q: \sigma_2^{q-1}: \bar{\sigma}_1^q} + c_{\sigma_1^q: \sigma_3^{q-1}: \bar{\sigma}_2^q} c_{\sigma_2^q: \sigma_4^{q-1}: \bar{\sigma}_2^q}$, $\sigma^{q-2} = \sigma_1^{q-1} \cap \sigma_2^{q-1} \cap \sigma_3^{q-1} \cap \sigma_4^{q-1}$, $N(\sigma^{q-2}) = 4$.

Рассмотрим а): число уравнений равно числу $(q-2)$ -мерных граней симплекса $\bar{\sigma}^q$, т.е. $l = q(q+1)/2$. Число неизвестных есть $m(q+1)$, где m – это размерность вектора $c_{\sigma^q: \sigma^{q-1}: \bar{\sigma}^q}$. Итак, мы имеем условие $m(q+1) \geq q(q+1)/2$, или $m \geq q/2$. Скалярная факторизация ($m = 1$) требует выполнения дополнительных условий при $q \geq 3$.

ПРИМЕР 17. Рассмотрим снова K – $(q+2)$ -мерное многообразие с “черно-белой” раскраской $(q+2)$ -симплексов, $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2$ – это $(q+1)$ -остов. Пусть задан оператор несколько другого типа, действующий на функции от q -симплексов из K

$$(L\psi)_{\sigma_2^q} = \sum_{\sigma_1^q} b_{\sigma_2^q: \sigma_1^q} \psi_{\sigma_1^q},$$

и мы ищем “белую” факторизацию (179), где w – оператор умножения на функцию, и

$$(Q^+\psi)_{\sigma^{q+2}} = \sum_{\sigma^q} c_{\sigma^{q+2}: \sigma^q} \psi_{\sigma^q}, \quad \sigma^{q+2} \subset K.$$

Мы приходим к соотношению

$$b_{\sigma_1^q: \sigma_2^q} = c_{\sigma^{q+2}: \sigma_1^q} c_{\sigma^{q+2}: \sigma_2^q}.$$

Число неизвестных равно $m(q+2)(q+3)/2 = lm$ (если $c_{\sigma^{q+2}: \sigma_1^q}$ — это m -вектор), а число уравнений равно $l(l-1)/2$. Условие факторизации, таким образом, имеет вид

$$(181) \quad lm \geq l(l-1)/2,$$

$$(q+2)(q+3)/2 = l, m \geq (l-1)/2.$$

При $q = 1, k = 2$ мы видим, что $m = 3; 5$ годятся. В этих случаях факторизация всегда возможна в виде (179). Возможность специальной факторизации $w = \text{const}$ представляет интерес: хотелось бы выяснить этот вопрос. Если факторизация специальна, то представляет интерес вопрос о нулевых модах оператора $L = QQ^+$, т.е. вопрос о разрешимости в пространстве $\psi \in \mathcal{L}_2$ уравнения

$$Q^+ \psi = 0.$$

При $m = 3$ и $m = 5$ уравнения такого типа определяют (если выполнены требования невырожденности и локальности) связности. Пути, вдоль которых осуществляется “параллельный перенос” и определяется кривизна, состоят из 3-симплексов ($q = 1$), приставленных друг к другу по ребрам ($m = 5$) или по грани ($m = 3$). Требование локальности автоматически выполнено для случая $m = 5, K = K_1$ (белые тетраэдры).

Если $m = 3$, то чисто белые пути отсутствуют. Кривизна определяется парой уравнений: $Q_1^+ \psi = 0$ (белая часть), $Q_2^+ \psi = 0$ (черная часть), т.е. $K = K_1 \cup K_2$.

Пусть теперь задана произвольная симплициальная связность на комплексе K типа (q, j, k) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Локальной кривизной вершины $\sigma^0 \subset K$ называется кривизна этой связности на специальных путях подкомплекса K_P , представляющего собой симплициальную звезду вершины σ^0 : мы берем все симплексы σ_c^q с вершиной $\sigma^0, \sigma^q \subset K_P$, пути вида*

$$(182) \quad \gamma = (\sigma_1^{q+k}, \sigma_2^{q+k}, \dots, \sigma_N^{q+k} = \sigma_1^{q+k}),$$

такие что $\sigma_j^{q+k} = \sigma^0 \sigma_j^{q-1+k}$.

Преобразование R_γ , определенное только путями $\gamma \subset K_P$ (182) называется *локальной кривизной симплициальной связности в точке $\sigma^0 \subset K$* .

ГИПОТЕЗА. Для многообразий K кривизна тривиальна, если локальные кривизны всех вершин тривиальны (заметим, что в ряде случаев — выше — K не было многообразием).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дынкин И. А., Новиков С. П. Преобразования Лапласа и симплициальные связности // УМН. 1997. Т. 52. № 6 (в печати).
- [2] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.
- [3] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
- [4] Кузнецов Е. А., Михайлов А. В. Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 1717–1727.
- [5] Кричевер И. М. Потенциалы с нулевым коэффициентом отражения на фоне конечнозонных // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9. № 2. С. 77–78.
- [6] Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза I // Функцион. анализ и его прил. 1974. Т. 8. № 3. С. 54–66.
- [7] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Основные состояния в периодическом поле. Магнитно-блоховские функции и векторные расслоения // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1293–1297.
- [8] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Основные состояния двумерного электрона // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. № 3. С. 1006–1016.
- [9] Итс А. П., Матвеев В. Б. Оператор Шрёдингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // ТМФ. 1975. Т. 23. № 1. С. 51–68.
- [10] Lax P. Periodic solutions of the Korteweg–de Vries equation // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 141–188.
- [11] McKean H., Van Mörbeke P. The spectrum of Hill's equation // Invent. Math. 1975. V. 30. P. 217–274.
- [12] Weiss J. Period fixed points of Bäcklund transformations and the KdV equation // J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 2647–2656.
- [13] Веселов А. П., Шабат А. Б. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера // Функцион. анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.
- [14] Matveev V. B., Salle M. A. Darboux transformations and solitons. Springer-Verlag, 1991.
- [15] Новиков С. П. Двумерные операторы Шрёдингера в периодических полях // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Т. 23, 1983. С. 3–32.
- [16] Кричевер И. М. Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 291–294.
- [17] Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 183–208.
- [18] Flaschka H. On the Toda Lattice, II. Inverse-scattering solutions // Progress Theor. Phys. 1974. V. 51. P. 703–716.
- [19] Манаков С. В. Полная интегрируемость и стохастизация в дискретных динамических системах // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 543–555.
- [20] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы I // Итоги наук и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 4, 1985. С. 179–285.
- [21] Spiridonov V., Vinet L., Zhedanov A. Difference Schrödinger operators with linear and exponential discrete spectra // Lett. Math. Phys. 1993. V. 29. P. 63–73.
- [22] Novikov S. P., Taimanov I. A. Difference analogs of the harmonic oscillator // App. II in [31].
- [23] Атакишиев Н. М., Суслов С. К. Разностные аналоги гармонического осциллятора // ТМФ. 1990. Т. 85. № 1. С. 64–73.
- [24] Фиников С. П. Теория конгруэнций. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [25] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et des applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris, 1887–1896.
- [26] Tzitzéica G. Géométrie différentielle projective des réseaux. Paris–Bucharest, 1924.
- [27] Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. № 7. С. 443–448.

- [28] Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [29] Bulgadaev S. Two-dimensional integrable field theories related with simple Lie algebras // Phys. Lett. B. 1980. V. 96. P. 151–159.
- [30] Веселов А. П., Новиков С. П. Точно решаемые двумерные операторы Шрёдингера // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 171–172.
- [31] Novikov S. P., Veselov A. P. Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations // Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad / ed. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov. AMS Transl. Ser. 2. V. 179, 1997. P. 109–132.
- [32] Дубровин А. Б., Кричевер И. М., Новиков С. П. Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 15–18.
- [33] Веселов А. П., Новиков С. П. Конечноразностные двумерные периодические операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 784–788.
- [34] Novikov S. P., Veselov A. P. Two-dimensional Schrödinger operator: inverse scattering and evolutional equations // Physica. D. 1986. V. 18. P. 267–273.
- [35] Бобенко А. И. Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения // УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 3–42.
- [36] Aharonov Y., Casher A. Ground state of a spin 1/2 charged particle // Phys. Rev. A. 1979. V. 19. № 6. P. 2461–2463.
- [37] De Vega H., Shaposhnik E. A. // Phys. Rev. D. 1976. V. 14.
- [38] Новиков С. П. Магнитно-блоховские функции и векторные расслоения. Типичные законы дисперсии и их квантовые числа // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 3. С. 538–543.
- [39] Лыскова А. С. Об операторе Шрёдингера в магнитном поле // УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 189–190.
- [40] Кричевер И. М. Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 1. С. 31–36.
- [41] Krichever I., Lipan O., Wiegman P., Zabrodin A. Quantum integrable systems and elliptic solutions of classical discrete nonlinear equations // Preprint.
- [42] Novikov S. P. Difference analogs of Laplace transformations and two-dimensional Toda lattices // App. I in [31].
- [43] Новиков С. П. Алгебраические свойства двумерных разностных операторов // УМН. 1997. Т. 52. № 1. С. 225–226.
- [44] Novikov S. P. Difference 2D Schrödinger operators: Algebraic symmetry and exact solvability // Preprint. Univ. Paris-VII, Paris, April 1997.

University of Maryland at College Park;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: novikov@ipst.umd.edu dynnikov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

08.09.1997