Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, Об одной теореме М. Холла, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:25:20

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М. ХОЛЛА

Н. Г. Мошевитин

1. В работе [1] М. Холл показал, что всякое вещественное число z представимо в виде $z = x + y + c$, где c — целое число, а в разложениях x и y в регулярные цепные дроби $x = [0; b_1, b_2, b_3, \dots]$, $y = [0; b'_1, b'_2, b'_3, \dots]$ все неполные частные ограничены: $b_\nu, b'_\nu \leq 4 \quad \forall \nu = 1, 2, 3, \dots$. В этой же работе получен аналогичный результат для представления z в виде $z = xy + c$. В настоящей заметке мы даем очень простое обобщение теоремы Холла. Отметим, что наиболее простое изложение результатов Холла и обзор приложений имеется в [2], а в [3] получен в каком-то смысле обратный результат.

2. Рассматривается отрезок $[a; a+1] \subset \mathbb{R}$, где a — целое из интервала $0 \leq a \leq k$. Через $F_a(k)$ обозначается множество иррациональных чисел из отрезка $[a; a+1]$, неполные частные разложения в цепную дробь которых не превосходят k : $F_a(k) = \{\xi = [a; b_1, b_2, b_3, \dots] : b_\nu \leq k \quad \forall \nu\}$. Ясно, что $\min F_a(k) = [a; k, 1]$; $\max F_a(k) = [a; 1, k]$. Далее рассматривается отрезок $U = [\min F_a(k); \max F_a(k)]$.

Рассматривается функция $G(x, y) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ класса гладкости $G \in C^1(U \times U)$. Пусть $\mathcal{J} = \{z \in \mathbb{R} : (\exists x, y \in U) z = G(x, y)\}$. В силу непрерывности G множество $\mathcal{J}$ является отрезком.

ТЕОРЕМА. Пусть функция G такова, что

$$\tau = \min \left\{ \min_{x, y \in U} |\partial G / \partial x|, \min_{x, y \in U} |\partial G / \partial y| \right\} > 0.$$

Обозначим

$$T = \max \left\{ \max_{x, y \in U} |\partial G / \partial x|, \max_{x, y \in U} |\partial G / \partial y| \right\}.$$

Пусть $k \geq 4T/\tau$. Тогда образ множества $F_a(k) \times F_a(k)$ при отображении $G(x, y)$ является отрезком $\mathcal{J}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если отрезок $\mathcal{J}$ имеет длину ≥ 1 , то всякое действительное число z представимо в виде $z = G(x, y) + c$, где $c \in \mathbb{Z}$, и все неполные частные в разложениях $x = [a; b_1, b_2, b_3, \dots]$, $y = [a; b'_1, b'_2, b'_3, \dots]$ ограничены величиной k .

Если рассмотреть $a = 0$ и функцию $G(x, y) = x + y$, то из нашей теоремы сразу следует цитировавшийся во введении результат Холла о представимости произвольного z в виде $z = x + y + c$

с числами x, y , неполные частные которых ограничены четверкой. Отметим, что сформулированная теорема останется справедливой, если множество $F_a(k)$ заменить множеством $F(k)$ всех положительных иррациональных чисел, неполные частные которых (включая неполное частное с номером ноль) ограничены величиной k . Теорема верна и для любого множества вида $F_a(k) \cap [u; v]$, где $u = [a; b_1, \dots, b_t]$, $v = [a; b_1, \dots, b_t, 1]$, если t четно и $u = [a; b_1, \dots, b_t, 1]$, $v = [a; b_1, \dots, b_t]$, если t нечетно, при условии, что $k \geq \max\{b_1, \dots, b_t\}$.

3. Стандартная процедура построения множества $F_a(k)$ (см. [1], [2]) позволяет получить множество $F_a(k)$ из отрезка U посредством последовательного выкидывания некоторых интервалов Δ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$:

$$F_a(k) = U \setminus \bigcup_{\nu} \Delta_\nu.$$

Каждый выкидываемый интервал Δ_ν при этом процессе выкидывается из отрезка $M(\Delta_\nu)$, не затронутого предыдущими выкидываниями. После удаления из $M(\Delta_\nu)$ интервала Δ_ν остаются отрезки N_1, N_2 так, что $M(\Delta_\nu) = N_1 \sqcup \Delta_\nu \sqcup N_2$. Далее через $|\cdot|$ обозначена длина отрезка. Доказательство следующей леммы основано на простых общеизвестных вычислениях (см. [1], [2]).

ЛЕММА. $\min\{|N_1|, |N_2|\} \geq k|\Delta|/4$.

СЛЕДСТВИЕ. Если Δ', Δ'' суть два различных выкидываемых интервала, то для расстояния $\rho(\Delta', \Delta'')$ между ними как множествами на прямой выполнено $\rho(\Delta', \Delta'') \geq k \min\{|\Delta'|, |\Delta''|\}/4$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу того, что $\tau > 0$, производные $\partial G/\partial x, \partial G/\partial y$ на квадрате U^2 везде одного знака. Положим $z \in \mathcal{J}$. Ясно, что можно считать, что z лежит строго внутри $\mathcal{J}$. Рассмотрим линию уровня $\gamma_z = \{(x, y) \in U \times U : G(x, y) = z\}$. Это компактная кривая класса C^1 , начинающаяся и кончающаяся на границе квадрата $U \times U$. Предположим, что она не пересекается с множеством $F_a(k) \times F_a(k)$. Тогда γ_z покрывается счетным набором открытых “щелей” Π вида $\{(x, y) : x \in \Delta, y \in [a; a+1]\}$ или $\{(x, y) : y \in \Delta, x \in [a; a+1]\}$, которые мы выкидываем из квадрата $[a; a+1]^2$, чтобы получить $F_a(k) \times F_a(k)$. Так как γ_z — компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, так что $\gamma_z \in \bigcup_{\nu=1}^m \Pi_\nu$. Пусть Π^* — некоторая щель из этого конечного покрытия, ширина которой $|\Delta^*|$ минимальна. Пусть Π' и Π'' — щели, перпендикулярные щели Π^* , через которые кривая γ_z “входит” и “выходит” в щель Π^* . Не ограничив общности, можно считать, что щели Π' и Π'' лежат внутри квадрата $U \times U$. Пусть $|\Delta'|$ ($|\Delta''|$) — ширина щели Π' (Π''). По выбору Π^* имеем $|\Delta| \leq \min\{|\Delta'|, |\Delta''|\}$. Но расстояние l^* между параллельными щелями Π' и Π'' по следствию из леммы удовлетворяет неравенству $l^* \geq k \min\{|\Delta'|, |\Delta''|\}/4$. Итак, некоторый отрезок кривой γ_z целиком лежит в некотором прямоугольнике $\{(x, y) : \xi < x < \xi + l^*, \eta < y < \eta + |\Delta^*|\}$ или $\{(x, y) : \xi < y < \xi + l^*, \eta < x < \eta + |\Delta^*|\}$. Не ограничив общности, можно рассмотреть только первый случай. Представляя γ_z в виде графика функции $y = f_z(x)$, имеем $|\partial f_z/\partial x| < |\Delta^*|/l^* \leq 4/k$ в некоторой точке кривой γ_z . С другой стороны, $|\partial f_z/\partial x| = |\partial G/\partial x|/|\partial G/\partial y| \geq \tau/T$. Таким образом, $k < 4T/\tau$.

Из сказанного выше следует, что при $k \geq 4T/\tau$ выполнено

$$(\forall z \in \mathcal{J}) \quad \gamma_z \cap F_a(k) \times F_a(k) \neq \emptyset.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hall M. Jr. // Ann. Math. (2). 1947. V. 48. P. 966–993. [2] Cusick T. W., Flahive M. E. The Markoff and Lagrange spectra. Math. surveys and monographs. V. 30: A.M.S. R.I., 1989. [3] Cusick T. W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 27. № 1. P. 35–38.