Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества в алгебрах и многообразиях, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 61–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:31:55

УДК 512.57+512.8

СВЕРХТОЖДЕСТВА В АЛГЕБРАХ И МНОГООБРАЗИЯХ

Ю. М. Мовсисян

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	61
§ 1. Понятие сверхтождества. Сверхтождества бинарных представлений	64
1.1. Понятие сверхтождества, примеры	64
1.2. Бинарные теоремы Кэли для полугрупп, идемпотентных и коммутативных полугрупп, групп и мультипликативных групп полей	72
1.3. Стохастические алгебры. Понятие котождества	79
§ 2. Категория арифметически однотипных алгебр	80
2.1. Гомоморфизмы и автоморфизмы арифметически однотипных алгебр	80
2.2. Сверхмногообразия алгебр	85
§ 3. Категория арифметически однотипных систем. Неклассическая семантика языка 2-го порядка	95
§ 4. Нетривиальные сверхтождества ассоциативности и дистрибутивности в обратимых и близких к ним алгебрах	98
Список литературы	112

Введение

Теория моделей (алгебр) изучает связи между формальным языком и его интерпретациями или моделями (алгебрами). Простейший из формальных языков — язык первого порядка (ступени) [1], [2]. Основателями теории моделей (алгебр) языка первого порядка были Левенгейм, Сколем, Гедель, Тарский, Мальцев, Биркгоф.

Следующим по важности формальным языком является язык второго порядка (второй ступени), подробно описываемый в [1], [2].

Формулы в языке 2-го порядка (называемые формулами 2-го порядка) состоят из тех же логических символов, предметных, предикатных и функциональных переменных, что и в формальном языке 1-го порядка. Отличие состоит лишь в том, что в формулах 2-го порядка кванторные символы $\forall$, $\exists$ могут связывать не только предметные переменные, но и предикатные или функциональные переменные.

Формула языка 2-го порядка называется замкнутой (козамкнутой), если каждая ее предметная (соответственно функциональная и предикатная) переменная связана квантором, т.е. замкнутая (козамкнутая) формула не содержит свободных предметных

(соответственно функциональных и предикатных) переменных. Формула 2-го порядка называется абсолютно замкнутой, если каждая ее (предметная, функциональная, предикатная) переменная связана квантором, т.е. такая формула не содержит ни предметных, ни функциональных, ни предикатных свободных переменных.

О классах алгебр и алгебраических систем, определяемых формулами 2-го порядка общего вида, мало что известно [1], [3]–[5].

Важный класс формул 2-го порядка со специализированными кванторами выделен А. И. Мальцевым [6], доказавшим, что для каждого свойства моделей, которое можно выразить квазиуниверсальными формулами, справедлива локальная теорема: если квазиуниверсальная формула Φ истинна на подсистемах $\mathcal{A}_i$, локально покрывающих алгебраическую систему $\mathcal{A}$, то Φ истинна и на $\mathcal{A}$ (см. также [7]).

С начала шестидесятых годов в различных разделах алгебры и ее приложениях исследуются следующие два класса абсолютно замкнутых формул второго порядка (применимые к алгебрам) с ограниченными кванторами:

$$(0.1) \quad \forall X_1, \dots, X_k \exists X_{k+1}, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (W_1 = W_2),$$

$$(0.2) \quad \forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (W_1 = W_2),$$

где W_1, W_2 – термы (слова) от функциональных переменных $X_1, \dots, X_m$ и от предметных переменных $x_1, \dots, x_n$. Первая формула называется $\forall \exists$ ($\forall$)-тождеством, а вторая – сверхтождеством или $\forall$ ($\forall$)-тождеством. Выполнимость (истинность) этих формул в алгебре $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ понимается с ограниченными функциональными кванторами ($\forall X_i$), ($\exists X_j$), означающими: “для каждого значения $X_i = A_i \in \Sigma$ соответствующей арности”, “существует значение $X_j = A_j \in \Sigma$ соответствующей арности”; предполагается возможность такой замены, т.е.

$$\{|X_1|, \dots, |X_m|\} \subseteq \{|A| \mid A \in \Sigma\} = T_{\mathcal{A}},$$

где $|S|$ – арность S .

Алгебра $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ называется алгеброй с арифметическим типом $T \subseteq \mathbb{N}$ или T -алгеброй, если $T = T_{\mathcal{A}}$. Например, арифметический тип кольца $Q(+, \cdot)$ есть $\{2\}$.

Формула языка 2-го порядка (2-й степени) без предикатных переменных называется T -формулой, если арность каждой ее функциональной переменной содержится в T . Значение и истинность T -формулы в T -алгебре $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ определяем с такими же ограниченными функциональными кванторами ($\forall X_i$), ($\exists X_j$), что и в $\forall \exists$ ($\forall$)-тождествах и сверхтождествах. При интерпретации T -формулы в T -алгебре $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ значения (соответствующих арностей) для свободных функциональных переменных также берем из множества операций Σ .

Совокупность T -формул $\mathcal{F}$ называется выполнимой в T -алгебре $\mathcal{A}$, если существуют такие значения из $\mathcal{A}$ для всех входящих в элементы $\mathcal{F}$ свободных (предметных и функциональных) переменных, при которых формулы из $\mathcal{F}$ становятся истинными в $\mathcal{A}$. Совокупность T -формул называется выполнимой, если существует T -алгебра, в которой выполнима эта совокупность.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Совокупность T -формул Γ называется n -выполнимой, если существует T -алгебра, в которой выполнимо любое подмножество $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$ порядка $\leq n$.

Указанная семантика согласована с гомоморфизмами T -алгебр [8], [9], определяемыми как пары $(\varphi, \tilde{\psi})$ отображений с условием:

$$\varphi A(x_1, \dots, x_n) = [\tilde{\psi}(A)](\varphi x_1, \dots, \varphi x_n).$$

Существование фильтрованных и ультрапроизведений, в соответствующей категории T -алгебр $(Q; \Sigma)$ и их гомоморфизмов $(\varphi, \tilde{\psi})$ (в качестве морфизмов), приводит к следующей теореме компактности для T -формул: если выполнима (n -выполнима) каждая конечная часть бесконечной совокупности T -формул, то выполнима (n -выполнима) и вся заданная совокупность T -формул ($n = 1, 2, \dots$).

В качестве следствия получаем теорему компактности для абсолютно замкнутых T -формул (называемых T -предложениями). Поэтому, если T -предложение (в частности, T -сверхтождество) F равносильно бесконечной системе T -предложений (T -сверхтождеств) Γ , тогда существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, равносильное F .

Подобный подход к моделям и алгебраическим системам приводит к теореме компактности для формул 2-го порядка с ограниченными функциональными и предикатными кванторами (см. § 3 ниже). Ограниченность предикатных кванторов $(\forall P_i)$, $(\exists P_j)$ в моделях (алгебраических системах) здесь определяется аналогично ограниченности функциональных кванторов в алгебрах.¹

Следующие результаты также показывают естественность формул вида (0.1) и (0.2) и их моделей (т.е. алгебр с такими формулами).

Хорошо известно, что любое полугрупповое слово с помощью тождества ассоциативности приводится к левонормированной форме расстановки скобок. Если же в слове участвуют различные, например, бинарные операции из алгебры $(Q; \Sigma)$, тогда любое такое слово с помощью выполняющегося в этой алгебре $\forall \exists (\forall)$ -тождества ассоциативности

$$(0.3) \quad \forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(x, Y(y, z)) = X'(Y'(x, y), z))$$

приводится к левонормированной форме расстановки скобок, что легко доказывается индукцией по числу предметных переменных. При этом исходное слово может содержать только одну неассоциативную (например, квазигрупповую) операцию.

Аналогично, исходя из следующего $\forall \exists (\forall)$ -тождества ассоциативности

$$(0.4) \quad \forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(Y(x, y), z) = X'(x, Y'(y, z))),$$

любое слово с бинарными операциями можно привести к правонормированной форме расстановки скобок. В частности, вместо $\forall \exists (\forall)$ -тождеств ассоциативности (0.3), (0.4) здесь можно взять и $\forall (\forall)$ -тождества ассоциативности, т.е. сверхтождества ассоциативности. Возникает естественная задача – описание класса алгебр с формулами 2-го порядка (0.3), (0.4) (см. [10], [11]) или со сверхтождествами ассоциативности. О важности такой постановки задачи, например, в теории кордирований см. [12], [13]. Как

¹Традиционная семантика формул 2-го порядка, определяемая на множествах (см., например, [2]), является частным случаем введенной семантики, если вместе с множеством рассматривать всевозможные операции и предикаты, определенные на нем.

следствие изучения таких формул, возникает естественная характеристика бесконечных неассоциативных луп [11]: неассоциативная лупа $Q(\circ)$ будет бесконечной тогда и только тогда, когда функциональное уравнение $x \circ (y \circ z) = A[B(x, y), z]$ имеет решение в множестве Q .

Каждая группа (полугруппа) вкладывается в симметрическую группу (полугруппу), тождества которой равносильны сверхтождествам; каждая алгебра вкладывается в алгебру функций, тождества которой равносильны сверхтождествам или $\forall \exists (\forall)$ -тождествам (А. Кэли, П. Кон).²

Многообразия алгебр характеризуются (обычными) тождествами, однако многообразия многообразий (определяемые как абстрактные классы многообразий алгебр, замкнутых по подмногообразиям, по произведениям многообразий и по редуктам многообразий) уже характеризуются сверхтождествами [14] (см. также [9], где имеется характеристизация и квазимногообразий многообразий).

Многообразия многообразий как класс многообразий алгебр, удовлетворяющий условиям биркгофского типа, возникли в связи с мальцевскими классами многообразий [15].

Отметим ряд результатов статьи.

В §1 полугруппы, группы и мультипликативные группы полей представляются (характеризуются) как полугруппы и группы бинарных функций со сверхтождествами. Здесь применяется метод дважды транзитивных групп (ср. [18]).

В §2 доказывается теорема о представимости пар групп (G, H) , где $H \leq G$ в качестве пар групп автоморфизмов $(\varphi, \tilde{\psi})$ и $(\varphi, \tilde{\varepsilon})$ (где $\tilde{\varepsilon}$ – тождественное отображение) одной и той же алгебры (ср. [19], [20]).

В §2 доказываются также характеристики подпрямо неразложимых алгебр рассматриваемых сверхмногообразий и с их помощью характеризуются сверхтождества некоторых классических многообразий (ср. [21], [22]).

Параграф 4 посвящен нетривиальным сверхтождествам ассоциативности и дистрибутивности в обратимых и близких к ним алгебрах. В частности, характеризуются обратимые алгебры с нетривиальным сверхтождеством левой (правой) дистрибутивности при наличии тривиального сверхтождества правой (левой) дистрибутивности. Важную роль здесь играет классическая теорема Муфанг [23].

Выражаю признательность профессору Г. М. Бергману из Калифорнийского университета (Беркли), предложившему ряд сокращений в доказательствах некоторых результатов статьи.

§ 1. Понятие сверхтождества. Сверхтождества бинарных представлений

1.1. Понятие сверхтождества, примеры

Сверхтождество

$$(1.0) \quad \forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (W_1 = W_2)$$

²Примечательно также, что более ста лет назад в трудах известного немецкого математика Эрнста Шрёдера [16], [17] тождества рассмотрены как “уравнения”, при этом “неизвестными” в них считались операции.

для краткости записывается без кванторной приставки: $W_1 = W_2$. Число m называется функциональным рангом, а число n – предметным рангом сверхтождества (1.0). Пусть $T \subseteq \mathbb{N}$, $T \neq \emptyset$. Сверхтождество (1.0) называется T -сверхтождеством, если $\{|X_1|, \dots, |X_m|\} \subseteq T$. T -алгебра – это алгебра с арифметическим типом T (см. введение).

Будем говорить, что в T -алгебре $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ выполняется T -сверхтождество (1.0), если равенство $W_1 = W_2$ справедливо, когда в нем каждая предметная переменная и каждая функциональная переменная заменяются соответственно любым элементом из Q и любой операцией соответствующей арности из Σ .

T -алгебра $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ называется функционально тривиальной, если она по каждой арности $n \in T$ содержит лишь одну n -арную операцию $A \in \Sigma$. В противном случае T -алгебра называется функционально нетривиальной. Функционально нетривиальные алгебры кратко будем называть нетривиальными алгебрами. В функционально тривиальных алгебрах понятия сверхтождества и тождества неразличимы.

T -сверхтождество можно трактовать и как пару элементов алгебры слов (термов) с арифметическим типом T . Идея алгебры слов приводит к такой T -алгебре, множество n -арных операций которой ($n \in T$) имеет сколь угодно большую мощность. Сперва определим арифметический тип для абстрактных множеств. Если U – произвольное множество и $\Theta: U \rightarrow \mathbb{N}$ – некоторое отображение этого множества в множество всех натуральных чисел, то образ $\Theta(U) \subseteq \mathbb{N}$ будем называть арифметическим типом U . При этом, если $\omega \in U$ и $\Theta(\omega) = n$, то ω называется n -арным, а n называется арностью элемента ω (обозначение: $n = |\omega|$). Множество с арифметическим типом $T \subseteq \mathbb{N}$ называется T -множеством. Далее стандартным путем определяется понятие алгебры слов с арифметическим типом T .

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное непустое множество, а U – произвольное T -множество ($\mathcal{X} \cap U = \emptyset$). Элементы множества $\mathcal{X}$ назовем предметными переменными, а элементы множества U – функциональными переменными. Понятие T -слова (или T -терма) определяется индуктивно: во-первых, каждое предметное переменное есть T -слово, и во-вторых, если $\omega \in U$ – функциональная переменная с арностью m и $V_1, \dots, V_m$ суть T -слова, то выражение $\omega(V_1, \dots, V_m)$ также есть T -слово. Других T -слов нет. Равенство двух T -слов определяется их графическим совпадением. Обозначим через $(\mathcal{X})U$ совокупность всех T -слов. Соответствующая T -алгебра $\langle (\mathcal{X})U; U \rangle = U(\mathcal{X})$ и есть T -алгебра слов. T -алгебра слов $U(\mathcal{X})$ называется стандартной, если множество $\mathcal{X}$ счетно, а множество U для любого $n \in T$ содержит ровно счетное число n -арных операций.

Слово (терм) – это T -слово для некоторого $T \subseteq \mathbb{N}$.

Пусть $U(\mathcal{X})$ – стандартная T -алгебра слов и пусть $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Естественно выделяется n -арный слой T -алгебры $U(\mathcal{X})$, состоящий из n -арных T -слов (T -термов):

- а) каждый элемент x_i , где $i = 1, \dots, n$, является n -арным T -словом;
- б) если $W_1, \dots, W_m$ являются n -арными T -словами, то для любого m -арного функционального переменного $X \in U$, $m \in T$, выражение $X(W_1, \dots, W_m)$ также является n -арным T -словом;
- в) T -слово называется n -арным, если оно является n -арным согласно а) и б).

n -арное слово (терм) – это n -арное T -слово при некотором $T \subseteq \mathbb{N}$.

Класс алгебр называется классом T -алгебр, если каждая его алгебра есть T -алгебра. Алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ называются арифметически однотипными, если $T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{A}'}$. Таким образом, группоид и кольцо являются арифметически однотипными алгебрами.

Сверхтождество $W_1 = W_2$ будет T -сверхтождеством, если W_1, W_2 являются элементами T -алгебры слов или W_1, W_2 являются T -словами.

Систему T -сверхтождеств считаем истинной (и говорим, что система выполняется) в T -алгебре $\mathcal{A}$, если в $\mathcal{A}$ выполняется каждое сверхтождество этого семейства; T -сверхтождество $W_1 = W_2$ выполняется в классе T -алгебр, если оно выполняется в любой алгебре этого класса. В частности, можно говорить о сверхтождествах многообразий: сверхтождество $W_1 = W_2$ называется сверхтождеством многообразия V , если оно выполняется в каждой алгебре $\mathcal{A} \in V$. Сверхтождество называется нетривиальным, если его функциональный ранг > 1 , и тривиальным – в противном случае.

Если многообразия V_1 и V_2 (с одной и той же сигнатурой) удовлетворяют некоторому сверхтождеству, то их решеточное объединение $V_1 \vee V_2$ также удовлетворяет этому сверхтождеству.

Каждое тождество многообразия V будет его сверхтождеством (разумеется, надо рассматривать символы операции тождества как функциональные переменные) тогда и только тогда, когда клон многообразия V является ε -свободным в смысле [9]. В частности, каждое тождество многообразия V будет сверхтождеством полиномиальной (термальной) алгебры $P(\mathcal{A})$ любой алгебры $\mathcal{A} \in V$ тогда и только тогда, когда клон многообразия V является относительно свободным [24].

Многообразие V назовем совершенным, если каждое тождество этого многообразия является и его сверхтождеством. Класс всех совершенных многообразий (с одной и той же сигнатурой) образует подрешетку в решетке всех многообразий (с данной сигнатурой).

Пусть $\mathcal{L}$ – некоторый непустой набор тождеств с сигнатурой τ , а $M_{\mathcal{L}}^{\tau}$ – класс всех алгебр с сигнатурой τ , в которых каждое тождество из $\mathcal{L}$ выполняется как сверхтождество. $M_{\mathcal{L}}^{\tau}$ будет многообразием для любого $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Многообразие V алгебр с сигнатурой τ будет совершенным тогда и только тогда, когда существует множество $\mathcal{L}$ тождеств с сигнатурой τ такое, что

$$V = M_{\mathcal{L}}^{\tau}.$$

Каждое многообразие (или класс алгебр с одной и той же сигнатурой) V содержится в наименьшем совершенном многообразии $\widehat{V}$ (называемом совершенной оболочкой V), определяемом всеми теми тождествами V , которые выполняются в V как сверхтождества. Например (это следует из теоремы 2.3, §2), совершенная оболочка многообразия булевых алгебр определяется тождествами:

$$\begin{aligned} x + x &= x, & x \cdot x &= x, \\ x + y &= y + x, & x \cdot y &= y \cdot x, \\ x + (y + z) &= (x + y) + z, & x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z, \\ x(y + z) &= xy + xz, & x + yz &= (x + y)(x + z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x')' &= x, \\
x' + y &= (x + y)' + y, \quad x' \cdot y = (x \cdot y)' \cdot y, \\
(x + y)' + (x + y')' &= x', \quad (x \cdot y)' \cdot (x \cdot y')' = x'.
\end{aligned}$$

Структурная характеристика таких алгебр содержится в [21]. Частным случаем совершенных многообразий являются солидные многообразия [25]. Многообразие V называется солидным, если каждое тождество этого многообразия является сверхтождеством не только для V , но и для полиномиальной алгебры $P(\mathcal{A})$ любой алгебры $\mathcal{A} \in V$. Класс всех солидных многообразий (с одной и той же сигнатурой) образует подрешетку в решетке всех совершенных многообразий (с данной сигнатурой).

T -сверхтождество $W_1 = W_2$ называется следствием системы T -сверхтождеств $\mathcal{L}$, если всякий раз, когда система $\mathcal{L}$ выполняется в T -алгебре, в ней выполняется и сверхтождество $W_1 = W_2$, т.е. для любой T -алгебры $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A} \models (W_1 = W_2)$$

(запись $\mathcal{A} \models \mathcal{L}$ означает выполнимость любого сверхтождества из $\mathcal{L}$ в алгебре $\mathcal{A}$). О соответствующей теореме о полноте для сверхтождеств см. [8], [9] и [21].

Сверхтождество $w_1 = w_2$ называется сверхтождеством ассоциативности (абелевости, коммутативности, левой дистрибутивности, правой дистрибутивности, ...), если при игнорировании функциональных переменных сверхтождество $w_1 = w_2$ превращается в равенство ассоциативности (абелевости, коммутативности, левой дистрибутивности, правой дистрибутивности, ...), т.е. в равенство $((x, y), z) = (x, (y, z))$ (соответственно: $((x, y), (u, v)) = ((x, u), (y, v))$, $(x, y) = (y, x)$, $(x, (y, z)) = ((x, y), (x, z))$, $((x, y), z) = ((x, z), (y, z))$, ...).

ПРИМЕР 1.0. В любом кольце $Q(+, \cdot)$ выполняются сверхтождества

$$\begin{aligned}
&X(X(Y(x, x), Y(x, x)), Y(X(x, x), X(x, x))) \\
&= X(Y(X(x, x), X(x, x)), X(Y(x, x), Y(x, x))), \\
&X(Y(Y(x, x), X(x, x)), Y(X(x, x), Y(x, x))) \\
&= X(Y(X(x, x), Y(x, x)), Y(Y(x, x), X(x, x))).
\end{aligned}$$

Известно, что всякий группоид (в частности, и группоид слов) вкладывается в мультипликативную часть некоторого кольца. Поэтому, если в многообразии всех колец выполняется сверхтождество $W_1 = W_2$, тогда, заменяя все функциональные переменные в W_1, W_2 точкой, равенство $W_1 = W_2$ превратим в графическое равенство, поскольку в группоиде слов выполняются лишь тождества вида $W = W$.

В любом коммутативном кольце выполняется сверхтождество коммутативности

$$X(x, y) = X(y, x),$$

а в любом ассоциативном кольце – сверхтождество ассоциативности

$$X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z).$$

ПРИМЕР 1.1. В полиномиальной алгебре любой группы (полугруппы, лупы Муфанг) выполняется сверхтождество

$$X(Y(x, x), Y(x, x)) = Y(X(x, x), X(x, x)).$$

В полиномиальной алгебре любой коммутативной группы (полугруппы) выполняется сверхтождество абелевости

$$(1.1) \quad X(Y(x, y), Y(u, v)) = Y(X(x, u), X(y, v)).$$

ПРИМЕР 1.2. В любой решетке $Q(+, \cdot)$ выполняются тривиальные сверхтождества идемпотентности, коммутативности и ассоциативности:

$$\begin{aligned} X(x, x) &= x, \\ X(x, y) &= X(y, x), \\ X(x, X(y, z)) &= X(X(x, y), z). \end{aligned}$$

В нетривиальной решетке $Q(+, \cdot)$ не выполняется сверхтождество

$$X(x, Y(x, y)) = x,$$

однако в любой решетке $Q(+, \cdot)$ выполняются нетривиальные сверхтождества

$$\begin{aligned} Y(y, x) &= Y(y, X(x, Y(x, y))), \\ Y(X(x, z), y) &= Y(X(x, z), X(y, Y(y, z))). \end{aligned}$$

Сверхтождество $W_1 = W_2$ называется однородным (по А.И. Мальцеву), если в словах W_1 и W_2 участвуют одни и те же предметные переменные. Очевидно, что любое сверхтождество, выполняющееся в нетривиальной решетке, является однородным. Поэтому однородным является и любое сверхтождество любого нетривиального многообразия решеток.

ПРИМЕР 1.3. Решетка будет модулярной тогда и только тогда, когда в ней выполняется сверхтождество

$$(1.2) \quad X(Y(x, X(y, z)), Y(y, z)) = Y(X(x, Y(y, z)), X(y, z)).$$

Решетка будет дистрибутивной тогда и только тогда, когда в ней выполняются следующие нетривиальные сверхтождества левой и (или) правой дистрибутивности:

$$\begin{aligned} (d_1) \quad X(x, Y(y, z)) &= Y(X(x, y), X(x, z)), \\ (d_2) \quad X(Y(x, y), z) &= Y(X(x, z), X(y, z)). \end{aligned}$$

В полиномиальной алгебре любой дистрибутивной решетки, следовательно, и любой полурешетки выполняются сверхтождества дистрибутивности $(d_1), (d_2)$.

ПРИМЕР 1.4. В любой булевой алгебре $Q(+, \cdot, ')$ выполняется следующее нетривиальное сверхтождество:

$$X(Y(x, y)', z)' = Y(X(x', z)', X(y', z)')$$

(здесь штрих $'$ выступает в роли унарной функциональной переменной).

Множество всех бинарных операций, определенных на Q , обозначим через $\mathcal{F}_Q^2$, и на этом множестве определим следующие операции:

$$\begin{aligned} A \cdot B(x, y) &= A[x, B(x, y)], \\ A \circ B(x, y) &= A[B(x, y), y], \end{aligned}$$

где $A, B \in \mathcal{F}_Q^2$, $x, y \in Q$. Операции $(\cdot)$ и $(\circ)$ называются правым и левым умножением операций соответственно.

Множество $\mathcal{F}_Q^2$ образует моноид относительно левого и правого умножения операций. Эти две полугруппы изоморфны. Единичным элементом для полугруппы $\mathcal{F}_Q^2(\cdot)$ служит элемент $E \in \mathcal{F}_Q^2$, определенный по правилу $E(x, y) = y$, а единичным элементом полугруппы $\mathcal{F}_Q^2(\circ)$ – элемент $F \in \mathcal{F}_Q^2$, определенный по правилу $F(x, y) = x$. Изоморфизм между указанными моноидами устанавливается соответствием $A \rightarrow A^*$, где $A^*(x, y) = A(y, x)$. Действительно, оно биективно и $(A \cdot B)^* = A^* \circ B^*$, поскольку:

$$(A \cdot B)^*(x, y) = A \cdot B(y, x) = A(y, B(y, x)) = A^*(B^*(x, y), y) = A^* \circ B^*(x, y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.0. В неодноэлементной бинарной алгебре $(Q; \Sigma)$ с условием $E, F \in \Sigma$ (следовательно, и в полиномиальной алгебре любой неодноэлементной алгебры)

- 1) не выполняется тривиальное сверхтождество коммутативности;
- 2) не выполняется никакое нетривиальное сверхтождество ассоциативности.

Если в такой алгебре выполняется:

- 3) нетривиальное сверхтождество абелевости, тогда оно будет иметь функциональный ранг 2 и вид (1.1);
- 4) нетривиальное сверхтождество левой дистрибутивности, тогда оно будет иметь функциональный ранг 2 и вид (d_1) ;
- 5) нетривиальное сверхтождество правой дистрибутивности, тогда оно будет иметь функциональный ранг 2 и вид (d_2) .

Доказательство предложения 1.0 проводится путем непосредственной проверки.

Бинарная операция A , определенная на множестве Q , называется обратимой справа (слева), если для любых $a, b \in Q$ уравнение $A(a, x) = b$ (соответственно $A(y, a) = b$) имеет единственное решение в Q . Для однозначно определенных решений $x, y \in Q$ приняты обозначения: $x = A^{-1}(a, b)$, $y = {}^{-1}A(b, a)$.

Таким образом, для любых $a, b \in Q$ имеем

$$A(a, A^{-1}(a, b)) = A^{-1}(a, A(a, b)) = b,$$

если A – обратима справа, и

$$A(-^1A(b, a), a) = -^1A(A(b, a), a) = b,$$

если A – обратима слева. Операция A^{-1} (соответственно $-^1A$) называется правой (левой) обратной для обратимой справа (слева) операции A . Легко заметить, что операция A^{-1} (соответственно $-^1A$) также обратима справа (слева), причем:

$$(A^{-1})^{-1} = A = -^1(-^1A), \quad (A^{-1})^* = -^1(A^*), \quad (-^1A)^* = (A^*)^{-1}.$$

Бинарная операция $A \in \mathcal{F}_Q^2$ называется обратимой, если она обратима справа и слева. В этом случае операция A имеет правую и левую обратные и для них справедливы равенства

$$(-^1(A^{-1}))^{-1} = -^1((-^1A)^{-1}) = A^*.$$

Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется обратимой (справа, слева), если каждая операция $A \in \Sigma$ обратима (справа, слева). Обратимая алгебра с одной операцией – квазигруппа.

Каждая обратимая алгебра $(Q; \Sigma)$ порождает еще пять обратимых алгебр: $(Q; \Sigma^{-1})$, $(Q; -^1\Sigma)$, $(Q; -^1(\Sigma^{-1}))$, $(Q; (-^1\Sigma)^{-1})$ и $(Q; \Sigma^*)$, где

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} &= \{A^{-1} \mid A \in \Sigma\}, \\ -^1\Sigma &= \{-^1A \mid A \in \Sigma\}, \\ -^1(\Sigma^{-1}) &= \{-^1(A^{-1}) \mid A \in \Sigma\}, \\ (-^1\Sigma)^{-1} &= \{(-^1A)^{-1} \mid A \in \Sigma\}, \\ \Sigma^* &= \{A^* \mid A \in \Sigma\}. \end{aligned}$$

При этом множество Σ^{-1} (или $-^1\Sigma$) содержательно и для обратимой справа (слева) алгебры $(Q; \Sigma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Множество всех обратимых справа (слева) операций, определенных на Q , является группой относительно правого (левого) умножения операций. Эти две группы изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество всех обратимых справа (слева) операций, определенных на Q , обозначим через $\mathcal{F}_Q^r$ (соответственно $\mathcal{F}_Q^l$). Если $A, B \in \mathcal{F}_Q^r$, то и $A \cdot B \in \mathcal{F}_Q^r$, поскольку уравнение $A \cdot B(a, x) = A(a, B(a, x)) = b$ имеет единственное решение $x \in Q$ для любых $a, b \in Q$. Для каждой обратимой справа операции $A \in \mathcal{F}_Q^r$ имеет место равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где A^{-1} – правая обратная операция для A .

Аналогично, совокупность $\mathcal{F}_Q^l$ всех обратимых слева операций, определенных на Q , образует группу относительно левого умножения операций. Соответствие $A \rightarrow A^*$ – изоморфизм между этими группами.

Если $\Sigma \subseteq \mathcal{F}_Q^r$, то через (Σ) обозначим подгруппу группы $\mathcal{F}_Q^r(\cdot)$, порожденную подмножеством Σ . Если же $\Sigma \subseteq \mathcal{F}_Q^l$, тогда через $((\Sigma))$ обозначается подгруппа группы $\mathcal{F}_Q^l(\circ)$, порожденная Σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если в обратимой справа алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверхтождество (d_1) , тогда в алгебре $(Q; \Sigma \cup \Sigma^{-1})$ также выполняется сверхтождество (d_1) . Если в обратимой слева алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверхтождество (d_2) , тогда в алгебре $(Q; {}^{-1}\Sigma \cup \Sigma)$ также выполняется это сверхтождество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую часть предложения, аналогично доказыва-
ется и вторая часть. Для любых $A, B \in \Sigma$ и для любых $x, y, z \in Q$ рассмотрим следу-
ющее равенство:

$$A^{-1}(x, B(y, z')) = B(A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z))$$

(такой элемент $z' \in Q$ существует ввиду обратимости справа рассматриваемых опе-
раций). Пользуясь определением правой обратной операции A^{-1} , имеем:

$$\begin{aligned} B(y, y') &= A(x, B(A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z))) \\ &= B(A(x, A^{-1}(x, y)), A(x, A^{-1}(x, z))) = B(y, z), \end{aligned}$$

откуда следует, что $z = z'$. Таким образом, справедливо тождество

$$A^{-1}(x, B(y, z)) = B(A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z))$$

для любых $A, B \in \Sigma$. С помощью этого тождества теперь докажем тождество

$$A^{-1}(x, B^{-1}(y, z)) = B^{-1}(A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z)).$$

Пусть

$$A^{-1}(x, B^{-1}(y, z)) = B^{-1}(A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z')),$$

тогда

$$\begin{aligned} A^{-1}(x, z') &= B(A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, B^{-1}(y, z))) \\ &= A^{-1}(x, B(y, B^{-1}(y, z))) = A^{-1}(x, z). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $z = z'$. Остается доказать тождество

$$A(x, B^{-1}(y, z)) = B^{-1}(A(x, y), A(x, z))$$

для любых $A, B \in \Sigma$. Пусть

$$A(x, B^{-1}(y, z')) = B^{-1}(A(x, y), A(x, z)),$$

тогда

$$\begin{aligned} B^{-1}(y, z') &= A^{-1}(x, B^{-1}(A(x, y), A(x, z))) \\ &= B^{-1}(A^{-1}(x, A(x, y)), A^{-1}(x, A(x, z))) = B^{-1}(y, z) \end{aligned}$$

и, следовательно, $z = z'$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Если в обратимой справа (слева) алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверттождество (d_1) (соответственно (d_2)), тогда в расширенной алгебре $(Q; (\Sigma))$ (соответственно $(Q; ((\Sigma)))$) также выполняется это сверттождество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (первая часть). По индукции докажем справедливость тождества

$$S(x, P(y, z)) = P(S(x, y), S(x, z))$$

для любых $S, P \in (\Sigma)$. Пусть

$$(1.3) \quad \begin{aligned} S &= A_1^{\varepsilon_1} \cdots A_m^{\varepsilon_m}, & \varepsilon_i &= \pm 1, \\ P &= B_1^{\delta_1} \cdots B_k^{\delta_k}, & \delta_j &= \pm 1, \end{aligned}$$

где $A_i, B_j \in \Sigma$. Длиной $\partial(S)$ операции $S \in (\Sigma)$ назовем число операций $A_i \in \Sigma$ в каком-нибудь представлении (1.3). Когда $\partial(S) = \partial(P) = 1$, тогда $S, P \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$, и утверждение следует из предложения 1.2. Предположим справедливость утверждения в случае $\partial(S), \partial(P) \leq n - 1$.

Далее возможны три случая:

1) $\partial(S) = n, \partial(P) < n$. Тогда $S = S_1 \cdot S_2$, где $\partial(S_1), \partial(S_2) < n$, и по предположению индукции

$$\begin{aligned} S(x, P(y, z)) &= S_1 \cdot S_2(x, P(y, z)) = S_1(x, S_2(x, P(y, z))) \\ &= S_1(x, P(S_2(x, y), S_2(x, z))) = P(S_1(x, S_2(x, y)), S_1(x, S_2(x, z))) \\ &= P(S_1 \cdot S_2(x, y), S_1 \cdot S_2(x, z)) = P(S(x, y), S(x, z)). \end{aligned}$$

2) $\partial(S) < n, \partial(P) = n$. Здесь полагается $P = P_1 \cdot P_2$, где $\partial(P_1), \partial(P_2) < n$, и опять применяется индуктивное предположение.

3) $\partial(S) = \partial(P) = n$. Полагая $S = S_1 \cdot S_2$, где $\partial(S_1), \partial(S_2) < n$, рассмотрение сводим к случаю 2).

1.2. Бинарные теоремы Кэли для полугрупп, идемпотентных и коммутативных полугрупп, групп и мультипликативных групп полей

В дальнейшем, говоря о полугруппе $\mathcal{F}_Q^2$, мы имеем в виду полугруппу $\mathcal{F}_Q^2(\cdot)$. Эту полугруппу назовем полугруппой бинарных функций множества Q .

Пусть даны множество Q и некоторая полугруппа Γ , вообще говоря, не связанная с Q . Будем говорить, что задано представление полугруппы Γ бинарными функциями множества Q [18], если определено отображение

$$(*): \Gamma \times Q^2 \rightarrow Q$$

– бинарное действие Γ в Q , сопоставляющее каждому $\gamma \in \Gamma$ и каждой паре $(x, y) \in Q^2$ элемент $\gamma * (x, y) \in Q$, причем предполагается справедливость условия:

$$\gamma_1 \gamma_2 * (x, y) = \gamma_1 * (x, \gamma_2 * (x, y))$$

для любых $x, y \in Q$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

Допустим, что задано такое представление. Тогда каждому $\gamma \in \Gamma$ отвечает некоторая бинарная операция $\varphi(\gamma) \in \mathcal{F}_Q^2$:

$$\varphi(\gamma)(x, y) = \gamma * (x, y).$$

Приходим к отображению $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{F}_Q^2$ с условием:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(x, y) &= \gamma_1 \gamma_2 * (x, y) = \gamma * (x_1, \gamma_2 * (x, y)) \\ &= \varphi\gamma_1(x, \varphi\gamma_2(x, y)) = (\varphi\gamma_1 \cdot \varphi\gamma_2)(x, y), \end{aligned}$$

т.е.

$$\varphi(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \varphi\gamma_1 \cdot \varphi\gamma_2$$

и отображение φ – гомоморфизм из полугруппы Γ в полугруппу $\mathcal{F}_Q^2$. Таким образом, задавая представление Γ бинарными функциями множества Q , мы одновременно определяем гомоморфизм полугрупп

$$\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{F}_Q^2.$$

Верно и обратное, если имеется некоторый гомоморфизм

$$\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{F}_Q^2,$$

тогда, полагая для любых $x, y \in Q$ и $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma * (x, y) = (\varphi\gamma)(x, y),$$

простой проверкой убеждаемся, что здесь действительно имеем представление Γ бинарными функциями множества Q . Итак, задание представления полугруппы Γ бинарными функциями множества Q равносильно заданию некоторого гомоморфизма Γ в $\mathcal{F}_Q^2$. Такое представление полугруппы Γ назовем ее бинарным представлением в множестве Q .

Если задано бинарное представление полугруппы Γ , то элементы из Γ действуют на множестве Q как бинарные операции:

$$\alpha(x, y) = \alpha * (x, y), \quad \alpha \in \Gamma, \quad x, y \in Q.$$

Следовательно, множество Q становится бинарной Γ -алгеброй с тождеством

$$\alpha \cdot \beta(x, y) = \alpha(x, \beta(x, y)) \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma,$$

называемой бинарным Γ -полигоном.

Если эта Γ -алгебра удовлетворяет сверхтождеству

$$W_1 = W_2 \quad (\text{или формуле } \Phi),$$

то будем говорить, что исходное представление удовлетворяет этому сверхтождеству (или формуле Φ).

Если Γ – моноид с единицей e , то в определении его бинарного представления добавляется условие $\varphi(e) = E$. Бинарное представление называется обратимым справа, если соответствующий бинарный Γ -полигон Q обратим справа, т.е. для любого $\alpha \in \Gamma$ и для любых $a, b \in Q$ уравнение $\alpha(a, x) = b$ имеет единственное решение $x \in Q$. Аналогично определяется обратимость слева и обратимость бинарного представления. Нетрудно заметить, что любое бинарное представление любой группы Γ обратимо справа.

Бинарное представление полугруппы называется точным, если соответствующий гомоморфизм есть мономорфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (бинарная теорема Кэли для моноидов). *Каждый моноид Γ имеет точное бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождествам*

$$\begin{aligned} X(x, X(y, z)) &= X(X(x, y), X(x, z)), \\ X(X(x, y), X(u, v)) &= X(X(x, u), X(y, v)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = \Gamma$ и $x, y \in Q, \gamma \in \Gamma$. Положим $\gamma(x, y) = \gamma \cdot y$, где $(\cdot)$ – произведение моноида Γ . Условие

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(x, y) = \gamma_1(x, \gamma_2(x, y))$$

здесь следует из ассоциативности умножения в Γ . Кроме того, $e(x, y) = e \cdot y = y$. Наличие единицы $e \in \Gamma$ обеспечивает точность бинарного представления:

$$\gamma_1 \neq \gamma_2 \rightarrow \gamma_1(x, e) \neq \gamma_2(x, e).$$

Выполнимость указанных сверхтождеств очевидна.

Допустим теперь, что Γ есть полугруппа без единицы. Мы можем присоединить к Γ внешним образом единицу и прийти к моноиду Γ^* . Точное бинарное представление моноида Γ^* индуцирует точное бинарное представление полугруппы Γ . Возникают следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 (бинарная теорема Кэли для полугрупп). *Каждая полугруппа имеет точное бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождествам*

$$\begin{aligned} X(x, X(y, z)) &= X(X(x, y), X(x, z)), \\ X(X(x, y), X(u, v)) &= X(X(x, u), X(y, v)). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5 (бинарная теорема Кэли для идемпотентных полугрупп). *Каждая идемпотентная полугруппа имеет точное бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождествам*

$$\begin{aligned} X(x, X(y, z)) &= X(X(x, y), z), \\ X(x, X(y, z)) &= X(X(x, y), X(x, z)), \\ X(X(x, y), X(u, v)) &= X(X(x, u), X(y, v)). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 (бинарная теорема Кэли для коммутативных полугрупп). *Каждая коммутативная полугруппа имеет точное бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождествам левой дистрибутивности (d_1) и абелевости (1.1). И обратно, если полугруппа имеет такое точное бинарное представление, тогда она коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость очевидна. Достаточность:*

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta(x, y) &= \alpha(x, \beta(x, y)) = \beta(\alpha(x, x), \alpha(x, y)) \\ &= \alpha(\beta(x, x), \beta(x, y)) = \beta(x, \alpha(x, y)) = \beta \cdot \alpha(x, y).\end{aligned}$$

Бинарное представление

$$\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{F}_Q^2$$

называется транзитивным, если множество Q одноэлементно или для любых $a, b, c \in Q$, где $b \neq a \neq c$, существует такой элемент $\alpha \in \Gamma$, что $\alpha(a, b) = c$.

ТЕОРЕМА 1.1 (бинарная теорема Кэли для групп). *Моноид является группой тогда и только тогда, когда он имеет точное транзитивное и обратимое справа бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождеству левой дистрибутивности (d_1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть Γ – моноид и пусть $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{F}_Q^2$ – точное, транзитивное и обратимое справа бинарное представление Γ , удовлетворяющее сверхтождеству (d_1). Утверждение в случае $|Q| = 1$ – тривиально. Пусть $|Q| = 2$. Тогда существуют всего четыре обратимые справа бинарные операции, определенные на этом множестве Q , которые в совокупности образуют четверную группу Клейна относительно правого умножения операций. Эта группа не имеет подполугрупп, отличных от подгрупп. Поэтому, если моноид Γ вкладывается в эту группу, то и он является группой. Остается рассмотреть случай $|Q| \geq 3$.

Из условия обратимости справа следует, что отображение $\alpha_a(x) = \alpha(a, x)$ является биекцией множества Q , а из сверхтождества (d_1) следует, что α_a – автоморфизм бинарного Γ -полигона Q . Если два автоморфизма совпадают на некотором элементе $b \in Q$, то они будут совпадать и на подполигоне Γ -полигона Q , порожденном этим элементом $b \in Q$. Согласно определению транзитивности представления бинарный Γ -полигон Q порождается любыми двумя его неравными элементами, поэтому если автоморфизмы α, β совпадают на двух различных элементах из Q , тогда они будут совпадать и на любом элементе $x \in Q$.

Далее, докажем импликацию:

$$\alpha(a, b) = \beta(a, b) \rightarrow \alpha = \beta,$$

где $a, b \in Q, a \neq b, \alpha, \beta \in \Gamma$. Рассмотрим две возможности.

1) Бинарный Γ -полигон Q идемпотентен, т.е. $\alpha(x, x) = x$ для любых $\alpha \in \Gamma, x \in Q$. В этом случае $\alpha(a, a) = \beta(a, a)$ и автоморфизмы α_a и β_a совпадают на двух различных элементах $a \neq b$. Следовательно, $\alpha_a(x) = \beta_a(x)$ для любого $x \in Q$, т.е. $\alpha(a, x) = \beta(a, x)$. Однако по условию $|Q| \geq 3$, и по транзитивности для любого $y \in Q$

существуют $c \in Q$, $y \neq c \neq a$, и $\delta \in \Gamma$ со свойством $y = \delta(c, a) = \delta_c(a)$, и поскольку δ_c – автоморфизм бинарного Γ -полигона Q , то

$$\begin{aligned}\delta_c(\alpha(a, x)) &= \delta_c(\beta(a, x)), \\ \alpha(\delta_c(a), \delta_c(x)) &= \beta(\delta_c(a), \delta_c(x)), \\ \alpha(y, u) &= \beta(y, u)\end{aligned}$$

для любых $y, u \in Q$.

2) Бинарный Γ -полигон Q не является идемпотентным, т.е. существуют $\gamma \in \Gamma$ и $x \in Q$ такие, что $\gamma(x, x) \neq x$. Тогда $\gamma(y, y) \neq y$ для любого $y \in Q$.

Докажем это. Пусть $\gamma(t, t) = t$ для некоторого $t \in Q$, $t \neq x$. Опять по условию $|Q| \geq 3$ и по транзитивности существуют $c \in Q$, $x \neq c \neq t$, и $\delta \in \Gamma$ со свойством $x = \delta(c, t) = \delta_c(t)$, поэтому

$$\begin{aligned}\delta_c(\gamma(t, t)) &= \delta_c(t), \\ \gamma(\delta_c(t), \delta_c(t)) &= \delta_c(t), \\ \gamma(x, x) &= x,\end{aligned}$$

что противоречит выбору элементов $\gamma \in \Gamma$, $x \in Q$.

Следовательно, подполигон, порожденный элементом $b \in Q$, содержит по крайней мере два различных элемента $b \neq \gamma(b, b)$ (и, следовательно, совпадает с Q). Таким образом, автоморфизмы α_a и β_a будут совпадать на любом $x \in Q$, т.е. $\alpha(a, x) = \beta(a, x)$, а отсюда, как и в случае 1), выводится равенство $\alpha = \beta$.

Рассмотрим подгруппу (Γ) группы $\mathcal{F}_Q^r(\cdot)$, порожденную $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_Q^r$. Согласно следствию 1.1 в (Γ) -алгебре Q также выполняется сверхтождество (d_1) . Следовательно, существует транзитивное, точное и обратимое справа бинарное представление $\psi: (\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}_Q^2$, удовлетворяющее сверхтождеству левой дистрибутивности (d_1) и продолжающее представление φ . Для завершения доказательства достаточности покажем равенство $(\Gamma) = \Gamma$.

Пусть $\alpha \in (\Gamma)$. Существуют элементы $b \neq a \neq c$ такие, что $\alpha(a, b) = c$. В самом деле, фиксируя $a \in Q$ и выбирая элемент b со свойством $b \neq a$, $b \neq \alpha^{-1}(a, a)$ (возможность такого выбора обеспечивается условием $|Q| \geq 3$), получим $\alpha(a, b) = c \neq a$. Действительно, если бы $\alpha(a, b) = a$, тогда

$$\alpha^{-1}(a, \alpha(a, b)) = \alpha^{-1}(a, a), \quad \alpha^{-1} \cdot \alpha(a, b) = \alpha^{-1}(a, a)$$

и $b = \alpha^{-1}(a, a)$, что противоречит выбору элемента b . В силу транзитивности исходного бинарного представления φ существует такой $\beta \in \Gamma$, что $\beta(a, b) = c$. Следовательно, $\alpha(a, b) = \beta(a, b)$, где $a \neq b$, и потому $\alpha = \beta \in \Gamma$.

Необходимость. Пусть Γ – группа. Каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ сопоставим бинарную операцию, определенную на множестве $Q = \Gamma$: $\gamma(x, y) = yx^{-1}\gamma^{-1}x$. Тогда:

$$\begin{aligned}e(x, y) &= y, \\ \gamma_1 \cdot \gamma_2(x, y) &= yx^{-1}(\gamma_1\gamma_2)^{-1}x = yx^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}x \\ &= yx^{-1}\gamma_2^{-1}xx^{-1}\gamma_1^{-1}x = \gamma_2(x, yx^{-1}\gamma_2^{-1}x) = \gamma_1(x, \gamma_2(x, y)),\end{aligned}$$

т.е. имеем бинарное представление группы Γ . Это бинарное представление является точным, транзитивным и обратимым справа. Непосредственно проверяется также, что построенное бинарное представление группы Γ удовлетворяет сверхтождеству левой дистрибутивности (d_1) :

$$\begin{aligned}\gamma_2(\gamma_1(x, y), \gamma_1(x, z)) &= zx^{-1}\gamma_1^{-1}x(yx^{-1}\gamma_1^{-1}x)^{-1}\gamma_2^{-1}yx^{-1}\gamma_1^{-1}x \\ &= zx^{-1}\gamma_1^{-1}xx^{-1}\gamma_1xy^{-1}\gamma_2^{-1}yx^{-1}\gamma_1^{-1}x \\ &= zy^{-1}\gamma_2^{-1}yx^{-1}\gamma_1^{-1}x = \gamma_1(x, \gamma_2(y, z)).\end{aligned}$$

Следующий результат показывает, что на языке бинарных представлений класс мультипликативных групп полей выделяется в классе всех групп одним сверхтождеством идемпотентности (ср. с теоремой 1.1).³

ТЕОРЕМА 1.2 ([18], бинарная теорема Кэли для мультипликативных групп полей). *Моноид является мультипликативной группой некоторого поля тогда и только тогда, когда он имеет точное, транзитивное и обратимое справа бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождествам левой дистрибутивности (d_1) и идемпотентности $X(x, x) = x$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть моноид Γ имеет точное, транзитивное и обратимое справа бинарное представление $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{F}_Q^2$, удовлетворяющее сверхтождествам левой дистрибутивности (d_1) и идемпотентности. Согласно теореме 1.1 моноид Γ является группой. Из сверхтождества идемпотентности вытекает, что эта группа абелева. Действительно:

$$\alpha \cdot \beta(x, y) = \alpha(x, \beta(x, y)) = \alpha(\beta(x, x), \beta(x, y)) = \beta(x, \alpha(x, y)) = \beta \cdot \alpha(x, y).$$

При условии $|Q| \leq 2$ утверждение очевидно, так как единственная идемпотентная и обратимая справа бинарная операция, определенная на таком множестве Q , – операция $E(x, y) = y$, поэтому будем предполагать $|Q| \geq 3$. Здесь можно предположить также, что группа Γ нетривиальна.

Из транзитивности представления φ следует, что группа $\text{Aut } Q$ всех автоморфизмов бинарного Γ -полигона Q является минимальной дважды транзитивной в смысле [26], т.е. для любых двух пар (a, b) и (c, d) элементов из Q с условием $a \neq b, c \neq d$ существует единственный автоморфизм $\lambda \in \text{Aut } Q$ такой, что $\lambda a = c, \lambda b = d$. Для доказательства рассмотрим следующие возможности.

1) $c \neq b$. Тогда существует $\alpha \in \Gamma$ со свойством $\alpha(b, a) = c, \alpha(b, b) = b$, т.е. $\alpha_b(a) = c$ и $\alpha_b(b) = b$. Существует также $\beta \in \Gamma$ со свойством $\beta(c, b) = d, \beta(c, c) = c$, т.е. $\beta_c(b) = d$ и $\beta_c(c) = c$. Поэтому произведение $\lambda = \alpha_b \cdot \beta_c$ – единственный автоморфизм с требуемым свойством.

2) $d \neq a$. Рассмотрение аналогично случаю 1).

3) $c = b, d = a$. В этом случае согласно предположению $|Q| \geq 3$ выбираем элемент $s \in Q$, где $s \neq a, b$, и применяем случай 1) к парам $(a, b), (s, a)$ и $(s, a), (b, a)$. Произведение полученных двух автоморфизмов будет искомым автоморфизмом.

³ Хорошо известно, что класс мультипликативных групп полей не может быть охарактеризован (аксиоматизирован) элементарно (А. И. Мальцев, С. Р. Когаловский, G. Sabbagh).

Пусть $\alpha \in \Gamma \setminus \{e\}$ и $a, b \in Q, a \neq b$. Тогда $\alpha(a, b) \neq b$ и, следовательно, существует $f(\alpha) \in \Gamma$ со свойством $f(\alpha)(b, a) = \alpha(a, b)$. Если $x, y \in Q, x \neq y$, тогда согласно дважды транзитивности группы $\text{Aut } Q$ существует автоморфизм $\lambda \in \text{Aut } Q$ со свойством $\lambda a = x, \lambda b = y$. Поэтому

$$\begin{aligned}\lambda(f(\alpha)(b, a)) &= \lambda(\alpha(a, b)), \\ f(\alpha)(\lambda b, \lambda a) &= \alpha(\lambda a, \lambda b), \\ f(\alpha)(y, x) &= \alpha(x, y).\end{aligned}$$

Однако последнее равенство, очевидно, выполняется и при $x = y$. Кроме того, если к группе Γ внешним образом присоединим нуль 0, определяя ее бинарное действие по правилу $0(x, y) = x$, а $f(0) = e$, тогда полученное тождество будет справедливым и в случае $\alpha = 0$. Справедливо также равенство

$$f(f(\alpha) \cdot f(\beta))(x, y) = (\beta \cdot f(\alpha \cdot f(\beta^{-1}))) (x, y)$$

для любых $\alpha \in \Gamma \cup \{0\}, \beta \in \Gamma, x, y \in Q$. Действительно:

$$\begin{aligned}f(f(\alpha)f(\beta))(x, y) &= (f(\alpha) \cdot f(\beta))(y, x) \\ &= f(\alpha)(y, f(\beta)(y, x)) = f(\alpha)(y, \beta(x, y)) = \alpha(\beta(x, y), y); \\ (\beta \cdot f(\alpha \cdot f(\beta^{-1}))) (x, y) &= \beta(x, f(\alpha \cdot f(\beta^{-1}))(x, y)) \\ &= \beta(x, (\alpha \cdot f(\beta^{-1}))(y, x)) = \beta(x, \alpha(y, f(\beta^{-1})(y, x))) \\ &= \beta(x, \alpha(y, \beta^{-1}(x, y))) = \alpha(\beta(x, y), \beta(x, \beta^{-1}(x, y))) \\ &= \alpha(\beta(x, y), (\beta \cdot \beta^{-1})(x, y)) = \alpha(\beta(x, y), e(x, y)) \\ &= \alpha(\beta(x, y), y).\end{aligned}$$

После этого доказательство достаточности можно завершить с использованием следующего утверждения [27]: коммутативная группа $\Gamma(\cdot)$ с единицей $e \in \Gamma$ является мультипликативной группой некоторого поля тогда и только тогда, когда существует отображение $f: \Gamma \cup \{0\} \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ со свойствами $f(0) = e, f(f(\alpha)) = \alpha$ и

$$f(f(\alpha) \cdot f(\beta)) = \beta \cdot f(\alpha \cdot f(\beta^{-1}))$$

для любых $\alpha \in \Gamma \cup \{0\}, \beta \in \Gamma$.

Необходимость. Пусть Γ – мультипликативная группа некоторого поля $Q(+, \cdot)$, $\Gamma = Q \setminus \{0\}$. Каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ сопоставим бинарную операцию, определенную на множестве Q :

$$\gamma(x, y) = (1 - \gamma)x + \gamma y.$$

Тогда $1(x, y) = y$ и

$$\begin{aligned}\gamma_1 \cdot \gamma_2(x, y) &= (1 - \gamma_1\gamma_2)x + \gamma_1\gamma_2y = x - \gamma_1\gamma_2x + \gamma_1\gamma_2y \\ &= x - \gamma_1x + \gamma_1x - \gamma_1\gamma_2x + \gamma_1\gamma_2y = x - \gamma_1x + \gamma_1(x - \gamma_2x + \gamma_2y) \\ &= (1 - \gamma_1)x + \gamma_1((1 - \gamma_2)x + \gamma_2y) = \gamma_1(x, \gamma_2(x, y)).\end{aligned}$$

Точность, транзитивность, обратимость справа построенного бинарного представления и справедливость для него сверхтождеств (d_1) и идемпотентности также легко проверяются непосредственно.

Теорема 1.2 доказана.

Общую характеристику минимальных дважды транзитивных групп подстановок см. в [28].

1.3. Стохастические алгебры. Понятие котождества

Пусть P – линейно-упорядоченное поле. Интервал $(0, 1) \subseteq P$ – полугруппа относительно умножения поля P . Любое бинарное представление этой полугруппы $\Gamma = (0, 1)$ в множестве Q можно трактовать как бинарную Γ -алгебру Q с тождеством

$$S0. \quad \alpha \cdot \beta(x, y) = \alpha(x, \beta(x, y))$$

для любых $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Бинарное представление полугруппы $(0, 1)$ в множестве Q называется стохастической алгеброй над P (по другой терминологии – конвексором [29] или барицентрической алгеброй [30]), если оно удовлетворяет следующим равенствам:

$$S1. \quad \alpha(x, x) = x,$$

$$S2. \quad \alpha(x, y) = (1 - \alpha)(y, x),$$

$$S3. \quad \alpha(x, \beta(y, z)) = \alpha\beta\left(\frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta}(x, y), z\right)$$

для любых $x, y, z \in Q$ и $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Первая аксиома – сверхтождество идемпотентности, вторая и третья – $\forall \exists (\forall)$ -тождества коммутативности и ассоциативности.

ПРИМЕР 1.5. В любой стохастической алгебре выполняются сверхтождества левой и правой дистрибутивности (d_1) , (d_2) :

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(x, y), \alpha(x, z)) &\stackrel{S3.}{=} \beta\alpha\left(\frac{\beta(1 - \alpha)}{1 - \beta\alpha}(\alpha(x, y), x), z\right) \\ &\stackrel{S2.}{=} \beta\alpha\left(\frac{1 - \beta\alpha - \beta + \beta\alpha}{1 - \beta\alpha}(x, \alpha(x, y)), z\right) \\ &\stackrel{S0.}{=} \beta\alpha\left(\frac{(1 - \beta)\alpha}{1 - \beta\alpha}(x, y), z\right) \stackrel{S3.}{=} \alpha(x, \beta(y, z)). \end{aligned}$$

Именно с учетом этого факта получена характеристизация решеток идеалов стохастических алгебр [9] (задача Л. А. Скорнякова): решетка идеалов каждой стохастической алгебры изоморфна решетке идеалов некоторой полурешетки. Каждый идеал стохастической алгебры является пересечением простых идеалов.

В частности, решетка идеалов конечно-порожденной стохастической алгебры – конечна.

Элемент x линейно-упорядоченного поля P называется конечным, если модуль $|x| < n$ для некоторого n . Конечные элементы поля P образуют подкольцо F . Поскольку $(0, 1) \subseteq F$, то всякое выпуклое подмножество Q F -модуля естественно превращается в стохастическую алгебру, если положить $\alpha(x, y) = (1 - \alpha)x + \alpha y$, где $\alpha \in (0, 1)$, $x, y \in Q$. Такие стохастические алгебры называются аффинными. Пример не аффинной стохастической алгебры можно получить из любой полурешетки $Q(\cdot)$, если положить $\alpha(x, y) = x \cdot y$ для любого $\alpha \in (0, 1)$. Такие стохастические алгебры выделяются в классе всех стохастических алгебр сверхтождеством $X(x, y) = Y(x, y)$. Каждая обратимая (слева) стохастическая алгебра будет аффинной [31].

В заключение параграфа определим понятие котождества [8] как абсолютно-замкнутую формулу 2-го порядка с ограниченными функциональными кванторами:

$$(1.4) \quad \exists x_1, \dots, x_n \forall X_1, \dots, X_m (w_1 = w_2).$$

Котождество (1.4) называется T -котождеством, если оно – T -формула, т.е. $\{|X_1|, \dots, |X_m|\} \subseteq T$.

Будем говорить, что в T -алгебре $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ выполняется T -котождество (1.4), если существуют значения предметных переменных $x_1, \dots, x_n$ из Q такие, что равенство $w_1 = w_2$ выполняется, когда в нем каждая функциональная переменная заменяется любой операцией из Σ соответствующей ариности.

Котождество (1.4) обычно записывается без кванторной приставки, с заменой в равенстве $w_1 = w_2$ предметных переменных соответствующими фиксированными значениями из Q .

ПРИМЕР 1.6. В любой мультиоператорной Ω -группе [32] выполняется котождество

$$X(0, \dots, 0) = 0,$$

т.е. 0 – идемпотентный элемент рассматриваемой алгебры, где 0 – единичный элемент Ω -группы.

ПРИМЕР 1.7 [31]. Пусть P – поле действительных чисел, $(0, 1) \subseteq P$ и $\mathcal{A} = \langle Q; (0, 1) \rangle$ – стохастическая алгебра над P . Если в алгебре $\mathcal{A}$ выполняется соотношение $\lambda(a, c) = \lambda(b, c)$, то в ней выполняется и котождество $X(a, c) = X(b, c)$. Если в алгебре $\mathcal{A}$ выполняется соотношение $\lambda(a, b) = \mu(a, b)$, где $\lambda \neq \mu$, то в ней выполняется и котождество $X(a, b) = Y(a, b)$.

ПРИМЕР 1.8 (Дж. фон Нейман). Пусть $L(+, \cdot)$ – модулярная решетка и $a, b, c \in L$. Подрешетка в L , порожденная элементами a, b, c , будет дистрибутивной тогда и только тогда, когда в $L(+, \cdot)$ выполняется котождество дистрибутивности

$$X(a, Y(b, c)) = Y(X(a, b), X(a, c)).$$

§ 2. Категория арифметически однотипных алгебр

2.1. Гомоморфизмы и автоморфизмы арифметически однотипных алгебр

Пусть $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$ и $\mathcal{A}' = (Q'; \Sigma')$ – арифметически однотипные алгебры⁴ или $T_{\mathcal{A}} \subseteq T_{\mathcal{A}'}$; пару $(\varphi, \tilde{\psi})$ отображений $\varphi: Q \rightarrow Q'$, $\tilde{\psi}: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ назовем гомоморфизмом [8] из алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{A}'$ и обозначим $(\varphi, \tilde{\psi}): \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}'$, если отображение $\tilde{\psi}$ сохраняет ариность операций и для любой операции $A \in \Sigma$, $|A| = n$, справедливо равенство

$$\varphi A(x_1, \dots, x_n) = [\tilde{\psi}(A)](\varphi x_1, \dots, \varphi x_n)$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in Q$.

Помимо полулинейных преобразований $(\varphi, \tilde{\psi})$ линейных пространств, линейных алгебр и модулей [33], [34] введенные морфизмы охватывают концепцию слабого гомоморфизма, восходящую к Марчевскому [35] (см. также [36]–[38]), понятие полиморфизма, введенное Бурбаки [39], и др.⁵

⁴Для простоты в работе рассматриваются алгебры без нулевых операций.

⁵Слабые гомоморфизмы (автоморфизмы) изучались в работах многих авторов (К. Denecke, J. Dudek, A. W. Higgins, T. Katrinak, M. Kolibiar, J. Michalski, E. Plonka, L. Polak, D. Schweigert, A. Solecki, S. Swierczkowski, K. Urbanik, ...).

Для гомоморфизмов $(\varphi, \tilde{\psi})$ стандартным образом вводятся понятия эпиморфизма, мономорфизма, изоморфизма, автоморфизма и эндоморфизма. Гомоморфизм $(\varphi, \tilde{\psi})$ называется эпиморфизмом, если $\varphi, \tilde{\psi}$ сюръективны, и мономорфизмом, если отображения $\varphi, \tilde{\psi}$ инъективны. Изоморфизм – это одновременно эпи- и мономорфизм. Гомоморфизм (изоморфизм) $(\varphi, \tilde{\psi})$ T -алгебры в себя называется ее эндоморфизмом (автоморфизмом). Множество всех эндоморфизмов (автоморфизмов) $(\varphi, \tilde{\psi})$ одной и той же T -алгебры образует полугруппу с единицей (соответственно группу) относительно покомпонентного умножения пар: $(\varphi_1, \tilde{\psi}_1) \cdot (\varphi_2, \tilde{\psi}_2) = (\varphi_1\varphi_2, \tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2)$.

В качестве примера отметим законы де Моргана в булевых алгебрах, определяющие автоморфизм $(\varphi, \tilde{\psi})$ булевой алгебры, где φ – взятие дополнения, а отображение $\tilde{\psi}$ отлично от тождественного.

Группа всех автоморфизмов $(\varphi, \tilde{\psi})$ одной и той же T -алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через $\text{Aut } \mathcal{A}$.

Автоморфизмы вида $(\varphi, \tilde{\varepsilon})$, где $\tilde{\varepsilon}$ – тождественное отображение, называются главными или обычными автоморфизмами, их совокупность – группа, обозначаемая $\text{Aut}^{(\circ)} \mathcal{A}$ и, очевидно, являющаяся инвариантной подгруппой в группе $\text{Aut } \mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть G – произвольная группа с произвольной инвариантной подгруппой H . Существует алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $G \simeq \text{Aut } \mathcal{A}$ и $H \simeq \text{Aut}^{(\circ)} \mathcal{A}$, причем последний изоморфизм индуцируется первым изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [20], а также [19]).⁶ Пусть

$$Q = (G \times \{0, 1\}) \cup \{a, b, c, d\},$$

где $(G \times \{0, 1\}) \cap \{a, b, c, d\} = \emptyset$. Пусть $G \times \{0\}$ – вполне-упорядоченное множество относительно порядка “ $\leq$ ”. По каждому элементу $g \in G$ определим унарную операцию g^* на Q следующим образом:

$$\begin{aligned} g^*(h, 0) &= (g, 0), \quad \text{если } (g, 0) \leq (h, 0), \quad g \neq h, \\ g^*(h, 0) &= b, \quad \text{если } (g, 0) \geq (h, 0), \\ g^*(h, 1) &= (hg, 1) \quad \text{для любого } h \in G, \\ g^*(a) &= (g, 0), \quad g^*(b) = b, \quad g^*(c) = c, \quad g^*(d) = d. \end{aligned}$$

Аналогично, по каждому $S \in G/H$ определяется унарная операция S^* на Q по правилу:

$$\begin{aligned} S^*(h, 0) &= (h, 0) \quad \text{для любого } h \in G, \\ S^*(h, 1) &= c, \quad \text{если } h \in S, \\ S^*(h, 1) &= d, \quad \text{если } h \notin S, \\ S^*(a) &= S^*(b) = b, \quad S^*(c) = S^*(d) = d. \end{aligned}$$

Очевидно, $g_1^* = g_2^* \Leftrightarrow g_1 = g_2$ и $S_1^* = S_2^* \Leftrightarrow S_1 = S_2$. В результате получаем унарную алгебру $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$, где $\Sigma = \{g^* \mid g \in G\} \cup \{S^* \mid S \in G/H\}$.

⁶Предполагается аксиома выбора.

Для любого $k \in G$ определяя отображение $\varphi_k: Q \rightarrow Q$ по правилу:

$$\begin{aligned}\varphi_k(h, 1) &= (kh, 1) \quad \text{для любого } h \in G, \\ \varphi_k(z) &= z \quad \text{для любого } z \in (G \times \{0\}) \cup \{a, b, c, d\},\end{aligned}$$

замечаем, что выполнены равенства:

$$\begin{aligned}\varphi_k g^*(x) &= g^*(\varphi_k x), \\ \varphi_k S^*(x) &= (kS)^*(\varphi_k x)\end{aligned}$$

для любых $k, g \in G$, $S \in G/H$, т.е. $(\varphi_k, \tilde{\psi}_k) \in \text{Aut } \mathcal{A}$, где $\tilde{\psi}_k(g^*) = g^*$ и $\tilde{\psi}_k(S^*) = (kS)^*$. При этом

$$(\varphi_k, \tilde{\psi}_k) \in \text{Aut}^{(\circ)} \mathcal{A} \Leftrightarrow \tilde{\psi}_k = \tilde{\varepsilon} \Leftrightarrow (kS)^* = S^* \Leftrightarrow kS = S \Leftrightarrow k \in H \trianglelefteq G.$$

Соответствие $k \rightarrow (\varphi_k, \tilde{\psi}_k)$ является мономорфизмом групп $G \rightarrow \text{Aut } \mathcal{A}$. Остается доказать, что алгебра $\mathcal{A}$ не имеет других автоморфизмов $(\varphi, \tilde{\psi})$ кроме автоморфизмов вида $(\varphi, \tilde{\psi}_k)$, $k \in G$. Пусть $(\varphi, \tilde{\psi}) \in \text{Aut } \mathcal{A}$.

Множество Q представим как дизъюнктивную сумму двух подмножеств: $Q_0 = (G \times \{0\}) \cup \{a, b\}$, $Q_1 = (G \times \{1\}) \cup \{c, d\}$, каждое из которых содержит по одному одноэлементному подмножеству, замкнутому относительно всех операций из Σ . Для подмножества Q_0 это $\{b\}$, а для Q_1 — это $\{d\}$. Поскольку элемент a — единственный элемент Q , не являющийся значением какой-либо операции из Σ , то $\varphi a = a$. Действительно, если $\varphi a = y \neq a$, то существуют $A \in \Sigma$, $x \in Q$ такие, что $(\tilde{\psi}A)(\varphi x) = y$, поэтому

$$\varphi A(x) = (\tilde{\psi}A)(\varphi x) = y,$$

где $A(x) \neq a$, что противоречит инъективности φ .

Для любого $g \in G$ существует операция $X \in \Sigma$ такая, что

$$\begin{aligned}\varphi g^*(x) &= X(\varphi x), \\ X(x) &= \varphi(g^*(\varphi^{-1}x))\end{aligned}$$

для любого $x \in Q$. Поэтому

$$\varphi(g, 0) = \varphi(g^*(a)) = \varphi(g^*(\varphi^{-1}a)) = X(a).$$

Если $X = S^*$ для некоторого $S \in G/H$, то $X(a) = b$ и $\varphi(g, 0) = b$, т.е. $\varphi^{-1}b = (g, 0)$, что невозможно, поскольку $\{b\}$ замкнуто относительно всех операций из Σ , однако $\{(g, 0)\}$ не является таковым. Следовательно, $X = h^*$ для некоторого $h \in G$ и $X(a) = h^*(a) = (h, 0)$, т.е. $\varphi(g, 0) = (h, 0)$. Аналогично доказывается, что для любого элемента $(g, 0) \in G \times \{0\}$ существует элемент $(h, 0) \in G \times \{0\}$ такой, что $\varphi(h, 0) = (g, 0)$. Итак, $\varphi(G \times \{0\}) = G \times \{0\}$.

Согласно определению операций из Σ имеем $(g, 0) \leq (h, 0)$ тогда и только тогда, когда существует операция $X \in \Sigma$ такая, что $X(h, 0) = (g, 0)$. Если $X \in \Sigma$, то и операция $X'(x) = \varphi(X(\varphi^{-1}(x)))$ содержится в Σ , поэтому

$$\begin{aligned}(g, 0) &= X(h, 0) = \varphi^{-1}(X'(\varphi(x, 0))), \\ \varphi(g, 0) &= X'(\varphi(h, 0)),\end{aligned}$$

т.е. $\varphi(g, 0) \leq \varphi(h, 0)$, и отображение φ сохраняет порядок " $\leq$ ".

Далее, методом трансфинитной индукции доказывается равенство $\varphi(g, 0) = (g, 0)$ для любого $(g, 0) \in G \times \{0\}$. Действительно, для наименьшего элемента это очевидно. Пусть для всех элементов $(x, 0) \in G \times \{0\}$, строго меньших $(a, 0) \in G \times \{0\}$, справедливо равенство $\varphi(x, 0) = (x, 0)$. Докажем равенство $\varphi(a, 0) = (a, 0)$. Возможны три случая. Если $\varphi(a, 0) < (a, 0)$, тогда по индуктивному предположению $\varphi(a, 0) = \varphi^2(a, 0) < \varphi(a, 0)$. Если же $(a, 0) < \varphi(a, 0)$, тогда, рассматривая элемент $(h, 0) \in G \times \{0\}$ со свойством $\varphi(h, 0) = (a, 0) < \varphi(a, 0)$, получим $(h, 0) < (a, 0)$. С другой стороны, по индуктивному предположению $(h, 0) = \varphi(h, 0) = (a, 0)$. Полученные противоречия доказывают равенство $\varphi(a, 0) = (a, 0)$.

Теперь докажем равенство

$$\varphi g^*(x) = g^*(\varphi x)$$

для любых $g \in G, x \in Q$. Для любого $g \in G$ существует операция $f \in \Sigma$ такая, что

$$\begin{aligned}\varphi f(x) &= g^*(\varphi x), \\ f(x) &= \varphi^{-1}(g^*(\varphi x)),\end{aligned}$$

где $f = S^*$ или $f = h^*$ для подходящих $S^*, h^* \in \Sigma$. Если $f = S^*$, тогда $\varphi(g, 0) = (g, 0) = g^*(a)$, и приходим к противоречию:

$$(g, 0) = \varphi^{-1}(g^*(a)) = \varphi^{-1}(g^*(\varphi a)) = S^*(a) = b.$$

Если же $f = h^*, h \in G$, тогда

$$(g, 0) = \varphi^{-1}(g^*(\varphi a)) = h^*(a) = (h, 0)$$

и $h = g$, т.е. $f = g^*$.

Поскольку $\varphi Q_0 \ni \varphi a = a$ и Q_0 замкнуто относительно всех операций из Σ , то и φQ_0 обладает этим свойством, поэтому ввиду определения g^* имеем $\varphi Q_0 \supseteq Q_0$. Однако с учетом равенств $\varphi(g, 0) = (g, 0)$, $\varphi a = a$ получим $\varphi b = b$, $\varphi Q_0 = Q_0$. Поэтому $\varphi Q_1 = Q_1$ и $\varphi(d) = d$.

Определим φc . Поскольку $\varphi Q_1 = Q_1$ и $\varphi c \neq \varphi d = d$, то $\varphi c = c$ или $\varphi c = (g, 1)$ для подходящего $g \in G$. Однако второй случай исключается. Действительно, во втором случае, выбирая $S \in G/H$ со свойством $g \in S$, получим:

$$\varphi^{-1}(c) = \varphi^{-1}(H^*(g, 1)) = \varphi^{-1}(H^*(\varphi c)) = A(c),$$

где $A \in \Sigma$. Таким образом, $\varphi^{-1}(c) \in \{c, d\}$, что является противоречием. Итак $\varphi c = c$. Следовательно, $\varphi(G \times \{1\}) = G \times \{1\}$.

Наконец, пусть e – единица группы G . Обозначая $\varphi(e, 1) = (k, 1)$, где $k \in G$, получим:

$$\varphi(h, 1) = \varphi h^*(e, 1) = h^* \varphi(e, 1) = h^*(k, 1) = (kh, 1) = \varphi_k(h, 1)$$

для любого $h \in G$, т.е. $\varphi = \varphi_k$. А если $\varphi = \varphi_k$, то $(\varphi, \tilde{\psi}) = (\varphi_k, \tilde{\psi}_k)$, поскольку в автоморфизме $(\varphi, \tilde{\psi})$ отображение $\tilde{\psi}$ определяется единственным образом по φ .

Теорема 2.1 доказана.

Арифметически однотипные T -алгебры и их гомоморфизмы $(\varphi, \tilde{\psi})$ в качестве морфизмов, образуют категорию, называемую категорией T -алгебр, в которой морфизмы между алгебрами меняют не только элементы, но и операции. Следующее утверждение показывает, что T -алгебра слов $U(\mathcal{X})$ – свободный объект этой категории.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $U(\mathcal{X}) = \langle (\mathcal{X})U; U \rangle$ есть T -алгебра слов и $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$ – любая T -алгебра. Если $\tilde{\psi}: U \rightarrow \Sigma$ – произвольное отображение, сохраняющее аридность операций, то каждое отображение $\varphi_0: \mathcal{X} \rightarrow Q$ можно продолжить до отображения $\varphi: (\mathcal{X})U \rightarrow Q$ так, что пара $(\varphi, \tilde{\psi})$ есть гомоморфизм из T -алгебры слов $U(\mathcal{X})$ в T -алгебру $\mathcal{A}$ (причем отображение φ определяется единственным образом по $\tilde{\psi}$ и φ_0).

Действительно, во-первых, определим $\varphi|_{\mathcal{X}} = \varphi_0$, и, во-вторых, если ω – функциональная переменная с аридностью m и образы слов $v_1, \dots, v_m$ при отображении φ уже определены, то образом слова $\omega(v_1, \dots, v_m)$ считаем элемент $\tilde{\psi}(\omega)(\varphi v_1, \dots, \varphi v_m) \in Q$.

Следовательно, в T -алгебре $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется T -сверхтождество $w_1 = w_2$ тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме $(\varphi, \tilde{\psi}): U(\mathcal{X}) \Rightarrow \mathcal{A}$ из T -алгебры слов $U(\mathcal{X})$ в T -алгебру $\mathcal{A}$, справедливо равенство $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$.

Пусть $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$ и $\mathcal{A}' = \langle Q'; \Sigma' \rangle$ две T -алгебры. Обозначим через $\text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ множество всех гомоморфизмов $(\varphi, \tilde{\psi})$ из $\mathcal{A}'$ в $\mathcal{A}$. Отображение $\tilde{\psi}: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ назовем допустимым, если существует отображение $\varphi: Q' \rightarrow Q$ такое, что $(\varphi, \tilde{\psi}) \in \text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$. Для допустимого отображения $\tilde{\psi}$ множество $\text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ называется $\tilde{\psi}$ -суммируемым, если для любого $A \in \Sigma$, $|A| = n$, и для любых гомоморфизмов $(\varphi_1, \tilde{\psi}), \dots, (\varphi_n, \tilde{\psi}) \in \text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ пара $(\lambda_A, \tilde{\psi})$ содержится в $\text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$, где $\lambda_A: Q' \rightarrow Q$ определяется по правилу:

$$\lambda_A(x) = A(\varphi_1 x, \dots, \varphi_n x), \quad x \in Q'.$$

Непустое множество гомоморфизмов $\text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ называется суммируемым, если оно $\tilde{\psi}$ -суммируемо для любого допустимого $\tilde{\psi}$. Наконец, T -алгебра $\mathcal{A}$ называется абелевой, если $\text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ суммируемо для любой T -алгебры $\mathcal{A}'$, как только $\text{Hom}(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Следующее утверждение вытекает из предложения 2.1:

T -алгебра $\mathcal{A}$ будет абелевой тогда и только тогда, когда в ней выполняется сверхтождество абелевости (точнее (n, m) -абелевости)

$$\begin{aligned} X(Y(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, Y(x_{m1}, \dots, x_{mn})) \\ = Y(X(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, X(x_{1n}, \dots, x_{mn})) \end{aligned}$$

для любых $m, n \in T$.

ПРИМЕР 2.1. Любая аффинная стохастическая алгебра – абелева, так как в ней выполняется сверхтождество (2,2)-абелевости (1.1), что устанавливается непосредственной проверкой. Поскольку в свободной стохастической алгебре [29] справедливо квазитожество

$$\alpha(y, x) = \alpha(z, x) \rightarrow y = z,$$

то свободная стохастическая алгебра будет аффинной [31] и, следовательно, она также является абелевой алгеброй. Поэтому абелевой является и любая стохастическая алгебра.

2.2. Сверхмногообразие алгебр

Пусть $\mathcal{L}$ – некоторый (непустой) набор T -сверхтождеств, а $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^T$ – класс всех T -алгебр, в которых выполняется каждое сверхтождество из $\mathcal{L}$.

Класс T -алгебр $\mathcal{N}$ называется сверхмногообразием (T -алгебр), если существует система T -сверхтождеств $\mathcal{L}$ со свойством

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^T.$$

При этом $\mathcal{L}$ называется определяющей системой сверхтождеств для $\mathcal{N}$.

Например, многообразие полугрупп является сверхмногообразием T -алгебр, где $T = \{2\}$, а $\mathcal{L}$ – множество из двух сверхтождеств:

$$\begin{aligned} X(x, X(y, z)) &= X(X(x, y), z), \\ X(x, y) &= Y(x, y). \end{aligned}$$

Класс всех абелевых T -алгебр является сверхмногообразием T -алгебр, определяемым системой сверхтождеств $(n \times m)$ -абелевости для $n, m \in T$.

Системы T -сверхтождеств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ называются эквивалентными, если

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}^T = \mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}^T.$$

По определению система T -сверхтождеств $\mathcal{L}$ имеет конечный базис (или конечно-базисуема), если она эквивалентна конечной системе T -сверхтождеств $\mathcal{L}_0$. Каждому классу T -алгебр $\mathcal{M}$ соответствует класс $\Pi_{\mathcal{M}}^T$ всех таких T -сверхтождеств, каждое из которых выполняется во всех алгебрах из $\mathcal{M}$. Говорят, что класс T -алгебр $\mathcal{M}$ имеет конечный базис сверхтождеств, если $\Pi_{\mathcal{M}}^T$ конечно-базисуема. Пара отображений

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^T$$

и

$$\mathcal{M} \rightarrow \Pi_{\mathcal{M}}^T$$

образует соответствие Галуа.

Пересечение сверхмногообразий T -алгебр есть сверхмногообразие T -алгебр, а именно:

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_{\mathcal{L}_i}^T = \mathcal{M}_{\bigcup_{i \in I} \mathcal{L}_i}^T,$$

поэтому для любого класса T -алгебр $\mathcal{M}$ существует наименьшее (относительно теоретико-множественного включения) сверхмногообразие T -алгебр $\mathcal{M}^* \supset \mathcal{M}$, называемое сверхмногообразием алгебр, порожденным $\mathcal{M}$. Понятно, что $\mathcal{M}^*$ определяется системой T -сверхтождеств $L_{\mathcal{M}}^T$, поэтому характеристика сверхмногообразия $\mathcal{M}^*$ равносильна характеристике всех сверхтождеств класса T -алгебр $\mathcal{M}$.

В дальнейшем понятия подалгебры, прямого и подпрямого произведения и др. рассматриваются в смысле категории T -алгебр и их гомоморфизмов $(\varphi, \tilde{\psi})$ (см. [8], [9] и [21]).

ТЕОРЕМА 2.2. *Если T -алгебра $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$, где $T = \{2\}$, удовлетворяет сверхтождествам*

$$(2.1) \quad X(x, x) = x,$$

$$(2.2) \quad X(x, y) = X(y, x),$$

$$(2.3) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z),$$

$$(2.4) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z))$$

и подпрямо неразложима, тогда мощность $|\Sigma| \leq 2$, а $|Q| \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО [21]. В случае $|\Sigma| \geq 3$ T -алгебра $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$ оказывается подпрямо разложимой. Действительно, пусть A_1, A_2, A_3 — попарно различные бинарные операции из Σ , и пусть

$$F_{i,j}(x, y) = A_i(x, A_j(x, y)).$$

Определим отношения $\Theta_{i,j}$ на множестве Q следующим образом:

$$x \Theta_{i,j} y \iff f_{i,j}(x, y) = x, \quad f_{i,j}(y, x) = y,$$

где $i, j = 1, 2, 3$ и $i < j$. Рефлексивность и симметричность отношения $\Theta_{i,j}$ очевидны, а транзитивность вытекает из сверхтождества

$$(2.5) \quad X(x, Y(x, X(y, Y(y, z)))) = X(x, Y(x, X(z, Y(z, y))))),$$

которое является следствием сверхтождеств (2.1)–(2.4). Покажем это. Во-первых, очевидно, что сверхтождество правой дистрибутивности

$$(2.6) \quad X(Y(y, z), x) = Y(X(y, x), X(z, x))$$

является следствием сверхтождеств (2.1)–(2.4). Далее, имеем:

$$\begin{aligned} X(x, Y(y, z)) &\stackrel{(2.4)}{=} Y(X(x, y), X(x, z)) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} X(Y(x, X(x, z)), Y(y, X(x, z))) \\ &\stackrel{(2.4)}{=} X(X(Y(x, x), Y(x, z)), X(Y(y, x), Y(y, z))) \\ &= X(X(x, Y(x, z)), X(Y(y, x), Y(y, z))), \end{aligned}$$

т.е.

$$(2.7) \quad X(x, Y(y, z)) = X(X(x, Y(x, z)), X(Y(y, x), Y(y, z))).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} X(x, X(Y(x, y), Y(y, z))) &\stackrel{(2.2)}{=} X(x, X(Y(y, z), Y(x, y))) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} X(X(x, Y(y, z)), Y(x, y)) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} X(X(X(x, Y(x, z)), X(Y(y, x), Y(y, z))), Y(x, y)) \\ &\stackrel{(2.1)-(2.3)}{=} X(X(x, Y(x, z)), X(Y(y, x), Y(y, z))) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} X(x, Y(y, z)), \end{aligned}$$

т.е.

$$(2.8) \quad X(x, Y(y, z)) = X(x, X(Y(x, y), Y(y, z))),$$

откуда при замене y на $Y(x, y)$ получим сверхтождество

$$(2.9) \quad X(x, X(Y(x, y), Y(Y(x, y), z))) = X(x, Y(Y(x, y), z)).$$

Далее, заменяя здесь y на z и z на y и применяя сверхтождества (2.2), (2.3), получим сверхтождество:

$$(2.10) \quad X(x, X(Y(x, z), Y(Y(x, y), z))) = X(x, Y(Y(x, y), z)).$$

Сравнивая сверхтождества (2.9), (2.10), приходим к сверхтождеству

$$X(x, X(Y(x, y), Y(Y(x, y), z))) = X(x, X(Y(x, z), Y(Y(x, y), z))),$$

откуда, с использованием сверхтождества (2.4), получим сверхтождество (2.5).

Докажем, что $\Theta_{i,j} = (\Theta_{i,j}, \tilde{O})$ является конгруэнцией алгебры $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$, т.е. если $x \Theta_{i,j} y$ и $u \Theta_{i,j} v$, то $A(x, u) \Theta_{i,j} A(y, v)$ для любой операции $A \in \Sigma$. Достаточно показать, что $A(x, u) \Theta_{i,j} A(y, u)$, где $x \Theta_{i,j} y$ и $x, y, u \in Q$. Воспользуемся сверхтождеством

$$(2.11) \quad X(Y(X(x, y), z), Y(y, z)) = Y(X(x, y), z),$$

также являющимся следствием сверхтождеств (2.1)–(2.4):

$$\begin{aligned} X(Y(X(x, y), z), Y(y, z)) &\stackrel{(2.6)}{=} X(X(Y(x, z), Y(y, z)), Y(y, z)) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} X(Y(x, z), X(Y(y, z), Y(y, z))) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} X(Y(x, z), Y(y, z)) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} Y(X(x, y), z). \end{aligned}$$

Пусть $x \Theta_{i,j} y$, т.е. $A_i(x, A_j(x, y)) = x$ и $A_i(y, A_j(y, x)) = y$, где $A_i, A_j \in \Sigma$. Тогда для любой операции $A \in \Sigma$ имеем:

$$\begin{aligned} A(x, u) &= A(A_i(x, A_j(x, y)), u) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} A_i(A(A_i(x, A_j(x, y)), u), A(A_j(x, y), u)) \\ &\stackrel{(2.4)}{=} A_i(A(x, u), A_j(A(x, u), A(y, u))). \end{aligned}$$

Аналогично получаем равенство:

$$A(y, u) = A_i(A(y, u), A_j(A(y, u), A(x, u))).$$

Рассмотрим фактор-алгебру $\mathcal{A}/\Theta_{i,j}$ по конгруэнции $\Theta_{i,j}$. Отображения

$$\begin{aligned} \varphi_0: x &\rightarrow ([x]_{1,2}, [x]_{1,3}, [x]_{2,3}), \\ \tilde{\psi}_0: A &\rightarrow ([A]_{1,2}, [A]_{1,3}, [A]_{2,3}), \end{aligned}$$

где $[\alpha]_{i,j}$ – класс эквивалентности элемента α по $\Theta_{i,j}$, определяют мономорфизм алгебры $\mathcal{A}$ в прямое произведение $\mathcal{A}/\Theta_{1,2} \times \mathcal{A}/\Theta_{1,3} \times \mathcal{A}/\Theta_{2,3}$. Гомоморфность этой пары очевидна, а инъективность отображения φ_0 , а следовательно, и отображения $\tilde{\psi}_0$, вытекает из следующей импликации: если

$$f_{1,2}(x, y) = f_{1,3}(x, y) = f_{2,3}(x, y) = x,$$

то

$$x = A_1(A_2(x, y), A_3(x, y)).$$

Последняя импликация вытекает из следующего сверхтождества (при $X = A_1$, $Y = A_2$, $Z = A_3$):

$$X(Y(x, y), Z(x, y)) = X(X(Y(x, Z(x, y))), Y(x, y)), Z(x, y)),$$

которое выполняется в алгебре $\mathcal{A}$, поскольку оно также является следствием сверхтождеств (2.1)–(2.4). Действительно, достаточно сверхтождество (2.8) записать в виде

$$X(Y(x, y), z) = X(X(Y(x, z), Y(x, y)), z)$$

и вместо z положить $Z(x, y)$.

В результате алгебра $\mathcal{A}$ оказывается изоморфной подпрямому произведению $(\varphi_0 Q; \tilde{\psi}_0 \Sigma)$ алгебр $\mathcal{A}/\Theta_{1,2}$, $\mathcal{A}/\Theta_{1,3}$, $\mathcal{A}/\Theta_{2,3}$, проекции которого не являются изоморфизмами. Покажем, например, что первая проекция подпрямого произведения $(\varphi_0 Q; \tilde{\psi}_0 \Sigma)$ не является изоморфизмом. Поскольку $A_1 \neq A_2$, то существуют $x, y \in Q$ такие, что $A_1(x, y) \neq A_2(x, y)$, где $x \neq y$. Однако $[A_1(x, y)]_{1,2} = [A_2(x, y)]_{1,2}$, ибо

$$\begin{aligned} f_{1,2}(A_1(x, y), A_2(x, y)) &= A_1(x, y), \\ f_{1,2}(A_2(x, y), A_1(x, y)) &= A_2(x, y). \end{aligned}$$

Для доказательства последних равенств воспользуемся сверхтождеством

$$(2.12) \quad X(X(x, y), Y(X(x, y), Y(x, y))) = X(x, y),$$

являющимся следствием сверхтождества (2.8). Действительно, при $y = z$ из сверхтождества (2.8) вытекает сверхтождество

$$(2.13) \quad X(x, y) = X(X(x, y), Y(x, y)).$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= X(X(x, y), Y(x, y)) \\ &\stackrel{(2.13)}{=} X(X(X(x, y), Y(x, y)), Y(X(x, y), Y(x, y))) \\ &\stackrel{(2.13)}{=} X(X(x, y), Y(X(x, y), Y(x, y))), \end{aligned}$$

т.е. получаем сверхтождество (2.12). Далее:

$$f_{1,2}(A_1(x, y), A_2(x, y)) = A_1(A_1(x, y), A_2(A_1(x, y), A_2(x, y))) \stackrel{(2.12)}{=} A_1(x, y).$$

Аналогично, с использованием сверхтождества

$$Y(x, y) \stackrel{(2.1)}{=} X(Y(x, y), Y(x, y)) \stackrel{(2.13)}{=} X(Y(x, y), Y(Y(x, y), X(x, y))),$$

доказывается второе равенство.

Первая часть теоремы 2.2 доказана. Докажем ее вторую часть (ср. [40], [41]).

Пусть $f \in \Sigma$, и пусть непустое подмножество $I \subseteq Q$ является f -замкнутым, т.е.

$$x, y \in I \longrightarrow f(x, y) \in I,$$

тогда отношение $\tilde{f}_I$, определенное по правилу

$$a \tilde{f}_I b \iff f(a, I) \cap f(b, I) \neq \emptyset,$$

где $f(a, I) = \{f(a, x) \mid x \in I\}$, будет конгруэнцией для любой алгебры $\mathcal{A}$ со сверхтождествами (2.1)–(2.4). Рефлексивность и симметричность отношения $\tilde{f}_I$ очевидны. Докажем транзитивность.

Пусть $a \tilde{f}_I b$ и $b \tilde{f}_I c$, т.е. существуют элементы $x, y, u, v \in I$ такие, что $f(a, x) = f(b, y)$ и $f(b, u) = f(c, v)$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} f(a, f(x, u)) &= f(f(a, x), u) = f(f(b, y), u) \\ &= f(b, f(y, u)) = f(b, f(u, y)) = f(f(b, u), y) \\ &= f(f(c, v), y) = f(c, f(v, y)), \end{aligned}$$

где $f(x, u), f(v, y) \in I$, т.е. $a \tilde{f}_I c$.

Пусть $g \in \Sigma$, и пусть $a_1 \sim_I a_2$ и $b_1 \sim_I b_2$; докажем условие $g(a_1, b_1) \sim_I g(a_2, b_2)$. Существуют $x, y, u, v \in I$ такие, что $f(a_1, x) = f(a_2, y)$ и $f(b_1, u) = f(b_2, v)$. Без ущерба для общности элементы x, y, u, v можно выбрать равными. Действительно, если $\omega = f(x, f(y, f(u, v)))$, тогда $\omega \in I$, и согласно сверхтождествам (2.1)–(2.3) имеем:

$$\omega = f(x, \omega) = f(y, \omega) = f(u, \omega) = f(v, \omega),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} f(a_1, \omega) &= f(a_1, f(x, \omega)) = f(f(a_1, x), \omega) \\ &= f(f(a_2, y), \omega) = f(a_2, f(y, \omega)) = f(a_2, \omega). \end{aligned}$$

Аналогично, $f(b_1, \omega) = f(b_2, \omega)$. Далее, согласно сверхтождеству (2.4):

$$\begin{aligned} f(\omega, g(a_1, b_1)) &= g(f(\omega, a_1), f(\omega, b_1)) \\ &= g(f(\omega, a_2), f(\omega, b_2)) = f(\omega, g(a_2, b_2)), \end{aligned}$$

т.е. $g(a_1, b_1) \sim_I g(a_2, b_2)$.

Если множество $I = \{a\}$, $a \in Q$, тогда оно f -замкнуто для любого $f \in \Sigma$, и соответствующую конгруэнцию $\sim_I$ обозначим через $\sim_a$. Рассмотрим пересечение $\tilde{f} = \bigcap_{a \in Q} \sim_a$. Если $x \tilde{f} y$, тогда $x \tilde{f}_a y$, и $x \tilde{f}_b y$, т.е. $f(x, x) = f(y, x)$ и $f(x, y) = f(y, y)$, т.е. $x = y$. Итак, конгруэнция $\tilde{f}$ – нулевая, и поскольку алгебра $\mathcal{A}$ подпрямой неразложима, то $\tilde{f}_a$ – нулевая конгруэнция для некоторого $a \in Q$. Поэтому $f(x, a) = x$ для любого $x \in Q$ (поскольку $f(x, a) \tilde{f}_a x$), т.е. элемент a будет единичным элементом операции $f \in \Sigma$: $a = O_f$. Итак, каждая операция $f \in \Sigma$ подпрямой неразложимой алгебры $\mathcal{A}$ со сверхтождествами (2.1)–(2.4) обладает единицей $O_f \in Q$.

Далее, по любым операциям $f, g \in \Sigma$ определим отношение $f_g \subseteq Q \times Q$ следующим образом:

$$x f_g y \iff x = y \text{ или } f(x, O_g) \neq O_g, \quad f(y, O_g) \neq O_g.$$

Легко доказать, что f_g – конгруэнция для алгебры $(Q; \{f, g\})$. А именно, f_g – отношение эквивалентности, и если $x f_g y$ и $z \in Q$, то $f(x, z) f_g f(y, z)$ и $g(x, z) f_g g(y, z)$, поскольку, если $f(x, O_g) \neq O_g$ и $f(y, O_g) \neq O_g$, то $f(f(x, z), O_g) \neq O_g$, $f(f(y, z), O_g) \neq O_g$, и $f(g(x, z), O_g) \neq O_g$, $f(g(y, z), O_g) \neq O_g$. Действительно, пусть $f(f(x, z), O_g) = O_g$, тогда

$$\begin{aligned} O_f &= g(O_f, O_g) = g(O_f, f(f(x, z), O_g)) \\ &= f(g(O_f, f(x, z)), g(O_f, O_g)) = f(g(O_f, f(x, z)), O_f) \\ &= g(O_f, f(x, z)) = f(g(O_f, x), g(O_f, z)), \\ g(O_f, x) &= f(g(O_f, x), O_f) = f(g(O_f, x), f(g(O_f, x), g(O_f, z))) \\ &= f(f(g(O_f, x), g(O_f, x)), g(O_f, z)) = f(g(O_f, x), g(O_f, z)) = O_f; \\ O_g &= f(O_g, O_f) = f(O_g, g(O_f, x)) = g(f(O_g, O_f), f(O_g, x)) \\ &= g(O_g, f(O_g, x)) = f(O_g, x), \end{aligned}$$

что противоречит условию $f(x, O_g) \neq O_g$.

Следовательно, из предположения $f(f(y, z), O_g) = O_g$ вытекает равенство $f(O_g, y) = O_g$. Если же $f(g(x, z), O_g) = O_g$, тогда

$$\begin{aligned} O_f &= g(O_f, O_g) = g(O_f, f(g(x, z), O_g)) \\ &= f(g(O_f, g(x, z)), g(O_f, O_g)) \\ &= f(g(O_f, g(x, z)), O_f) = g(O_f, g(x, z)), \end{aligned}$$

т.е. $g(g(x, z), O_f) = O_f$, и, следовательно, как и выше, $g(O_f, x) = O_f$. Поэтому и $f(O_g, x) = O_g$. Опять пришли к противоречию. Аналогично, предположение $f(g(y, z), O_g) = O_g$ приводит к противоречию $f(O_g, y) = O_g$.

Если для подпрямо неразложимой T -алгебры $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$, где $T = \{2\}$ и $\Sigma = \{f, g\}$, имеем $Q = \{O_f, O_g\}$, тогда в случае $f \neq g$ алгебра $\mathcal{A}$ – двухэлементная решетка, а в случае $f = g$ алгебра $\mathcal{A}$ одноэлементна ($O_f = O_g$).

Если же $Q \neq \{O_f, O_g\}$, т.е. существует $a \in Q$ такое, что $a \neq O_f, O_g$, тогда $f(a, O_g) \neq O_g$. Действительно, предполагая $f(a, O_g) = O_g$, получим

$$\begin{aligned} y &= g(y, O_g) = g(y, f(a, O_g)) = f(g(y, a), g(y, O_g)) \\ &= f(g(y, a), y) = f(y, g(y, a)). \end{aligned}$$

Поэтому если $y(\widetilde{f_a} \cap \widetilde{g_a})x$, тогда

$$\begin{aligned} x &= f(x, g(x, a)) = f(x, g(y, a)) = g(f(x, y), f(x, a)) = g(f(x, y), f(y, a)) \\ &= g(f(y, x), f(y, a)) = f(y, g(x, a)) = f(y, g(y, a)) = y, \end{aligned}$$

и поскольку алгебра $\mathcal{A}$ – подпрямо неразложима, то $\widetilde{f_a}$ или $\widetilde{g_a}$ – нулевая конгруэнция, следовательно, $a = O_f$ или $a = O_g$. Противоречие! Итак, если $a \in Q$ и $a \neq O_f, O_g$, тогда $f(a, O_g) \neq O_g$.

Рассмотрим конгруэнцию

$$q_f^g = f_g \cap \left(\bigcap_{a \neq O_f, O_g} (\widetilde{f_a} \cap \widetilde{g_a}) \right)$$

алгебры $\mathcal{A} = (Q; \{f, g\})$. Поскольку конгруэнция $\widetilde{f_a}$ будет нулевой тогда и только тогда, когда $a = O_f$, то конгруэнция $\bigcap_{a \neq O_f, O_g} (\widetilde{f_a} \cap \widetilde{g_a})$ согласно подпрямой неразложимости алгебры $\mathcal{A}$ не будет нулевой. Далее, справедлива импликация:

$$xq_f^g y \longrightarrow x = y.$$

Действительно, если $x = O_f$, тогда $f(x, O_g) = f(O_f, O_g) = O_g$, и, следовательно, $x = y$, поскольку $xf_g y$. Аналогично, из условия $x = O_g$ получим $f(x, O_g) = f(O_g, O_g) = O_g$ и опять приходим к равенству $x = y$. Точно так же из условия

$y = O_f(y = O_g)$ вытекает равенство $x = y$. Поэтому при доказательстве импликации можно предположить $x, y \neq O_f, O_g$. Следовательно, $x(\widetilde{f_x} \cap \widetilde{g_x})y$ и поэтому

$$\begin{aligned} f(x, g(x, x)) &= f(y, g(y, x)), \\ x &= f(y, g(y, x)), \\ f(y, x) &= f(y, f(y, g(y, x))) = f(y, g(y, x)) = x. \end{aligned}$$

Аналогично, имеем $x(\widetilde{f_y} \cap \widetilde{g_y})y$ и $f(x, y) = y$. Таким образом, $x = y$. Следовательно, f_g – нулевая конгруэнция, и потому множество Q содержит лишь один элемент $a \neq O_f, O_g$. Итак, либо $|Q| = 3$, если $O_f \neq O_g$, либо $|Q| = 2$, если $O_f = O_g$ (следовательно, и $f = g$).

Заметим также, что в случае $|Q| = 3$ в алгебре $\mathcal{A} = (Q; \{f, g\})$ справедливо тождество

$$X(x, a) = X(a, x) = a$$

для любого $x \in \{O_f, O_g\}$. Действительно, $f(a, O_g) \neq O_f$, а если $f(a, O_g) = O_g$, тогда возникает противоречие:

$$a = f(a, O_f) = f(a, f(O_g, a)) = f(O_g, a) = O_f.$$

Пусть $g(a, O_f) = O_f$. Тогда

$$\begin{aligned} O_g &= f(O_g, O_f) = f(O_g, g(a, O_f)) = g(f(O_g, a), f(O_g, O_f)) \\ &= g(f(O_g, a), O_g) = f(O_g, a). \end{aligned}$$

Противоречие! Если же $g(a, O_f) = O_g$, тогда

$$a = g(a, O_g) = g(a, g(a, O_f)) = g(a, O_f) = O_g.$$

Противоречие!

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *С точностью до изоморфизма единственными неоднородными подпрямона неразложимыми T -алгебрами, где $T = \{2\}$, в сверхмногообразии T -алгебр, порожденном любой дистрибутивной решеткой (многообразием дистрибутивных решеток), являются: двухэлементная полурешетка, двухэлементная решетка и трехэлементная алгебра $(\{0, 1, a\}, \{+, \cdot\})$, являющаяся расширением двухэлементной решетки $(\{0, 1\}, \{+, \cdot\})$ с помощью элемента a , удовлетворяющего тождеству*

$$X(x, a) = X(a, x) = a$$

для любого $x \in \{0, 1, a\}$. Таким образом, любое сверхтождество многообразия дистрибутивных решеток (любой дистрибутивной решетки) является следствием сверхтождеств (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) этого многообразия.

ТЕОРЕМА 2.3. Если T -алгебра $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$, где $T = \{1, 2\}$, удовлетворяет сверхтождествам (2.1)–(2.4), а также

$$(2.14) \quad F(F(x)) = x,$$

$$(2.15) \quad X(F(x), y) = X(F(X(x, y)), y),$$

$$(2.16) \quad F(X(F(X(x, y)), F(X(x, F(y))))) = x$$

и подпрямой неразложима, тогда множество унарных операций алгебры $\mathcal{A}$ одноэлементно, мощность множества ее бинарных операций ≤ 2 и $|Q| \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой бинарной операции $f \in \Sigma$ и для любого непустого f -замкнутого подмножества $I \in Q$ отношение $\tilde{f}_I$, определенное при доказательстве теоремы 2.2, является конгруэнцией и для рассматриваемой T -алгебры. Остается лишь добавить, что для любой унарной операции $F \in \Sigma$

$$a \tilde{f}_I b \rightarrow F(a) \tilde{f}_I F(b).$$

Действительно, если $f(a, x) = f(b, x)$, $x \in I$, тогда согласно сверхтождеству (2.15) получим:

$$f(F(a), x) = f(F(f(a, x)), x) = f(F(f(b, x)), x) = f(F(b), x),$$

т.е. $f(a) \tilde{f}_I F(b)$.

Поэтому, как и в доказательстве теоремы 2.2, заключаем, что любая бинарная операция $f \in \Sigma$ подпрямой неразложимой T -алгебры $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$, где $T = \{1, 2\}$, со сверхтождествами (2.1)–(2.4), (2.15), обладает единицей $O_f \in Q$. Очевидно,

$$I \subseteq J \rightarrow \tilde{f}_I \subseteq \tilde{f}_J.$$

f -замкнутое подмножество $I \subseteq Q$ называется простым, если

$$f(x, y) \in I \rightarrow x, y \in I.$$

Очевидно, Q является f -замкнутым и простым для любой бинарной операции $f \in \Sigma$, и пересечение f -замкнутых и простых подмножеств есть f -замкнутое и простое подмножество.

Для любого элемента $a \in Q$ и любой бинарной операции $f \in \Sigma$ непустое подмножество

$$(a)_f = \{x \in Q \mid f(a, x) = a\}$$

будет f -замкнутым и простым. Действительно, если $x, y \in (a)_f$, т.е. $f(a, x) = a$ и $f(a, y) = a$, то

$$f(a, f(x, y)) = f(f(a, x), y) = f(a, y) = a,$$

т.е. $f(x, y) \in (a)_f$. Если же $f(x, y) \in (a)_f$, то $x, y \in (a)_f$. Например,

$$\begin{aligned} f(a, x) &= f(f(a, f(x, y)), x) = f(a, f(f(y, x), x)) \\ &= f(a, f(y, f(x, x))) = f(a, f(y, x)) = f(a, f(x, y)) = a. \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, что

$$(a)_f = \{O_f\} \iff a = O_f,$$

и конгруэнция $\tilde{f}_{(a)_f}$ будет нулевой тогда и только тогда, когда $a = O_f$.

Если I и J — f -замкнутые и простые подмножества, то

$$\tilde{f}_I \subseteq \tilde{f}_J \longrightarrow I \subseteq J,$$

поскольку при $\tilde{f}_I \subseteq \tilde{f}_J$ имеем:

$$\begin{aligned} I &= \{x \in Q \mid \exists a, b \in I, f(x, a) = f(O_f, b)\} \\ &= \{x \in Q \mid x \tilde{f}_I O_f\} \subseteq \{x \in Q \mid x \tilde{f}_J O_f\} \\ &= \{x \in Q \mid \exists c, d \in J, f(x, c) = f(O_f, d)\} = J. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(2.17) \quad \tilde{f}_{(a)_f} \cap \tilde{f}_{(b)_f} = \tilde{f}_{(a)_f \cap (b)_f}.$$

Пусть $|Q| \geq 3$, и пусть F, f — фиксированные унарная и бинарная операции из Σ . Следовательно, существует $a \in Q, a \neq O_f, F(O_f)$. Тогда, согласно сверттождеству (2.14) $F(a) \neq O_f$. Поэтому $(a)_f \neq \{O_f\}, (F(a))_f \neq \{O_f\}$. Если же $x \in (a)_f \cap (F(a))_f$, то $f(a, x) = a, f(F(a), x) = F(a)$ и

$$x \stackrel{(2.16)}{=} F(f(F(f(x, a)), F(f(x, F(a))))) = F(f(F(a), F(F(a)))) = F(f(F(a), a)).$$

Следовательно, пересечение $(a)_f \cap (F(a))_f$ одноэлементно, поэтому

$$(a)_f \cap (F(a))_f = \{O_f\}$$

и согласно (2.17) пересечение $\tilde{f}_{(a)_f} \cap \tilde{f}_{(F(a))_f}$ двух ненулевых конгруэнций — нулевая конгруэнция. Противоречие! Итак, $|Q| \leq 2$.

Если $|Q| = 2$, тогда существуют всего две бинарные операции, удовлетворяющие условиям (2.1), (2.2), и столько же унарных операций, удовлетворяющих условию (2.14). Однако тождественное отображение ε_Q не удовлетворяет сверттождеству (2.16):

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon_Q X(\varepsilon_Q X(x, y), \varepsilon_Q X(x, \varepsilon_Q(y))) \\ &= \varepsilon_Q X(\varepsilon_Q X(y, x), \varepsilon_Q X(y, \varepsilon_Q(x))) = y. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *С точностью до изоморфизма единственными неодноэлементными подпрямона неразложимыми T -алгебрами, где $T = \{1, 2\}$, в сверттообразии T -алгебр, порожденном любой булевой алгеброй (многообразием булевых алгебр), являются двухэлементная булева алгебра и ее $\{+, '\}$ -редукт. Таким образом, любое сверттождество многообразия булевых алгебр (любой булевой алгебры) является следствием сверттождеств (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.14), (2.15), (2.16) этого многообразия.*

ТЕОРЕМА 2.4 [21]. Если T -алгебра $\mathcal{A} = (Q; \Sigma)$, где $T = \{2\}$, удовлетворяет сверхтождествам (2.1)–(2.3), а также

$$(2.18) \quad X(Y(X(x, y), z), Y(y, z)) = Y(X(x, y), z)$$

и подпрямой неразложима, тогда мощность $|\Sigma| \leq 2$, и поэтому

- 1) любое сверхтождество многообразия всех решеток является следствием сверхтождеств (2.1), (2.2), (2.3), (2.18) этого многообразия;
- 2) любое сверхтождество многообразия всех модулярных решеток является следствием сверхтождеств (2.1), (2.2), (2.3), (2.18), (1.2) этого многообразия.

Об исследованиях сверхтождеств в полиномиальных (термальных) алгебрах см. в [42]–[53].

§ 3. Категория арифметически однотипных систем. Неклассическая семантика языка 2-го порядка

Под арифметическим типом алгебраической системы (кратко – системы) $\mathcal{A} = (Q; \Sigma, \Omega)$ понимается упорядоченная пара (T_1, T_2) подмножеств множества всех натуральных чисел:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{|A| \mid A \in \Sigma\} \subseteq \mathbb{N}, \\ T_2 &= \{|P| \mid P \in \Omega\} \subseteq \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где $|P|$ (соответственно $|A|$) – арность предиката P (операции A). Алгебраическая система с арифметическим типом (T_1, T_2) называется (T_1, T_2) -системой. Если $\Sigma = \emptyset$, то $\mathcal{A}$ называется T_2 -моделью. Две системы называются арифметически однотипными, если их арифметические типы равны.

Пусть $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma, \Omega \rangle$ и $\mathcal{A}' = \langle Q'; \Sigma', \Omega' \rangle$ – две арифметически однотипные системы.⁷ Тройку отображений $(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$, где $\alpha: Q \rightarrow Q'$, $\tilde{\beta}: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, $\tilde{\gamma}: \Omega \rightarrow \Omega'$, назовем гомоморфизмом из системы $\mathcal{A}$ в систему $\mathcal{A}'$ (обозначение: $(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}): \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}'$), если $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ сохраняют арность и

$$\begin{aligned} \alpha A(x_1, \dots, x_n) &= [\tilde{\beta}(A)](\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \\ P(y_1, \dots, y_m) = \text{И} &\Rightarrow [\tilde{\gamma}(P)](\alpha y_1, \dots, \alpha y_m) = \text{И}, \end{aligned}$$

где $A \in \Sigma$, $P \in \Omega$, $|A| = n$, $|P| = m$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in Q$.

Арифметически однотипные системы и их гомоморфизмы $(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ (в качестве морфизмов) образуют категорию. В дальнейшем понятия подсистемы, ядра, конгруэнции, фактор-системы, прямого произведения систем, фильтрованного произведения и ультрапроизведения систем понимаются в смысле этой категории.

Пусть заданы некоторый язык $\mathcal{K}$ второго порядка [1], [2] и произвольные подмножества T_1 , T_2 множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Будем говорить, что формула F

⁷ Для простоты рассматриваются алгебраические системы без нулевых операций и предикатов.

этого языка имеет арифметический тип (T_1, T_2) или является (T_1, T_2) -формулой, если множество арностей всех функциональных (предикатных) переменных, участвующих в этой формуле, содержится в T_1 (соответственно в T_2). Значения и истинность (T_1, T_2) -формул языка $\mathcal{K}$ здесь определяются на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma, \Omega \rangle$ арифметического типа (T_1, T_2) как значения и истинность формул с ограниченными предикатными (функциональными) кванторами $(\forall X), (\exists X)$, означающими: “для каждого значения $X = P \in \Omega$ (соответственно $X = A \in \Sigma$) соответствующей арности”, “существует значение $X = P \in \Omega$ (соответственно $X = A \in \Sigma$) соответствующей арности”. Значения соответствующих арностей для свободных предикатных и функциональных переменных также берутся из системы $\mathcal{A}$, точнее, из Ω и Σ соответственно.

Абсолютно-замкнутая формула второго порядка называется предложением (свойством) второго порядка. Прямое произведение (T_1, T_2) -систем, вообще говоря, не сохраняет свойств второго порядка.

Рассмотрим фильтрованные произведения в рассматриваемой категории систем. Пусть $\mathcal{A}_i = (Q_i; \Sigma_i, \Omega_i)$, $i \in I$, – системы арифметического типа (T_1, T_2) , и пусть $\hat{\mathcal{A}} = (\hat{Q}; \hat{\Sigma}, \hat{\Omega})$ – прямое произведение этих (T_1, T_2) -систем, определяемое аналогично прямым произведениям Т-алгебр [8]. Пусть $\mathcal{D}$ – какой-нибудь фильтр над I . Тройка отношений эквивалентности $(\equiv_{\mathcal{D}}, \sim_{\mathcal{D}}, \cong_{\mathcal{D}})$, где $\equiv_{\mathcal{D}}, \sim_{\mathcal{D}}$ и $\cong_{\mathcal{D}}$ определяются аналогично:

$$\begin{aligned} f \equiv_{\mathcal{D}} g &\iff \{\alpha \in I \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{D}, \quad f, g \in \hat{Q}, \\ F \sim_{\mathcal{D}} G &\iff \{\alpha \in I \mid F(\alpha) = G(\alpha)\} \in \mathcal{D}, \quad F, G \in \hat{\Sigma}, \\ P \cong_{\mathcal{D}} R &\iff \{\alpha \in I \mid P(\alpha) = R(\alpha)\} \in \mathcal{D}, \quad P, R \in \hat{\Omega}, \end{aligned}$$

будет конгруэнцией (T_1, T_2) -системы $\hat{\mathcal{A}}$, т.е. $(\equiv_{\mathcal{D}}, \sim_{\mathcal{D}})$ – конгруэнция T_1 -алгебры $\langle \hat{Q}; \hat{\Sigma} \rangle$ в смысле [8]. Тройка $\langle \hat{Q}/\mathcal{D}; \hat{\Sigma}/\mathcal{D}, \hat{\Omega}/\mathcal{D} \rangle$, состоящая из фактор-множеств $\hat{Q}/\mathcal{D}$, $\hat{\Sigma}/\mathcal{D}$ и $\hat{\Omega}/\mathcal{D}$ по отношениям эквивалентности $\equiv_{\mathcal{D}}, \sim_{\mathcal{D}}$ и $\cong_{\mathcal{D}}$, естественно превращается в (T_1, T_2) -систему. Действительно, пусть $f\mathcal{D}$ – класс эквивалентности элемента $f \in \hat{Q}$ по отношению $\equiv_{\mathcal{D}}$, $[A]\mathcal{D}$ – класс эквивалентности операции $A \in \hat{\Sigma}$ по отношению $\sim_{\mathcal{D}}$, и $[R]\mathcal{D}$ – класс эквивалентности отношения $R \in \hat{\Omega}$ по эквивалентности $\cong_{\mathcal{D}}$. Каждый элемент $[A]\mathcal{D} \in \hat{\Sigma}/\mathcal{D}$ определяет операцию на множестве $\hat{Q}/\mathcal{D}$ той же арности, что и операция $A \in \hat{\Sigma}$:

$$[A]\mathcal{D}(f_1\mathcal{D}, \dots, f_n\mathcal{D}) = [A(f_1, \dots, f_n)]\mathcal{D}, \quad |A| = n,$$

корректность которой следует из определения конгруэнции. Имеем:

$$[A]\mathcal{D}(f_1\mathcal{D}, \dots, f_n\mathcal{D}) = f\mathcal{D} \iff \{\alpha \in I \mid A(\alpha)(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = f(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

Каждый элемент $[R]\mathcal{D} \in \hat{\Omega}/\mathcal{D}$ определяет предикат на множестве $\hat{Q}/\mathcal{D}$ той же арности, что и предикат $R \in \hat{\Omega}$:

$$[R]\mathcal{D}(f_1\mathcal{D}, \dots, f_m\mathcal{D}) = \text{И} \iff \{\alpha \in I \mid R(\alpha)(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = \text{И}\} \in \mathcal{D}, \quad |R| = m,$$

корректность которого следует из определения фильтра. Действительно, если $g_i \in f_i \mathcal{D}$, $i = 1, \dots, m$, $P \in [R] \mathcal{D}$ и

$$\begin{aligned} I_0 &= \{\alpha \in I \mid R(\alpha) = P(\alpha)\} \in \mathcal{D}, \\ I_j &= \{\alpha \in I \mid f_j(\alpha) = g_j(\alpha)\} \in \mathcal{D}, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} &\{\alpha \in I \mid P(\alpha)(g_1(\alpha), \dots, g_m(\alpha)) = \mathbf{I}\} \\ &\supseteq I_0 \cap I_1 \cap \dots \cap I_m \cap \{\alpha \in I \mid R(\alpha)(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = \mathbf{I}\} \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Полученная (T_1, T_2) -система $\langle \widehat{Q}/\mathcal{D}; \widehat{\Sigma}/\mathcal{D}, \widehat{\Omega}/\mathcal{D} \rangle$ называется фильтрованным (по фильтру $\mathcal{D}$) произведением (T_1, T_2) -систем $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, и обозначается через $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{D}$. Если фильтр $\mathcal{D}$ – ультрафильтр над I , то фильтрованное произведение (T_1, T_2) -систем называется ультрапроизведением (T_1, T_2) -систем.

Запись $\mathcal{A} \models \mathcal{F}$ означает, что (T_1, T_2) -формула $\mathcal{F}$ или ее соответствующее значение истинна на (T_1, T_2) -системе $\mathcal{A}$.

Через $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m, S_1, \dots, S_k)$ обозначим (T_1, T_2) -формулу, свободные предметные переменные которой содержатся среди $x_1, \dots, x_n$, а свободные функциональные (предикатные) переменные – среди $X_1, \dots, X_m$, (соответственно среди $S_1, \dots, S_k$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. (T_1, T_2) -формула $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m, S_1, \dots, S_k)$ называется фильтрующей по фильтру $\mathcal{D}$ (над I), если для любого множества (T_1, T_2) -систем $\mathcal{A}_i = \langle Q_i; \Sigma_i, \Omega_i \rangle$, $i \in I$, и любых $a_1, \dots, a_n \in \widehat{Q}$, $F_1, \dots, F_m \in \widehat{\Sigma}$, $P_1, \dots, P_k \in \widehat{\Omega}$ соответствующих арностей имеет место

$$\begin{aligned} &\{\alpha \in I \mid \mathcal{A}_\alpha \models \mathcal{F}(a_1(\alpha), \dots, a_n(\alpha), F_1(\alpha), \dots, F_m(\alpha), P_1(\alpha), \dots, P_k(\alpha))\} \in \mathcal{D} \\ &\iff \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{D} \models \mathcal{F}(a_1 \mathcal{D}, \dots, a_n \mathcal{D}, [F_1] \mathcal{D}, \dots, [F_m] \mathcal{D}, [P_1] \mathcal{D}, \dots, [P_k] \mathcal{D}). \end{aligned}$$

В рассматриваемой категории (T_1, T_2) -систем и их гомоморфизмов $(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ существование фильтрованных произведений и ультрапроизведений приводит к формулировкам основных теоретико-модельных результатов для формул второго порядка с ограниченными функциональными и предикатными кванторами.

ТЕОРЕМА 3.1 (Лоса для формул второго порядка с ограниченными кванторами). *Произвольная (T_1, T_2) -формула $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m, S_1, \dots, S_k)$ является фильтрующей (в смысле определения 3.1) по любому ультрафильтру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяется стандартная индукция по длине формулы $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{D}$ – ультрафильтр над множеством I . Для атомных формул утверждение верно. Далее, допуская, что утверждение верно для формул $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, доказываем его для формул $\mathcal{F}_1 \& \mathcal{F}_2$, $\neg \mathcal{F}_1$, $(\exists x) \mathcal{F}_1$, $(\exists X) \mathcal{F}_1$ и $(\exists S) \mathcal{F}_1$ (остальные логические операции выражаются через перечисленные), где x – предметная, X – функциональная и S – предикатная переменные.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если предложение второго порядка и арифметического типа (T_1, T_2) истинно в каждой (T_1, T_2) -системе $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, то оно истинно и в любом ультрапроизведении этих (T_1, T_2) -систем.*

Алгебраическую систему $\mathcal{A}$ арифметического типа (T_1, T_2) будем называть (T_1, T_2) -моделью множества Γ предложений второго порядка и арифметического типа (T_1, T_2) , если $\mathcal{A} \models \mathcal{F}$ для всех $\mathcal{F} \in \Gamma$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Множество Γ предложений второго порядка и арифметического типа (T_1, T_2) имеет (T_1, T_2) -модель тогда и только тогда, когда всякое его конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ имеет (T_1, T_2) -модель.*

Пусть Γ_1, Γ_2 – множества предложений второго порядка и арифметического типа (T_1, T_2) . Будем говорить, что Γ_2 является следствием Γ_1 , если любая (T_1, T_2) -модель для Γ_1 является (T_1, T_2) -моделью и для Γ_2 . Множества Γ_1, Γ_2 называются эквивалентными (равносильными), если Γ_2 является следствием Γ_1 , и наоборот.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Если множество Γ предложений второго порядка и арифметического типа (T_1, T_2) равносильно множеству $\{\mathcal{F}\}$, состоящему из одного (T_1, T_2) -предложения второго порядка, то существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, равносильное $\{\mathcal{F}\}$.*

(T_1, T_2) -формула F со свободными предметными, функциональными и (или) предикатными переменными называется выполнимой в (T_1, T_2) -системе $\mathcal{A}$, если существуют такие значения из $\mathcal{A}$ для всех входящих в F свободных переменных, при которых формула F становится истинной в $\mathcal{A}$. Совокупность (T_1, T_2) -формул $\mathcal{F}$ называется выполнимой в (T_1, T_2) -системе $\mathcal{A}$, если существуют такие значения из $\mathcal{A}$ для всех входящих в элементы $\mathcal{F}$ свободных переменных, при которых формулы из $\mathcal{F}$ становятся истинными в $\mathcal{A}$. Совокупность (T_1, T_2) -формул называется выполнимой, если существует (T_1, T_2) -система, в которой выполнима эта совокупность.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Совокупность (T_1, T_2) -формул Γ называется n -выполнимой, если существует (T_1, T_2) -система, в которой выполнимо любое подмножество $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$ порядка $\leq n$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Если выполнима (n -выполнима) каждая конечная часть бесконечной совокупности (T_1, T_2) -формул, то выполнима (n -выполнима) и вся заданная совокупность (T_1, T_2) -формул. В частности, если выполнима (n -выполнима) каждая конечная часть бесконечной совокупности (T_1, T_2) -формул языка 1-го порядка, то выполнима (n -выполнима) и вся заданная совокупность (T_1, T_2) -формул ($n = 1, 2, \dots$).*

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно ввести понятие категории с ультрапроизведениями и тем самым прийти к теореме компактности в категориях. Подобное замечание справедливо и для теоремы о полноте в категориях со свободными объектами.

§ 4. Нетривиальные сверхтождества ассоциативности и дистрибутивности в обратимых и близких к ним алгебрах

В настоящем параграфе рассматриваются T -сверхтождества при $T = \{2\}$.

Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется q -алгеброй, если в Σ существует обратимая операция, т.е. $Q(A)$ – квазигруппа для некоторого $A \in \Sigma$. Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется e -алгеброй, если в Σ существует операция с единицей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функциональная переменная X называется сингулярной в сверхтождестве $w_1 = w_2$, если в нем X встречается всего один раз и справедливо хотя бы одно из следующих условий:

- а) в подслове $w = X(\omega_1, \omega_2)$ существуют предметные переменные $x \in [\omega_1]$ и $y \in [\omega_2]$ такие, что каждая из них в подслове w встречается всего один раз;
- б) подслово $w = X(\omega_1, \omega_2)$ имеет вид $X(\omega_1, x)$ или $X(x, \omega_2)$, и существует предметная переменная $y \in [w]$, отличная от x и встречающаяся в подслове w всего один раз, где $[w]$ – множество предметных переменных в слове w .

Функциональная переменная X называется строго сингулярной в сверхтождестве $w_1 = w_2$, если в нем X встречается всего один раз и в подслове $X(\omega_1, \omega_2)$ слова w_i ($i = 1$ или 2) существуют предметные переменные $x \in [\omega_1]$ и $y \in [\omega_2]$ такие, что каждая из них в слове w_i встречается всего один раз.

ЛЕММА 4.1 [8]. *В нетривиальной q -алгебре не может выполняться сверхтождество с сингулярной функциональной переменной. В нетривиальной e -алгебре не может выполняться сверхтождество со строго сингулярной функциональной переменной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Пусть в нетривиальной q -алгебре $\mathcal{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$ с обратимой операцией $A \in \Sigma$ выполняется сверхтождество

$$(4.0) \quad w_1 = w_2$$

с сингулярной функциональной переменной X . Задавая для функциональной переменной X два различных значения $A_1 \neq A_2$, где $A_1, A_2 \in \Sigma$, и в обоих случаях давая всем остальным функциональным переменным из сверхтождества (4.0) равное значение $A \in \Sigma$, где $Q(A)$ – квазигруппа, получаем два тождества:

$$w'_1 = w'_2, \quad w''_1 = w''_2.$$

Пусть для определенности X содержится в w_1 , тогда выражения w'_2 и w''_2 , будучи идентичными, совпадают, т.е. $w'_2 = w''_2$, и поэтому $w'_1 = w''_1$.

В w'_1 и w''_1 все операции совпадают с A , кроме A_1, A_2 . Поскольку $Q(A)$ – квазигруппа, то, проделав все сокращения, получаем тождество

$$A_1(\omega_1, \omega_2) = A_2(\omega_1, \omega_2).$$

Пусть подслово $X(\omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет условию а) определения 4.1. Кроме предметных переменных x и y , придадим каждой предметной переменной произвольное, но фиксированное значение из Q . Тогда ω_1 превращается в $\lambda(x)$, а ω_2 – в $\mu(y)$, где λ и μ –

подстановки множества Q , поскольку они являются произведениями трансляций для квазигруппы $Q(A)$. Таким образом, имеем

$$A_1(\lambda x, \mu y) = A_2(\lambda x, \mu y).$$

Отсюда, поскольку λ и μ – подстановки, получаем равенство $A_1 = A_2$, что противоречит выбору $A_1, A_2 \in \Sigma$.

Аналогично рассматривается случай б).

При доказательстве второй части леммы все предметные переменные, кроме x, y , заменяются единицей.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Если в нетривиальной q -алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть только функционального ранга 2 и одного из следующих видов:*

$$\begin{aligned} ((\text{ass})_1) \quad & X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), z), \\ ((\text{ass})_2) \quad & X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), z), \\ ((\text{ass})_3) \quad & X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), z), \end{aligned}$$

причем в классе q -алгебр из сверхтождества $(\text{ass})_3$ вытекает сверхтождество $(\text{ass})_2$, а из сверхтождества $(\text{ass})_2$ вытекает сверхтождество $(\text{ass})_1$. В q -алгебре со сверхтождеством $(\text{ass})_1$ выполняется сверхтождество $(\text{ass})_2$, если и только если в ней выполняется сверхтождество

$$X(x, Y(y, x)) = X(Y(x, y), x),$$

а в q -алгебре со сверхтождеством $(\text{ass})_2$ выполняется сверхтождество $(\text{ass})_3$, если и только если в ней выполняется котождество

$$X(a, X(b, c)) = Y(Y(a, b), c).$$

q -алгебра с нетривиальным сверхтождеством ассоциативности оказывается обратимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функциональный ранг сверхтождества ассоциативности равен 4 или 3, тогда в нем существует сингулярная функциональная переменная, поэтому согласно лемме 4.1 такое сверхтождество не может выполняться в нетривиальной q -алгебре. Если же функциональный ранг равен 2, то возможны лишь три случая, отмеченные в следствии.

Если в q -алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется одно из сверхтождеств $(\text{ass})_1, (\text{ass})_2, (\text{ass})_3$, тогда в $(Q; \Sigma)$ должно выполняться и тривиальное сверхтождество ассоциативности

$$X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z),$$

другими словами, все операции из Σ – полугрупповые, поэтому $Q(\cdot)$ – группа для некоторого $A \in \Sigma$. Докажем, что если в q -алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверхтождество $(\text{ass})_1$, тогда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$, где t_i – некоторый элемент из Q , зависящий от $A_i \in \Sigma$. В самом деле, полагая в $(\text{ass})_1$ $X = A_i$, $Y = (\cdot)$ и $y = e$ – единица группы $Q(\cdot)$, получим $A_i(x, z) = A_i(x, e) \cdot z = \lambda_i(x) \cdot z$, где $\lambda_i(x) = A_i(x, e)$. Полагая в сверхтождестве $(\text{ass})_1$ $X = (\cdot)$ и $Y = A_i$, получаем $x \cdot (\lambda_i y \cdot z) = \lambda_i(x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot \lambda_i y = \lambda_i(x \cdot y)$, $x \cdot \lambda_i e = \lambda_i(x)$, $x \cdot t_i = \lambda_i(x)$, где $t_i = \lambda_i e$. Следовательно, $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$. Непосредственной проверкой убеждаемся и в обратном: если каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$, где $Q(\cdot)$ – группа и $t_i \in Q$, тогда в алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверхтождество $(\text{ass})_1$.

Рассмотрим теперь q -алгебру $(Q; \Sigma)$ со сверхтождеством $(\text{ass})_2$. Как и в предыдущем случае, полагая $X = (\cdot) \in \Sigma$, $Y = A_i \in \Sigma$ и $z = e$, получим $A_i(x, y) = x \cdot \lambda_i(y)$, где $\lambda_i(y) = A_i(y, e)$. Далее, находим $\lambda_i(y) = y \cdot t_i$, откуда $A_i(x, y) = x \cdot y \cdot t_i$ и $x \cdot y \cdot z \cdot t_i = x \cdot y \cdot t_i \cdot z$, т.е. элемент t_i принадлежит центру группы $Q(\cdot)$. Непосредственная проверка показывает и обратное, что в такой алгебре действительно выполняется сверхтождество $(\text{ass})_2$.

Аналогично доказывается, что в q -алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверхтождество $(\text{ass})_3$ тогда и только тогда, когда существует группа $Q(\cdot)$ такая, что каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$, где t_i – центральный элемент второго порядка группы $Q(\cdot)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Если в нетривиальной e -алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть только функционального ранга 2 и имеет вид одного из сверхтождеств $(\text{ass})_1$, $(\text{ass})_2$, $(\text{ass})_3$, причем в классе e -алгебр из сверхтождества $(\text{ass})_3$ вытекает сверхтождество $(\text{ass})_2$, а из сверхтождества $(\text{ass})_2$ вытекает сверхтождество $(\text{ass})_1$.*

Доказательство следствия 4.2 подобно доказательству следствия 4.1.

Без доказательства отметим следующий результат, охватывающий классические результаты Брака–Хьюза [54], Алберта [55].

ТЕОРЕМА 4.1 [9]. *Если e -алгебра изотопна бинарной алгебре с нетривиальным сверхтождеством ассоциативности, тогда они изоморфны.*

Сверхтождества ассоциативности в обратимых алгебрах впервые рассмотрены в [10]. См. также [56], [57].

ПРИМЕР 4.1. Пусть $Q(+, \cdot)$ – нильпотентное ассоциативное кольцо индекса 5, $A_a(x, y) = x \cdot a \cdot y$, $a \in Q$, и пусть $\Sigma = \{A_a \mid a \in Q\}$, тогда в алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняются следующие нетривиальные сверхтождества ассоциативности, левой и правой дистрибутивности:

$$\begin{aligned} X(x, Y(y, z)) &= U(V(x, y), z), \\ X(x, Y(y, z)) &= U(V(x, y), Z(x, z)), \\ X(Y(x, y), z) &= U(V(x, z), Z(y, z)). \end{aligned}$$

Перейдем к классификации нетривиальных сверхтождеств левой и правой дистрибутивности, выполняющихся в нетривиальных q -алгебрах.

ТЕОРЕМА 4.2. *Если в нетривиальной q -алгебре с тривиальным сверхтождеством правой дистрибутивности*

$$(4.1) \quad X(X(x, y), z) = X(X(x, z), X(y, z))$$

выполняется нетривиальное сверхтождество левой дистрибутивности, тогда оно будет иметь функциональный ранг 2 и вид (d_1) . Если в нетривиальной q -алгебре с тривиальным сверхтождеством левой дистрибутивности

$$(4.2) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z))$$

*выполняется нетривиальное сверхтождество правой дистрибутивности, тогда оно будет иметь функциональный ранг 2 и вид (d_2) .*⁸

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в сверхтождестве левой (правой) дистрибутивности имеется всего пять мест для функциональных переменных, то согласно лемме 4.1 функциональный ранг нетривиального сверхтождества левой (правой) дистрибутивности не может превышать 2, иначе в сверхтождестве существовала бы сингулярная функциональная переменная. Таким образом, функциональный ранг должен быть равен двум. Поэтому одна из функциональных переменных должна повторяться два раза, а другая – три раза. Помимо сверхтождества (d_1) имеется еще девять таких сверхтождеств левой дистрибутивности:

$$(4.3) \quad X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(4.4) \quad X(x, X(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(4.5) \quad X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(4.6) \quad X(x, X(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(4.7) \quad X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(4.8) \quad X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(4.9) \quad X(x, Y(y, z)) = X(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(4.10) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(4.11) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)).$$

Требуется доказать, что ни одно из сверхтождеств (4.3)–(4.11) не может выполняться ни в какой нетривиальной q -алгебре с тривиальным сверхтождеством правой дистрибутивности (4.1).

Пусть в нетривиальной q -алгебре $(Q; \Sigma)$ со сверхтождеством (4.1) выполняется сверхтождество (4.3). Согласно определению q -алгебры существует такая операция $A \in \Sigma$, что $Q(A)$ – квазигруппа, следовательно, $Q(A)$ – дистрибутивная квазигруппа, т.е. для любых $x, y, z \in Q$ справедливы равенства:

$$A(x, A(y, z)) = A(A(x, y), A(x, z)),$$

$$A(A(x, y), z) = A(A(x, z), A(y, z)).$$

⁸О сверхтождествах (d_1) , (d_2) см. в §1.

Из первого равенства при $y = x$ и после сокращения следует $A(x, x) = x$ для любого $x \in Q$, т.е. операция A идемпотентна.

На множестве Q определим операцию $(\circ)$:

$$x \circ y = A(R_e^{-1}x, L_e^{-1}y), \quad e \in Q,$$

где $R_e(x) = A(x, e)$, $L_e(x) = A(e, x)$. Получаем лупу $Q(\circ)$ с единицей $e = A(e, e)$. Следовательно,

$$A(x, y) = R_e(x) \circ L_e(y),$$

где $R_e, L_e \in \text{Aut } Q(\circ)$. Действительно,

$$\begin{aligned} R_e(x \circ y) &= R_e A(R_e^{-1}x, L_e^{-1}y) = A(A(R_e^{-1}x, L_e^{-1}y), e) \\ &= A(A(R_e^{-1}x, e), A(L_e^{-1}y, e)) = A(R_e(R_e^{-1}x), R_e(L_e^{-1}y)) \\ &= A(R_e^{-1}(R_ex), L_e^{-1}(R_ey)) = R_e(x) \circ R_e(y), \end{aligned}$$

так как $R_e L_e = L_e R_e$, поскольку

$$R_e(L_ex) = A(A(e, x), e) = A(A(e, e), A(x, e)) = A(e, A(x, e)) = L_e(R_ex).$$

Аналогично доказывается, что L_e – автоморфизм лупы $Q(\circ)$. Обозначая $R_e = \varphi$, $L_e = \psi$, приходим к равенству:

$$A(x, y) = \varphi x \circ \psi y, \quad \varphi, \psi \in \text{Aut } Q(\circ),$$

где $A \in \Sigma$, $Q(A)$ – квазигруппа.

В сверхтождестве (4.3), полагая $X = A_i \in \Sigma$ и $Y = A$, получим

$$\varphi(\varphi x \circ \psi y) \circ \psi(\varphi x \circ \psi z) = A_i(x, A_i(y, z)),$$

откуда при $x = e$ следует

$$\varphi(\psi y) \circ \psi^2(z) = \mu_i A_i(y, z),$$

где $\mu_i(x) = A_i(e, x)$. Далее:

$$\begin{aligned} \mu_i A_i(e, z) &= \psi^2(z), \\ \mu_i^2(z) &= \psi^2(z). \end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает, что μ_i^2 – подстановка, следовательно, μ_i – подстановка и $Q(A_i)$ – квазигруппа (изотопная лупе $Q(\circ)$) для любого $A_i \in \Sigma$, т.е. $(Q; \Sigma)$ – обратимая алгебра. Следовательно, $(Q; \Sigma)$ – идемпотентная алгебра, т.е. в ней выполняется и сверхтождество идемпотентности $X(x, x) = x$.

Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$ и $A_1 \neq A_2$. Полагая в сверхтождестве (4.3) $X = A_1$, $Y = A_2$, $y = z$, приходим к противоречию:

$$\begin{aligned} A_1(x, A_1(y, y)) &= A_2(A_2(x, y), A_2(x, y)), \\ A_1(x, y) &= A_2(x, y), \\ A_1 &= A_2. \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются и случаи сверхтождеств (4.4)–(4.11). Вторая часть теоремы доказывается подобными рассуждениями.

СЛЕДСТВИЕ 4.3 [10], [58]. *Если в нетривиальной обратимой алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество левой (правой) дистрибутивности, тогда оно будет функционального ранга 2 и вида (d_1) (соответственно (d_2)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идемпотентность обратимой алгебры со сверхтождеством левой (правой) дистрибутивности сразу следует из сократимости в обратимых алгебрах. Далее, в идемпотентных сократимых алгебрах из любого сверхтождества (4.3)–(4.11) вытекает сверхтождество $X(x, y) = Y(x, y)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4 [8], [9]. *Если в нетривиальной q -алгебре выполняются нетривиальные сверхтождества левой и правой дистрибутивности, тогда сверхтождество левой (правой) дистрибутивности будет функционального ранга 2 и вида (d_1) (соответственно (d_2)).*

О сверхтождествах дистрибутивности см. также [59], [60].

ТЕОРЕМА 4.3. *В обратимой алгебре $(Q; \Sigma)$ сверхтождества (d_1) и (4.1) выполняются тогда и только тогда, когда существует коммутативная лупа Муфанг $Q(\circ)$ такая, что каждая операция $A \in \Sigma$ определяется по правилу:*

$$A(x, y) = \varphi_A(x) \circ \psi_A(y),$$

где $\varphi_A, \psi_A \in \text{Aut } Q(\circ)$, $\varphi_A \in \text{Aut } Q(A)$, $(\psi_A, \tilde{\varepsilon}) \in \text{Aut}(Q; \Sigma)$, $\varphi_A(x) \circ \psi_A(x) = x$, $x \circ \varphi_A(x) \in K_Q$ (ядро⁹ лупы $Q(\circ)$) для всех $A \in \Sigma$, $x, y \in Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Поскольку $x \circ \varphi_B(x) \in K_Q$, то, заменяя здесь x на $\varphi_B^{-1}(x)$, получим

$$\varphi_B^{-1}(x) \circ x = x \circ \varphi_B^{-1}(x) \in K_Q.$$

С другой стороны в силу биассоциативности луп Муфанг

$$x \circ \varphi_B^{-1}(x) = x^3 \circ (x^{-2} \circ \varphi_B^{-1}(x)),$$

откуда с учетом свойства $x^3 \in K_Q$ для коммутативных луп Муфанг [61] выводим:

$$\begin{aligned} x^{-2} \circ \varphi_B^{-1}(x) &\in K_Q, \\ x^2 \circ (\varphi_B^{-1}(x))^{-1} &\in K_Q \end{aligned}$$

для любых $x \in Q$, $B \in \Sigma$.

По условию, $Q(\circ)$ – коммутативная лупа Муфанг, т.е. в $Q(\circ)$ справедливо тождество $x^2 \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$.

⁹ Левым (правым, средним) ядром лупы $Q(\cdot)$ называется совокупность всех элементов $a \in Q$, для которых $ax \cdot y = a \cdot xy$ (соответственно $xy \cdot a = x \cdot ya$, $xa \cdot y = x \cdot ay$) при любых $x, y \in Q$. Ядром лупы называется пересечение всех трех ее ядер. В лупах Муфанг все три ядра совпадают, более того, в лупах со свойством обратимости (т.е. в IP -лупах) все три ядра совпадают [61]. Лупа $Q(\cdot)$ называется лупой Муфанг, если она удовлетворяет тождеству $x(yz \cdot x) = xy \cdot zx$. Коммутативные лупы Муфанг характеризуются одним тождеством: $x^2 \cdot yz = xy \cdot xz$.

Однако, с учетом свойства $x^2 \circ (\varphi_B^{-1}(x))^{-1} \in K_Q$ имеем:

$$\begin{aligned} (\varphi_B^{-1}(x) \circ (y \circ z)) \circ (x^2 \circ (\varphi_B^{-1}(x))^{-1}) &= (x^2 \circ (\varphi_B^{-1}(x))^{-1}) \circ (\varphi_B^{-1}(x) \circ (y \circ z)) \\ &= ((x^2 \circ (\varphi_B^{-1}(x))^{-1}) \circ \varphi_B^{-1}(x)) \circ (y \circ z) \\ &= x^2 \circ (y \circ z) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$(x \circ y) \circ (x \circ z) = ((x \circ y) \circ ((x^{-1} \circ \varphi_B^{-1}(x)) \circ z)) \circ (x^2 \circ (\varphi_B^{-1}(x))^{-1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_B^{-1}(x) \circ (y \circ z) &= (x \circ y) \circ ((x^{-1} \circ \varphi_B^{-1}(x)) \circ z), \\ \varphi_B(\varphi_B^{-1}(x) \circ (y \circ z)) &= \varphi_B((x \circ y) \circ ((x^{-1} \circ \varphi_B^{-1}(x)) \circ z)), \\ (4.12) \quad x \circ \varphi_B(y \circ z) &= \varphi_B(x \circ y) \circ ((\varphi_B(x^{-1}) \circ x) \circ \varphi_B(z)), \\ x \circ (\varphi_B(y) \circ \varphi_B(z)) &= (\varphi_B x \circ \varphi_B y) \circ (\psi_B x \circ \varphi_B z), \\ x \circ (y \circ z) &= (\varphi_B(x) \circ y) \circ (\psi_B(x) \circ z) \end{aligned}$$

для любых $x, y, z \in Q, B \in \Sigma$. Следовательно, для любого $B \in \Sigma$ имеем:

$$\begin{aligned} x \circ B(y, z) &= x \circ (\varphi_B y \circ \psi_B z) \stackrel{(4.12)}{=} (\varphi_B x \circ \varphi_B y) \circ (\psi_B x \circ \psi_B z) \\ &= \varphi_B(x \circ y) \circ \psi_B(x \circ z) = B(x \circ y, x \circ z). \end{aligned}$$

Теперь сверхтождества (d_1) и (4.1) легко проверяются:

$$\begin{aligned} B(A(x, y), A(x, z)) &= B(\varphi_A x \circ \psi_A y, \varphi_A x \circ \psi_A z) \\ &= \varphi_A x \circ B(\psi_A y, \psi_A z) = \varphi_A x \circ \psi_A B(y, z) = A(x, B(y, z)); \\ A(A(x, z), A(y, z)) &= A(\varphi_A x \circ \psi_A z, \varphi_A y \circ \psi_A z) \\ &= A(\psi_A z \circ \varphi_A x, \psi_A z \circ \varphi_A y) = \psi_A z \circ A(\varphi_A x, \varphi_A y) \\ &= \psi_A z \circ \varphi_A A(x, y) = \varphi_A A(x, y) \circ \psi_A z = A(A(x, y), z). \end{aligned}$$

Необходимость. Пусть $(Q; \Sigma)$ – обратимая алгебра со сверхтождествами (d_1) , (4.1) и e – произвольный фиксированный элемент из Q . Очевидно, что $(Q; \Sigma)$ – идемпотентна. Для любого $A \in \Sigma$ рассмотрим отображения (биекции)

$$\begin{aligned} R_A: x &\rightarrow A(x, e), & x &\in Q, \\ L_A: x &\rightarrow A(e, x), & x &\in Q, \end{aligned}$$

и определим операцию $\circ_A$ следующим образом:

$$u \circ_A v = A(R_A^{-1}(u), L_A^{-1}(v)), \quad u, v \in Q.$$

Легко заметить, что $Q(\circ_A)$ – лупа (для любого $A \in \Sigma$) с единицей $e = A(e, e)$. Поскольку $A(u, v) = R_A(u) \circ_A L_A(v)$, то $u = A(u, u) = R_A(u) \circ_A L_A(u)$. Далее:

$$\begin{aligned} R_A(L_B(u)) &= R_AB(e, u) = A(B(e, u), e) \\ &= A(B(e, u), B(e, e)) = B(e, A(u, e)) = L_B(R_A(u)); \\ L_A(L_B(u)) &= L_AB(e, u) = A(e, B(e, u)) \\ &= B(A(e, e), A(e, u)) = B(e, A(e, u)) = L_B(L_A(u)). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $A, B \in \Sigma$ имеем:

$$R_AL_B = L_BR_A, \quad L_AL_B = L_BL_A.$$

Кроме того, из сверхтождества (d_1) вытекает, что L_A – автоморфизм алгебры $(Q; \Sigma)$, а из сверхтождества (4.1) следует, что R_A – автоморфизм квазигруппы $(Q; A)$ для любого $A \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} L_AB(x, y) &= A(e, B(x, y)) = B(A(e, x), A(e, y)) = B(L_A(x), L_A(y)); \\ R_AA(x, y) &= A(A(x, y), e) = A(A(x, e), A(y, e)) = A(R_A(x), R_A(y)). \end{aligned}$$

Исходя из вышесказанного, получаем:

$$\begin{aligned} L_A(x \circ_B y) &= L_AB(R_B^{-1}x, L_B^{-1}y) \\ &= B(L_A(R_B^{-1}x), L_A(L_B^{-1}y)) = B(R_B^{-1}(L_Ax), L_B^{-1}(L_Ay)) \\ &= R_B(R_B^{-1}(L_Ax)) \circ_AL_B(L_B^{-1}(L_Ay)) = L_Ax \circ_AL_Ay \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$R_A(x \circ_A y) = R_A(x) \circ_AR_A(y),$$

для любых $A, B \in \Sigma$.

Полагая $\varphi_A = R_A$, $\psi_A = L_A$, приходим к равенству:

$$A(x, y) = \varphi_A(x) \circ_A \psi_A(y).$$

Пусть $(\circ_A) = (\circ)$, $\varphi_A = \varphi$, $\psi_A = \psi$. Тогда, исходя из левого дистрибутивного закона

$$A(x, A(y, z)) = A(A(x, y), A(x, z)),$$

получаем:

$$\begin{aligned} \varphi x \circ \psi(\varphi y \circ \psi z) &= \varphi(\varphi x \circ \psi y) \circ \psi(\varphi x \circ \psi z), \\ \varphi x \circ (\psi(\varphi y) \circ \psi^2 z) &= (\varphi^2 x \circ \varphi(\psi y)) \circ (\psi(\varphi x) \circ \psi^2 z). \end{aligned}$$

В последнем равенстве сделаем замены: $x \rightarrow \varphi^{-1}x$, $y \rightarrow \varphi^{-1}(\psi^{-1}y)$, $z \rightarrow \psi^{-2}z$; учитывая равенство $\varphi\psi = \psi\varphi$, выводим:

$$(4.13) \quad x \circ (y \circ z) = (\varphi x \circ y) \circ (\psi x \circ z).$$

Пусть $y = e$, тогда

$$x \circ z = \varphi x \circ (\psi x \circ z),$$

и, заменяя z на $y \circ (\psi x)^{-1}$, где s^{-1} – правый обратный элемента s в лупе $Q(\circ)$, получаем

$$x \circ (y \circ (\psi x)^{-1}) = \varphi x \circ (\psi x \circ (y \circ (\psi x)^{-1}))$$

или согласно (4.13)

$$\begin{aligned} (\varphi x \circ y) \circ (\psi x \circ (\psi x)^{-1}) &= \varphi x \circ (\psi x \circ (y \circ (\psi x)^{-1})), \\ \varphi x \circ y &= \varphi x \circ (\psi x \circ (y \circ (\psi x)^{-1})), \\ y &= \psi x \circ (y \circ (\psi x)^{-1}), \end{aligned}$$

откуда, заменяя x на $\psi^{-1}(x)$, получаем тождество:

$$(4.14) \quad x \circ (y \circ x^{-1}) = y.$$

Рассмотрим левый дистрибутивный закон для операции $A \in \Sigma$ и преобразуем его следующим образом (с использованием предложения 1.2 в случае $\Sigma = \{A\}$):

$$\begin{aligned} A(x, A(y, z)) &= A(A(x, y), A(x, z)), \\ A(x, A(y, z)) &= A(A(x, A(x, z)), A(y, A(x, z))), \\ A(x, A(x, z)) &= {}^{-1}A(A(x, A(y, z)), A(y, A(x, z))), \\ A(x, A(x, z)) &= {}^{-1}A(A(x, A(y, z)), A(A(y, x), A(y, z))), \\ A(x, A(x, z)) &= A({}^{-1}A(x, A(y, x)), A(y, z)). \end{aligned}$$

Пусть $x = e$ и $\alpha(y) = {}^{-1}A(e, y)$, тогда из последнего равенства имеем:

$$\begin{aligned} \psi^2(z) &= A(\alpha(\varphi(y)), A(y, z)) = \varphi(\alpha(\varphi y)) \circ \psi(\varphi y \circ \psi z) \\ &= \varphi(\alpha(\varphi y)) \circ (\psi(\varphi y) \circ \psi^2(z)), \end{aligned}$$

т.е. $z = \varphi(\alpha(\psi^{-1}(y))) \circ (y \circ z) = I(y) \circ (y \circ z)$, где $I: Q \rightarrow Q$ – подстановка и, очевидно, $I(y) = y^{-1}$. Таким образом, справедливо тождество

$$(4.15) \quad x^{-1} \circ (x \circ y) = y,$$

причем $(x^{-1})^{-1} = x$, поскольку согласно (4.15)

$$x \circ y = (x^{-1})^{-1} \circ (x^{-1} \circ (x \circ y)) = (x^{-1})^{-1} \circ y.$$

Сравнивая тождества (4.14) и (4.15), находим $y \circ x^{-1} = x^{-1} \circ y$, т.е. лупа $Q(\circ)$ – коммутативная лупа со свойством обратимости.

Заменяя в тождестве (4.13) x на $\varphi^{-1}x$ и учитывая равенство

$$\varphi^{-1}x = A(\varphi^{-1}x, \varphi^{-1}x) = \varphi(\varphi^{-1}x) \circ \psi(\varphi^{-1}x) = x \circ \psi(\varphi^{-1}x),$$

получим

$$(x \circ \psi(\varphi^{-1}x)) \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (\psi(\varphi^{-1}x) \circ z),$$

т.е.

$$(4.16) \quad (x \circ f(x)) \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (f(x) \circ z),$$

где $f(x) = \psi(\varphi^{-1}x)$. Поэтому

$$(x \circ y) \circ (f(x) \circ z) = (x \circ f(x)) \circ (z \circ y) = (x \circ z) \circ (f(x) \circ y),$$

т.е.

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ L_{f(x)}(z) &= (x \circ z) \circ L_{f(x)}(y), \\ (x \circ L_{f(x)}^{-1}(y)) \circ z &= (x \circ L_{f(x)}^{-1}(z)) \circ y, \\ L_x(L_{f(x)}^{-1}(y)) \circ z &= L_x(L_{f(x)}^{-1}(z)) \circ y, \end{aligned}$$

где $L_a(z) = a \circ z$, $L_a(L_a^{-1}(z)) = a \circ L_a^{-1}(z)$, $z = a \circ L_a^{-1}(z)$, $a^{-1} \circ z = a^{-1}(a \circ L_a^{-1}(z))$, $a^{-1} \circ z = L_a^{-1}(z)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (u \circ L_x(L_{f(x)}^{-1}(e))) \circ v &= (e \circ L_x(L_{f(x)}^{-1}(u))) \circ v \\ &= L_x(L_{f(x)}^{-1}(u)) \circ v = u \circ L_x(L_{f(x)}^{-1}(v)) \\ &= u \circ (e \circ L_x(L_{f(x)}^{-1}v)) = u \circ (L_x(L_{f(x)}^{-1}e) \circ v), \end{aligned}$$

т.е.

$$(4.17) \quad L_x(L_{f(x)}^{-1}e) = x \circ (f(x)^{-1} \circ e) = x \circ f(x)^{-1} \in K_Q$$

(в лупах со свойством обратимости все три ядра совпадают).

Исходя из доказанного включения и равенства (4.16), легко проверить муфанговость коммутативной лупы $Q(\circ)$:

$$\begin{aligned} x^2 \circ (y \circ z) &= (y \circ z) \circ x^2 \\ &= (y \circ z) \circ ((x \circ x) \circ (f(x) \circ f(x)^{-1})) \\ &= (y \circ z) \circ ((x \circ f(x)) \circ (x \circ f(x)^{-1})) \\ &= ((y \circ z) \circ (x \circ f(x))) \circ (x \circ f(x)^{-1}) \\ &= (x \circ f(x)) \circ (y \circ z) \circ (x \circ f(x)^{-1}) \\ &= ((x \circ y) \circ (f(x) \circ z)) \circ (x \circ f(x)^{-1}) \\ &= (x \circ y) \circ ((f(x) \circ z) \circ (x \circ f(x)^{-1})) \\ &= (x \circ y) \circ ((z \circ f(x)) \circ (x \circ f(x)^{-1})) \\ &= (x \circ y) \circ (z \circ (f(x) \circ (f(x)^{-1} \circ x))) \\ &= (x \circ y) \circ (z \circ x) = (x \circ y) \circ (x \circ z). \end{aligned}$$

Докажем включение $x \circ \varphi(x) \in K_Q$. Исходя из равенства (4.13), получим:

$$\begin{aligned} (x \circ (x^{-1} \circ \varphi^{-1}(x))) \circ (y \circ z) &= \varphi^{-1}x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (\psi(\varphi^{-1}x) \circ z) \\ &= (x \circ y) \circ ((\varphi^{-1}x \circ x^{-1}) \circ z) \\ &= (x \circ y) \circ ((x^{-1} \circ \varphi^{-1}x) \circ z), \end{aligned}$$

поскольку $\psi(x) = x \circ \varphi(x^{-1})$. Таким образом, мы пришли к равенству вида (4.16) с функцией $f(x) = x^{-1} \circ \varphi^{-1}(x)$. Согласно (4.17)

$$\begin{aligned} x^{-1} \circ f(x) &\in K_Q, \\ x^{-1} \circ (x^{-1} \circ \varphi^{-1}(x)) &= x^{-2} \circ \varphi^{-1}(x) \in K_Q. \end{aligned}$$

Однако $x^3 \in K_Q$ и, очевидно, K_Q инвариантно относительно автоморфизма φ , поэтому $x^3 \circ (x^{-2} \circ \varphi^{-1}x) \in K_Q$, $x \circ \varphi^{-1}(x) \in K_Q$, $\varphi(x) \circ x \in K_Q$.

Для завершения доказательства теоремы 4.3 остается показать, что в обратимой алгебре $(Q; \Sigma)$ со сверхтождествами (d_1) , (4.1) справедливо равенство $\circ_A = \circ_B$ для любых $A, B \in \Sigma$.

ЛЕММА 4.2. *Если $(Q; \Sigma)$ – обратимая алгебра со сверхтождеством (d_1) , тогда для любых $A, B \in \Sigma$ справедливо тождество*

$$(4.18) \quad x \circ_A B(y, z) = B(x \circ_A y, x \circ_A z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно сверхтождеству (d_1) имеем

$$A(x, B(y, z)) = B(A(x, y), A(x, z)),$$

поэтому

$$R_A x \circ_A L_A B(y, z) = B(R_A x \circ_A L_A y, R_A x \circ_A L_A z).$$

Поскольку L_A – автоморфизм алгебры $(Q; \Sigma)$ и лупы $Q(\circ_A)$, то этим же свойством обладает и подстановка L_A^{-1} :

$$\begin{aligned} L_A^{-1}(R_A x \circ_A L_A B(y, z)) &= L_A^{-1}B(R_A x \circ_A L_A y, R_A x \circ_A L_A z), \\ L_A^{-1}(R_A x) \circ_A B(y, z) &= B(L_A^{-1}(R_A x) \circ_A y, L_A^{-1}(R_A x) \circ_A z), \end{aligned}$$

т.е.

$$x \circ_A B(y, z) = B(x \circ_A y, x \circ_A z).$$

ЛЕММА 4.3. *Пусть $(Q; \Sigma)$ – обратимая алгебра со сверхтождествами (d_1) и (4.1), и пусть $A \in \Sigma$, $(\circ_A) = (\circ)$. Тогда подлупа лупы $Q(\circ)$, порожденная элементами $x, y, L_B(x)$, для любых $x, y \in Q$, $B \in \Sigma$, будет группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно равенству (4.18)

$$x \circ B(y, z) = B(x \circ y, x \circ z),$$

откуда при $x = z^{-1}$ (берется обратный элемент в лупе $Q(\circ)$) получаем

$$\begin{aligned} z^{-1} \circ B(y, z) &= B(z^{-1} \circ y, e) = R_B(y \circ z^{-1}), \\ B(y, z) &= R_B(y \circ z^{-1}) \circ z. \end{aligned}$$

Аналогично, при $x = y^{-1}$ имеем:

$$B(y, z) = L_B(z \circ y^{-1}) \circ y.$$

Следовательно,

$$R_B(y \circ z^{-1}) \circ z = L_B(z \circ y^{-1}) \circ y.$$

Полагая здесь $y = e$ и заменяя z на $z \circ y^{-1} = x$, получим:

$$\begin{aligned} R_B(y \circ z^{-1}) \circ (z \circ y^{-1}) &= L_B(z \circ y^{-1}), \\ R_B(y \circ z^{-1}) &= L_B(z \circ y^{-1}) \circ (z \circ y^{-1})^{-1}, \\ R_B(y \circ z^{-1}) \circ z &= (L_B(z \circ y^{-1}) \circ (z \circ y^{-1})^{-1}) \circ z, \\ L_B(z \circ y^{-1}) \circ y &= (L_B(z \circ y^{-1}) \circ (z \circ y^{-1})^{-1}) \circ z, \\ L_B(x) \circ (x^{-1} \circ z) &= (L_B(x) \circ x^{-1}) \circ z, \end{aligned}$$

т.е. для элементов $L_B(x), x^{-1}, z$ выполняется соотношение ассоциативности. Поэтому согласно теореме Муфанг [37], если в лупе Муфанг $Q(\circ)$ для трех ее элементов a, b, c выполняется равенство $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, тогда они порождают ассоциативную подлупу, т.е. группу. Следовательно, и $L_B(x), x, z$ порождают ассоциативную подлупу.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Если $(Q; \Sigma)$ – обратимая алгебра со сверхтождествами (d_1) и (4.1), тогда $(\circ_A) = (\circ_B)$ для любых $A, B \in \Sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\circ_B) = (\oplus), (\circ_A) = (\circ)$. Поскольку L_B – автоморфизм лупы $Q(\circ)$, то

$$B(y, z) = R_B y \oplus L_B z = L_B(z \circ y^{-1}) \circ y = (L_B(z) \circ (L_B y)^{-1}) \circ y,$$

откуда при $z = e$ получим $R_B y = (L_B y)^{-1} \circ y$. Применяя лемму 4.3 к элементам $y, L_B y$ и $L_B z$, получим:

$$\begin{aligned} R_B y \oplus L_B z &= (L_B z \circ (L_B y)^{-1}) \circ y = L_B z \circ ((L_B y)^{-1} \circ y) \\ &= L_B z \circ R_B y = R_B y \circ L_B z. \end{aligned}$$

Теорема 4.3 доказана.

ТЕОРЕМА 4.3'. В обратной алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняются сверхтождества (d_2) и (4.2) тогда и только тогда, когда существует коммутативная луна Муфанг $Q(\circ)$ такая, что каждая операция $A \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$A(x, y) = \varphi_A(x) \circ \psi_A(y),$$

где $\varphi_A, \psi_A \in \text{Aut } Q(\circ)$, $\psi_A \in \text{Aut } Q(A)$, $(\varphi_A, \tilde{\varepsilon}) \in \text{Aut}(Q; \Sigma)$, $\varphi_A(x) \circ \psi_A(x) = x$, $x \circ \varphi_A(x) \in K_Q$ для всех $A \in \Sigma$, $x, y \in Q$.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. В обратной алгебре $(Q; \Sigma)$ сверхтождества дистрибутивности (d_1) и (d_2) выполняются тогда и только тогда, когда существует коммутативная луна Муфанг $Q(\circ)$ такая, что каждая операция $A \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$A(x, y) = \varphi_A(x) \circ \psi_A(y),$$

где $\varphi_A, \psi_A \in \text{Aut } Q(\circ)$, $(\varphi_A, \tilde{\varepsilon}), (\psi_A, \tilde{\varepsilon}) \in \text{Aut}(Q; \Sigma)$, $\varphi_A(x) \circ \psi_A(x) = x$, $x \circ \varphi_A(x) \in K_Q$ для всех $A \in \Sigma$, $x, y \in Q$.

Вопрос характеристики q -алгебр со сверхтождествами (d_1) , (4.1) (или (d_2) , (4.2)) остается еще открытым (о характеристике q -алгебр со сверхтождествами (d_1) , (d_2) см. в [9]). Однако в связи с теоремами 1.1, 1.2 представляет естественный интерес и решение следующих задач: охарактеризовать обратимые справа (слева) алгебры со сверхтождеством левой (правой) дистрибутивности (d_1) (соответственно (d_2)); охарактеризовать обратимые справа (слева) алгебры со сверхтождествами (d_1) , $X(x, x) = x$ (соответственно (d_2) , $X(x, x) = x$).

В заключение сформулируем ряд результатов вытекающих из теорем 4.3, 4.3' и следствия 4.6 (с использованием предложения 1.2).

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Если в обратной алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняются сверхтождества (d_1) , (4.1) (или (d_2) , (4.2), или (d_1) , (d_2)), тогда и в алгебре $(Q; \Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup^{-1} \Sigma)$ выполняются эти сверхтождества.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Если в обратной алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняются сверхтождества (d_1) , (4.1) (или (d_2) , (4.2), или (d_1) , (d_2)), тогда и в алгебре $(Q; \Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup^{-1} \Sigma \cup^{-1} (\Sigma^{-1}) \cup (-^1 \Sigma)^{-1} \cup \Sigma^*)$ выполняются эти сверхтождества.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Обратимая алгебра со сверхтождествами (d_1) , (4.1) будет абелевой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет сверхтождеству (d_2) , а соответствующая коммутативная луна Муфанг (из теоремы 4.3) удовлетворяет тождеству ассоциативности, т.е. является коммутативной группой.

СЛЕДСТВИЕ 4.9'. Обратимая алгебра со сверхтождествами (d_2) , (4.2) будет абелевой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет сверхтождеству (d_1) , а соответствующая коммутативная луна Муфанг (из теоремы 4.3') удовлетворяет тождеству ассоциативности.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. Обратимая алгебра $(Q; \Sigma)$ со сверхтождествами дистрибутивности (d_1) , (d_2) будет абелевой тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество

$$A(B(x, y), B(z, u)) = B(A(x, z), A(y, u))$$

для некоторых $A, B \in \Sigma$.

СЛЕДСТВИЕ 4.11. Если в обратимой алгебре $(Q; \Sigma)$ со сверхтождествами дистрибутивности (d_1) , (d_2) выполняется соотношение

$$A(B(a, b), B(c, d)) = B(A(a, c), A(b, d))$$

для некоторых $a, b, c, d \in Q$, $A, B \in \Sigma$, тогда обратимая подалгебра алгебры $(Q; \Sigma)$, порожденная элементами a, b, c, d , будет абелевой.

СЛЕДСТВИЕ 4.12. В обратимой алгебре со сверхтождествами дистрибутивности (d_1) , (d_2) обратимая подалгебра, порожденная любыми тремя ее элементами, абелева.

Об обобщениях сверхтождеств см. в [62]–[67].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чёрч А. Введение в математическую логику. Т. 1. М.: ИЛ, 1961.
- [2] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
- [3] Мальцев А. И. Некоторые вопросы теории классов моделей // Труды IV Всесоюзного математического съезда. Т. 1, 1963. С. 169–198.
- [4] Кейслер Г., Чэн Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
- [5] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
- [6] Мальцев А. И. Модельные соответствия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 3. С. 313–336.
- [7] Henkin L. Some interconnections between modern algebra and mathematical logic // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. № 3. P. 410–427.
- [8] Мовсисян Ю. М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1986.
- [9] Мовсисян Ю. М. Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1990.
- [10] Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами // УМН. 1965. Т. 20. № 1. С. 75–146.
- [11] Мовсисян Ю. М. К теореме Шауфлера // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 84–93.
- [12] Schaufler R. Die Assoziativität im Ganzen besonders bei Quasigruppen // Math. Z. 1957. V. 67. № 5. P. 428–435.
- [13] Denes J., Keedwell A. D. Latin Squares and Their Applications. Budapest: Akademiai Kiado, 1974.
- [14] Taylor W. Hyperidentities and hypervarieties // Aequationes Math. 1981. V. 23. P. 30–49.
- [15] Neumann W. D. Mal'cev conditions, spectra and Kronecker product // J. Austral. Math. Soc. 1978. V. 25. P. 103–117.
- [16] Schröder E. Über eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen // J. Reine Angew. Math. 1881. V. 90. P. 189–220.
- [17] Schröder E. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig, 1873.
- [18] Мовсисян Ю. М. Мультипликативная группа поля и сверхтождества // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 5. С. 1040–1055.
- [19] Senft J. R. On weak automorphisms of universal algebras // Dissertationes Math., Rozprawy Mat. V. 74, 1970.
- [20] Sichler J. Weak automorphisms of universal algebras // Algebra Universalis. 1973. V. 3. P. 1–7.
- [21] Мовсисян Ю. М. Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр // Изв. АН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 127–168.
- [22] Мовсисян Ю. М. Сверхтождества булевых алгебр // Изв. АН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 3. С. 654–672.

- [23] Moufang R. Zur structure von Alternativ Körpern // Math. Ann. 1935. V. 110. P. 416–430.
- [24] Denecke K., Lau D., Pöschel R., Schweigert D. Free clones and solid varieties // General Algebra and Discrete Mathematics. V. 21. Lemgo: Heldermann-Verlag. Res. Exposition Math., 1995. P. 59–81.
- [25] Graczynska E., Schweigert D. Hyperidentities of a given type // Algebra Universalis. 1990. V. 27. P. 305–318.
- [26] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
- [27] Dicker R. M. A set of independent axioms for a field and a condition for a group to be the multiplicative group of a field // Proc. London Math. Soc. 1968. V. 18. P. 114–124.
- [28] Grätzer G. A theorem on doubly transitive permutation groups with application to universal algebras // Fund. Math. 1963. V. 53. P. 25–41.
- [29] Скорняков Л. А. Стохастическая алгебра // Изв. вузов. Матем. 1985. №7. С. 3–11.
- [30] Romanowska A. B., Smith J. D. H. Modal Theory. Berlin: Heldermann-Verlag, 1985.
- [31] Neuman W. D. On the quasivariety on convex subsets of affine spaces // Arch. Math. 1970. V. 21. P. 11–16.
- [32] Higgins P. J. Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6. P. 366–416.
- [33] Segre C. Un nuovo campo di ricerche geometriche // Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1889. V. 25. P. 276–301.
- [34] Jacobson N. Normal semi-linear transformations // Amer. J. Math. 1939. V. 61. P. 45–58.
- [35] Marczewski E. A general scheme of the notions of independence in mathematics // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 1958. V. 6. P. 731–736.
- [36] Goetz A. On weak isomorphisms and weak homomorphisms of abstract algebras // Colloq. Math. 1966. V. 14. P. 163–167.
- [37] Traczyk T. Weak isomorphisms of Boolean and Post algebras // Colloq. Math. 1965. V. 13. P. 159–164.
- [38] Glazek K. Weak automorphisms of general algebras and related topics // Math. Seminar Notes. 1980. V. 8. P. 1–36.
- [39] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
- [40] Kalman J. A. Subdirect decomposition of distributive quasilattices // Fund. Math. 1971. V. 71. P. 161–163.
- [41] Мовсисян Ю. М., Бархударян А. Г. О сверхмногообразии QВ-алгебр // Ученые записки ЕГУ. 1996. №2. С. 16–24.
- [42] Padmanabhan R., Penner P. Bases of hyperidentities of lattices and semilattices // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1982. V. 4. P. 9–14.
- [43] Padmanabhan R., Penner P. Binary hyperidentities of lattices // Aequationes Math. 1992. V. 44. P. 154–167.
- [44] Bergman G. M. Hyperidentities of groups and semigroups // Aequationes Math. 1981. V. 23. P. 50–65.
- [45] Slominski J. On the satisfiabilities and varieties for abstract algebras induced by the cones and functor dynamics // Demonstratio Math. 1993. V. 26. №1. P. 11–22.
- [46] Polak L. On hyperassociativity // Algebra Universalis. 1996. V. 36. P. 363–378.
- [47] Denecke K., Pöschel R. The characterization of primal algebras by hyperidentities // Preprint. Berlin: Karl-Weierstrass-Institut Für Mathematik, 1988.
- [48] Mal'cev I. A., Schweigert D. Hyperidentitäten von QZ-algebren // Preprint. Kaiserslautern: Fachbereich Mathematik Universität Kaiserslautern, 1989.
- [49] Graczynska E. Connections between identities and hyperidentities // Bull. Sect. Logik Univ. Łódź. 1988. V. 17. P. 34–41.
- [50] Penner P. Hyperidentities of semilattices // Houston J. Math. 1984. V. 10. P. 81–108.
- [51] Plonka J. On hyperidentities of some varieties // General Algebra and Discrete Mathematics. V. 21. Lemgo: Heldermann-Verlag. Res. Exposition Math., 1995. P. 199–213.
- [52] Plonka J., Szylicka Z. Proper hypersubstitutions of the join of independent varieties // Discuss. Math. Algebra Stochastic Methods. 1995. V. 15. №1. P. 127–134.

- [53] Денеке К., Мальцев И. А., Решке М. О разделимости булевых клонов гипертожествами // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36. № 5. С. 1049–1066.
- [54] Bruck R. H. Contributions to the theory of loops // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V. 60. P. 245–354.
- [55] Albert A. A. Quasigroups. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. V. 54. P. 507–519.
- [56] Sade A. Groupoïdes en relation associative et semigroupes mutuellement associatifs // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1. 1960. V. 74. P. 91–99.
- [57] Чупона Г. За финитарните операции // Годишен зб. ун-т Скопје, Природноматем-фак. (1959–1961). Т. 12. С. 7–49.
- [58] Aczel J. Proof of a theorem on distributive type hyperidentities // Algebra Universalis. 1971. V. 1. P. 1–6.
- [59] Чупона Г. За релацијата дистрибутивности меѓу алгебарските операции // Годишен зб. ун-т Скопје, Природноматем-фак. (1956–1958). Т. 9. С. 23–29.
- [60] Stein S. K. On the foundation of quasigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 85. P. 228–256.
- [61] Bruck R. H. A Survey of Binary Systems (3rd printing, corrected). Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [62] Мелконян В. Г. Квазитождества и условные сверхтождества дистрибутивных решеток // Докл. АН Армении. 1993. Т. 94. № 4. С. 195–199.
- [63] Graczyńska E., Pöschel R., Volkov M. V. Solid pseudovarieties // General Algebra and Applications in Discrete Mathematics. Aachen: Shaker-Verlag, 1997. P. 93–100.
- [64] Szylicka Z. Weak hyperidentities of varieties // General Algebra and Applications in Discrete Mathematics. Aachen: Shaker-Verlag, 1997. P. 189–203.
- [65] Welke D. Hyperidentitäten partieller Algebren // Dissertation, Universität Potsdam, 1996.
- [66] Denecke K., Glazek K. M -solid varieties and Q -free clones // Math. Slovaca. 1996. V. 46. № 5. P. 515–524.
- [67] Arworn S., Denecke K. Groupoids of hypersubstitutions and G -solid varieties // General Algebra and Applications in Discrete Mathematics. Aachen: Shaker-Verlag, 1997. P. 5–22.

Ереванский государственный университет
E-mail: movsisyan@ysu.am

Поступила в редакцию
 30.01.1997