Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm899>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:47:18

ВЛОЖЕНИЕ ГРАФОВ В ГИПЕРКУБЫ И КУБИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

М. ДЕЗА, М. И. ШТОГРИН

Мы продолжаем исследования, начатые в [1]; оттуда взяты определения и обозначения.

1. Правильных разбиений S^n , R^n , H^n на компактные правильные многогранники всего имеется по 11 при $n = 3$ и $n = 4$ и 4 при любом $n \geq 5$. Ниже мы увидим, что при $n = 3$ и $n = 4$ не вложимы лишь по 6 разбиений: 24 , 600 , 120 , (Ico, Do) , (Do, β_3) , (Do, Ico) и $(\alpha_4, 600)$, $(\beta_4, 24)$, $(24, \gamma_4)$, $(120, \alpha_4)$, $(120, \beta_4)$, $(120, 600)$. Символы $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n, Ico, Do, 24, 120, 600$ обозначают n -симплекс, n -октаэдр, n -куб, Z_{n-1} , икосаэдр, додекаэдр, 4-мерный 24-, 120-, 600-гранник; (F, V) – правильный многогранник с гранью F и звездой V .

ТЕОРЕМА 1. При $n = 3$ и $n = 4$ вложимыми правильными разбиениями, кроме $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}, \delta_{n+1}$, являются лишь разбиения H^n на кубы γ_n , т.е. $(\gamma_3, Ico) \rightarrow Z_\infty$, $(\gamma_4, 600) \rightarrow Z_\infty$.

Вложения и ссылки для случаев $n < 4$ и $n > 5$ указаны в [1]. При $n \geq 5$ дуальный полу- n -кубу многогранник не 5-гонален. Вложение $(2p, 2q) \rightarrow Z_\infty$ имеет широкое обобщение: любое разбиение H^2 на четноугольники с четным схождением (и дуальное) вложимо в Z_∞ . Кроме не 7-гональных 600 и $(\alpha_4, 600)$, остальные невложимые правильные разбиения не 5-гональны. Не 7-гональность 600 , доказанная впервые в [2], следует даже прямо из конструкции Госсета: добавить пирамиды на все 24 икосаэдральные грани полурегулярного многогранника $s\{3, 4, 3\}$; пирамида на икосаэдре 5-, но не 7-гональна. Вложение $s\{3, 4, 3\} \rightarrow \frac{1}{2}H_{12}$ подтвердилось. Многогранник 600 , кажется, 5-гонален.

ТЕОРЕМА 2. Усеченные разбиения $\text{tr } P$ 5-гональны (более того, вложимы) только для следующих правильных разбиений: $\text{tr } 24 \rightarrow H_{12}$, $\text{tr}(24, \gamma_4) \rightarrow Z_{12}$, $\text{tr}(p^q)$ при $(p^q) \neq (3^5)$ и $q \neq 3$ (включая $\text{tr } \beta_3 \rightarrow H_6$, $\text{tr}(3^6) = (6^3) \rightarrow Z_3$, $\text{tr } \delta_3 = (4.8^2) \rightarrow Z_4$, гиперболические $\text{tr}(p^q) \rightarrow Z_\infty$ при $p = 2k$ или $\text{tr}(p^q) \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$ при $p = 2(k+1)$ с $q > 3$).

Здесь $(24, \gamma_4) = Vo(D_4)$, где $Vo(\Lambda)$ означает остов разбиения Вороного для решетки Λ .

Разбиения $(\text{tr } P)^*$ получаются из P^* добавлением пирамид над всеми $(n-1)$ -гранями. $(\text{tr } P)^* \rightarrow \frac{1}{2}H_m$, $m = 7, 12, 10, 26$, если $P = \alpha_3, \gamma_3, Ico, Do$. $(\text{tr}(p^q))^* \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$ или $\frac{1}{2}Z_\infty$ и не 5-гонально, если $(p^q) = (3^6)$ или (6^3) и (4^4) , (3^4) . $(\text{tr } P)^*$ не 5-гонально для $P = 24, 600, 120, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$, $n \geq 4$. Гиперболические $(\text{tr}(p^q))^*$ не 5-гональны при $q = 4$, вложимы в $\frac{1}{2}Z_\infty$ при $q \neq 4$.

Для усечений до середины ребер имеем: $\text{Tr } \alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$, $\text{Tr } \beta_n$ и $\text{Tr } \gamma_n$ не 5-гональны при $n \geq 3$, $\text{Tr}(p^q) \rightarrow Z_\infty$ при $p > 3 < q$ (оба четные) и $\text{Tr}(p^q) \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$ при остальных $p > 3 < q$, не 5-гонально при $p = 3 < q$ четно или четно $p > 3 = q$.

Отметим аналогию вложения обычных усечений $\alpha_2, \beta_3, 24, Vo(D_4)$ в H_3, H_6, H_{12}, Z_{12} и их золотых усечений $C_3, Ico, s\{3, 4, 3\}, s\{3, 4, 3, 3\}$ в $\frac{1}{2}H_3, \frac{1}{2}H_6, \frac{1}{2}H_{12}$ и, быть может, $\frac{1}{2}Z_{12}$.

2. Как известно [3], невыпуклые (звездные) правильные многогранники не существуют для S^n при $n \geq 5$ и для R^n при всех n ; при $n = 4$ их 10, при $n = 3$ их 4. Имея остов обычного додекаэдра, большой звездный додекаэдр $\{\frac{5}{2}, 3\}$ вложим в $\frac{1}{2}H_{10}$. Имея остов икосаэдра, остальные $\{3, \frac{5}{2}\}, \{\frac{5}{2}, 5\}, \{5, \frac{5}{2}\}$ вложимы в $\frac{1}{2}H_6$. Здесь $\frac{5}{2}$ обозначает звездный 5-угольник.

Существует 6 бесконечных правильных многогранников: 3 выпуклых $\delta_3 = Z_2, (3^6), (6^3)$ и 3 невыпуклых. Последние (см., например, [4, с. 105]) являются замкнутыми лабиринтами: 1) δ_4 с половиной выброшенных кубов; 2) $Vo(A_3^*)$ с половиной выброшенных усеченных β_3 ; 3) униформное разбиение Фоппла на α_3 и усеченные α_3 с половиной выброшенных α_3 (одной ориентации).

ТЕОРЕМА 3. Остовы лабиринтов 1) и 2) вложимы, соответственно, в Z_3 и Z_6 . Остов лабиринта 3) не 5-гонален.

Примеры 4 интересных невыпуклых многогранников даны, например, в [4, с. 98, 248, 161, 34]: а) 7-гранник P , полученный из β_3 заменой 4 из 8 его граней, взятых через одну, на 3 квадрата,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166).

представляет собою проективную плоскость; остовы P и β_3 совпадают и вложимы в $\frac{1}{2}H_4$; б) имея остов $(\text{tr } \gamma_3)^*$, т.е. β_3 с пирамидами на каждой грани, стелла октангула вложима в $\frac{1}{2}H_{12}$; в) имея остов икосаэдра, ортогональный икосаэдр Джессена (он нетвердый) вложим в $\frac{1}{2}H_6$; д) полярный коллапсоид не 5-гонален.

3. Назовем *шамферингом* планарного графа G и обозначим через $\text{Ch } G$ замену каждого его ребра шестиугольником: над всеми элементарными ячейками, вырезаемыми графом на плоскости или сфере, строятся призмы, а затем все исходные ребра исключаются.

ТЕОРЕМА 4. *Все вложимые шамферинги правильных планарных разбиений суть для S^2 : $\text{Ch } \gamma_3 \rightarrow H_7$ и $\text{Ch } D_6 \rightarrow \frac{1}{2}H_{22}$; для R^2 : $\text{Ch}(4^3) \rightarrow Z_4$ и $\text{Ch}(6^3) = (6^3) \rightarrow Z_3$; для H^2 : $\text{Ch}(2m+1, q) \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$ при $m \neq 1$ и $\text{Ch}(2m, q) \rightarrow Z_\infty$.*

Следует отметить, что 1) шамферинги всех остальных правильных разбиений, а также полуправильных разбиений S^2 , R^2 не 5-гональны; 2) кроме $\text{Ch}_t(6^3) = (6^3)$, итеративные шамферинги всех других правильных разбиений не 5-гональны; 3) кроме $(\text{Ch } \alpha_3)^* \rightarrow \frac{1}{2}H_8$, $(\text{Ch } P)^*$ для других правильных разбиений S^2 и R^2 не 5-гональны; 4) не 5-гональность $\text{Ch } P$ вытекает из того, что P имеет либо треугольную грань, либо, как изометрический подграф остова, 4-угольную грань с висячими ребрами на двух противоположных вершинах; 5) $\text{Ch } \gamma_3$, $\text{Ch}(4^4)$, $\text{Ch}(2m, q)$ зонотопальны. $\text{Ch}(4^4)$ дуален разбиению (4^4) , рассматриваемому как бесконечная шахматная доска, с пирамидами на всех черных клетках. $\text{Ch}(4^4)$ был на мозаике XV века в Португалии (см. [5, рис. 9, 10]).

Все 22 эквитранзитивные разбиения R^2 (их конгруэнтные грани принадлежат одной и той же орбите группы автоморфизмов разбиения) даны в [6]; это все 3 правильных, 7 архимедовых (все зеркально-симметричные) и 12 других, включая семь 2-униформных, четыре 3-униформных и одно 4-униформное. О вложимости первых 10 см. в [1].

ТЕОРЕМА 5. *Среди последних 12 эквитранзитивных разбиений R^2 и им дуальных 5-гональны (более того, вложимы) только следующие: $(3^4.6; 3^2.6^2) \rightarrow \frac{1}{2}Z_5$, $(3^3.4^2; 4^4)_1 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $[3^6; 3^2.6^2] \rightarrow Z_\infty$, $[3.4^2.6; 3.6.3.6]_2 \rightarrow Z_3$, $(3^6; 3^2.6^2; 6^3) \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$, $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3) \rightarrow \frac{1}{2}Z_5$, $[3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4] \rightarrow Z_4$, $[3^6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3]_1 \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$.*

Заметим, что следующие два разбиения R^2 (указанные, например, в [4, с. 104, 89]) не 5-гональны: а) разбиение Дюрера на правильные 5-угольники и ромбы; б) разбиение на греческие кресты. (Это случай $t=2$ разбиения (4^4) с t новыми точками на каждом ребре; только при $t=0$ получается 5-гональность.) Разбиение Пенроуза R^2 (и его аналог в R^3) двумя золотыми ромбами (ромбоздрами) вложимо в Z_5 (Z_6), но его подразделение Робинсона и другое разбиение на равнобедренные золотые треугольники (см. [7, рис. 2]), а также pinwheel-разбиение на $1-2-\sqrt{5}$ прямоугольные треугольники (см. [8]), не 5-гональны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Деза М., Штогрин М. И. // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 199–200. [2] Assouad P. // The Geometric Vein, the Coxeter Festschrift. Berlin: Springer, 1981. P. 141–147. [3] Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. New York: The Macmillan Company; London: Collier-Macmillan Ltd., 1963. [4] Wells D. The Penguin Dictionary of curious and interesting geometry. New York: Penguin Books, 1991. [5] Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. New York: W. H. Freeman and Company, 1987. [6] DeBroey I., Landuyt F. // Geom. Dedicata. 1981. V. 11. P. 47–60. [7] Baake M., Schlottmann M. // Proc. 5th Conf. on Quasicrystals, 1995. P. 15–21. [8] Radin C. // Ann. Math. 1994. V. 139. P. 661–702.