Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Гервер, Е. А. Кудрявцева, Новое доказательство теорем об универсальной последовательности и экстремальных свойствах дискретных мер, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm898>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:06:25

**НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ
ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ МЕР**

М. Л. ГЕРВЕР, Е. А. КУДРЯВЦЕВА

В статье предложен новый, опирающийся на принцип двойственности способ доказательства теорем из [1], [2].

Двойственные экстремальные задачи. На полуоси $s \geq 0$ рассмотрим неотрицательные меры Стильеса $da = da(s)$ с интегралом, равным 1, и каждой такой мере сопоставим две функции:

$$g(da, t) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+t}, \quad t \geq 0, \quad h(da, x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty g(da, t) d\sqrt{t}, \quad x \in [0, 1].$$

Произвольно фиксируем положительную полунепрерывную снизу функцию (*мажоранту*) $M(t)$, $t \in [0, 1]$. Отнесем da к множеству $\mathcal{A}$, если $g(da, t) \leq M(t)$ при всех $t \in [0, 1]$. На $\mathcal{A}$ рассмотрим однопараметрическое (зависящее от параметра $x \in [0, 1]$) семейство экстремальных задач:

$$(1) \quad \text{найти } \sup h(da, x) \text{ по всем } da \in \mathcal{A}.$$

Физическую интерпретацию (1) можно найти в [1], [2].

Теперь рассмотрим пары $(b_0, db = db(t))$, где b_0 – неотрицательные числа, а $db(t)$ – неотрицательные меры Стильеса на отрезке $[0, 1]$, и каждой такой паре сопоставим функцию $r(b_0, db, s)$, $s \geq 0$, и число $H(b_0, db)$:

$$r(b_0, db, s) = b_0 + \int_0^1 \frac{db(t)}{s+t}, \quad H(b_0, db) = b_0 + \int_0^1 M(t) db(t).$$

На полуоси $s \geq 0$ фиксируем однопараметрическое (зависящее от параметра x) семейство функций (*семейство минорант*)

$$I(s, x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{d\sqrt{t}}{s+t} = \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{s/x}}{\sqrt{s}}, \quad x \in (0, 1]; \quad I(s, 0) = \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Фиксируем $x > 0$ в (1), положим $h(da) = h(da, x)$, $I(s) = I(s, x)$, $s \geq 0$, и отнесем к множеству $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x)$ пары (b_0, db) , для которых $r(b_0, db, s) \geq I(s)$ при всех $s \geq 0$. Задача, двойственная к (1), формулируется так:

$$(2) \quad \text{найти } \inf H(b_0, db) \text{ по всем } (b_0, db) \in \mathcal{B}(x).$$

ТЕОРЕМА 1 (принцип двойственности). *Верхняя и нижняя грани в (1), (2) достигаются и равны друг другу: $\max_{\mathcal{A}} h(da, x) = \min_{\mathcal{B}(x)} H(b_0, db)$, $x \in (0, 1]$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Особыми точками меры $da \in \mathcal{A}$ назовем точки $t \in [0, 1]$, в которых $g(da, t) = M(t)$, а особыми точками пары $(b_0, db) \in \mathcal{B}$ – точки $s \geq 0$, в которых $r(b_0, db, s) = I(s)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01852).

КРИТЕРИЙ СОВПАДЕНИЯ $h(da)$ и $H(b_0, db)$. Для любой меры $da \in \mathcal{A}$ и любой пары $(b_0, db) \in \mathcal{B}$ выполняется неравенство $h(da) \leq H(b_0, db)$. Для совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$ необходимо и достаточно, чтобы мера da была сосредоточена в особых точках (b_0, db) , а мера db – в особых точках da .

В последующих формулировках участвует универсальная (не зависящая от выбора мажоранты $M(t)$) убывающая и сходящаяся к 0 последовательность $X_k \in [0, 1]$, $k \geq 1$. Ее определение связано с полиномами Лежандра

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_n(x) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)xL_{n-1}(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)L_{n-2}(x),$$

а именно, X_k – квадрат наименьшего положительного корня $L_{2k+1}(x)$, $k \geq 1$:

$$(3) \quad \begin{aligned} X_1 &= 0.60000, \quad X_2 = 0.28995, \quad X_3 = 0.16471, \quad X_4 = 0.10514, \quad X_5 = 0.07265, \\ X_6 &= 0.05311, \quad X_7 = 0.04048, \quad X_8 = 0.03186, \quad X_9 = 0.02572, \quad X_{10} = 0.02119, \dots \end{aligned}$$

ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ. Пусть $x \geq X_k$ из (3), и пусть

$$s_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad s_1 > \dots > s_m \geq 0,$$

являются особыми точками пары $(b_0, db) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(x)$. Тогда $m \leq k$.

Из последнего неравенства, принципа двойственности и критерия совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$ следует

ТЕОРЕМА 2 (о дискретности da°). Пусть $x \geq X_k$ из (3), и пусть $\max_{\mathcal{A}} h(da, x)$ достигается на мере da° . Тогда da° сосредоточена в конечном числе точек $s_1^\circ > \dots > s_n^\circ$ и $n = n(x) \leq k$.

ТЕОРЕМА 3 (о строгом максимуме). Для любой меры $da \in \mathcal{A}$, не равной da° , выполняется строгое неравенство $h(da) < h(da^\circ)$.

Предположим дополнительно, что $\lim_{t \rightarrow 0} tM(t) = 0$. Тогда (см. теорему 2) $s_n^\circ > 0$, и теоремы 2, 3 можно переформулировать следующим образом:

Для каждого $x \in (0, 1]$ существуют и единственны такое $n = n(x)$ и такие

$$a_j = a_j(x) > 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \sum a_j = 1, \quad s_1 = s_1(x) > \dots > s_n = s_n(x) > 0,$$

что строгий максимум $h(da, x)$ достигается на мере $da = \sum_1^n a_j \delta(s - s_j)ds$, причем $n(x) \leq k$, если $x \in [X_k, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 4. С. 3–56. [2] Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А. // Докл. АН. 1997. Т. 356. № 1. С. 25–28.

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН;
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: gerver@mitp.rssi.ru m.l@gerver.mccme.ru

Принято редколлегией
03.09.1997