Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Арсеньева, О геометрии конформно-полуплоских обобщенных эрмитовых поверхностей, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:02:10

О ГЕОМЕТРИИ КОНФОРМНО-ПОЛУПЛОСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

О. Е. АРСЕНЬЕВА

Эрмитовой поверхностью называется 4-мерное почти эрмитово многообразие со знако-определенной метрикой и интегрируемой почти комплексной структурой. Если $\{M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ – эрмитова поверхность, то многообразие M можно рассматривать как двумерное комплексное многообразие, снабженное эрмитовой метрикой $\langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1} \langle X, JY \rangle$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (где $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M), т.е. как комплексный аналог римановых поверхностей, чем и объясняется название. Эрмитовы поверхности изучались с различных точек зрения многими авторами (см., например, [1]–[3]). Одна из важнейших особенностей геометрии эрмитовых поверхностей, как и всяких четырехмерных псевдоримановых многообразий, определяется тем, что группа Ли $SO(4, \mathbb{R})$ не является простой. Геометрическим следствием этого факта является существование канонического разложения модуля $\Lambda_2(M)$ 2-форм такого многообразия M в прямую сумму подмодулей $\Lambda_+(M)$ автодуальных и $\Lambda_-(M)$ антиавтодуальных форм. Многообразие M называется *автодуальным* (соответственно, *антиавтодуальным*), если ограничение эндоморфизма Вейля конформной кривизны на подмодуль $\Lambda_-(M)$ (соответственно, $\Lambda_+(M)$) равно нулю. Значение автодуальных и антиавтодуальных (иначе говоря, конформно полуплоских) многообразий определяется связью их геометрии с геометрией твисторного расслоения над такими многообразиями. Например, известная теорема Пенроуза–Атьи–Хитчина–Сингера [4] утверждает, что каноническая почти комплексная структура пространства твисторов 4-мерного ориентированного риманова многообразия интегрируема тогда и только тогда, когда это многообразие конформно полуплоско. В работе [5] Чен поставил проблему классификации конформно-полуплоских эрмитовых поверхностей. В направлении решения этой проблемы был получен ряд результатов [6]. Однако существенные продвижения были получены лишь в случае келеровых поверхностей (т.е. 4-мерных келеровых многообразий) ([7]–[10]).

В настоящей работе получен ряд результатов, касающихся геометрии конформно-полуплоских эрмитовых поверхностей как классического, так и гиперболического типа (обобщенных эрмитовых поверхностей), обобщающих известные в этом направлении результаты Коды, Ито и других авторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенной эрмитовой поверхностью* называется тройка $\{M, J, g\}$, где M – 4-мерное гладкое многообразие, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – псевдориманова метрика на M , J – эндоморфизм касательного пучка многообразия M , называемый *структурным эндоморфизмом*, причем

$$1) \quad J^2 = \alpha \text{ id}, \quad \alpha = \pm 1; \quad 2) \quad \langle JX, Y \rangle + \langle X, JY \rangle = 0; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

На всяком таком многообразии внутренним образом определены 2-форма $\Omega(X, Y) = \langle J^3 X, Y \rangle$, называемая *фундаментальной формой*, а также 1-форма $\omega = \delta \Omega \circ J$, называемая *формой Ли* (здесь δ – оператор кодифференцирования). Заметим, что в случае $\alpha = -1$ и положительно определенной метрики мы приходим к понятию классической эрмитовой поверхности.

ТЕОРЕМА 1. *Тензор Ричи r автодуальной обобщенной эрмитовой поверхности M комплексно линеен, и следовательно, определена форма Ричи $\rho(X, Y) = r(J^3 X, Y)$. Эта форма автодуальна тогда и только тогда, когда M – многообразие Эйнштейна, и антиавтодуальна тогда и только тогда, когда M – многообразие нулевой скалярной кривизны.*

ТЕОРЕМА 2. *Автодуальная обобщенная эрмитова поверхность M конформно плоска тогда и только тогда, когда*

- (1) M – RK -многообразие, т.е. его тензор R Римана-Кристоффеля инвариантен относительно структурного эндоморфизма;
- (2) $\delta \omega = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - \frac{\kappa}{3}$, где κ – скалярная кривизна многообразия.

ТЕОРЕМА 3. *Компактная автодуальная эрмитова поверхность M неположительной скалярной кривизны конформно плоска тогда и только тогда, когда M – келерово многообразие нулевой скалярной кривизны.*

ТЕОРЕМА 4. *Автодуальная обобщенная эрмитова поверхность является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда она является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны s . При этом $s = \frac{\kappa}{6} - \frac{1}{8}\|\omega\|^2 + \frac{1}{4}\delta\omega$.*

Этот результат существенно обобщает и усиливает известный результат Коды [6], утверждающий, что автодуальная эрмитова поверхность Эйнштейна является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны.

ТЕОРЕМА 5. *Компактная автодуальная эрмитова поверхность постоянной неотрицательной голоморфной секционной кривизны и неположительной скалярной кривизны локально голоморфно изометрична пространству $\mathbb{C}^2$, снабженному канонической келеровой структурой.*

ТЕОРЕМА 6. *Обобщенная эрмитова поверхность M антиавтодуальна тогда и только тогда, когда*

- (1) *Внешний дифференциал ее формы Ли ω является антиавтодуальной 2-формой;*
- (2) $\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{\kappa}{3}$.

Этот результат существенно обобщает известный критерий Ито [9] антиавтодуальности келеровых поверхностей, а также соответствующий результат автора для обобщенных келеровых поверхностей [10].

ТЕОРЕМА 7. *Компактная обобщенная эрмитова поверхность M с неизотропной 2-формой $d\omega$ (в частности, компактная эрмитова поверхность) антиавтодуальна тогда и только тогда, когда*

- (1) *M – локально конформно-келерово многообразие;*
- (2) $\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{\kappa}{3}$.

Этот результат существенно обобщает и поясняет известный критерий Коды антиавтодуальности компактных эрмитовых поверхностей [6].

ТЕОРЕМА 8. *Компактная антиавтодуальная эрмитова поверхность неположительной скалярной кривизны является келеровым многообразием нулевой скалярной кривизны.*

ТЕОРЕМА 9. *Метрика компактной антиавтодуальной эрмитовой поверхности локально конформна метрике нулевой скалярной кривизны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tricerri F., Vaisman I. // Math. Z. 1986. V. 192. P. 205–216. [2] Vaisman I. // Ann. Math. Pura ed Appl. 1982. V. 32. P. 1–18. [3] De Andres L. C., Cordero L. A., Fernandes M., Mencia J. J. // Geom. Dedicata. 1989. V. 29. P. 227–232. [4] Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. // Proc. Roy. London. 1978. V. A362. P. 425–461. [5] Chen B. Y. // Journ. Different. Geom. 1978. V. 13. P. 547–558. [6] Koda T. // Kodai Math. 1987. V. 10. P. 335–342. [7] Bourguignon J.-P. // Invent. Math. 1981. V. 63. P. 263–286. [8] Derdzinski A. // Comp. Math. 1983. V. 49. P. 405–433. [9] Itoh M. // Comp. Math. 1984. V. 51. P. 265–273. [10] Арсеньева О. Е. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 137–148.