Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, С. П. Новиков, Преобразования Лапласа и симплициальные связности, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:37:19

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ

И. А. Дынников, С. П. Новиков

В работе [1] были построены аналоги преобразований Лапласа для операторов на дискретной решетке $\mathbb{Z}^2$ и указано, что для этого необходимо рассматривать *правильную треугольную решетку*, порожденную базисными сдвигами T_1, T_2 , такими что $|T_1| = |T_2| = |T_1 T_2^{-1}|$. Каждая вершина взаимодействует с шестью равноудаленными ближайшими соседями. Определение дискретного преобразования Лапласа и обозначения смотри в [1], [2].

Как замечено в [1], правильная треугольная решетка имеет шесть равноправных базисов, что дает нам три пары взаимнообратных преобразований Лапласа. *Слабой эквивалентностью* мы назовем преобразование оператора $L \mapsto fLf$, где f — не обращающаяся в нуль функция на решетке $\mathbb{Z}^2$. Преобразование Лапласа корректно определено на классах слабой эквивалентности [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для базисов, отличающихся поворотом на угол $2\pi/3$, соответствующие преобразования Лапласа на классах слабой эквивалентности сопряжены с помощью сдвига на вектор решетки $\mathbb{Z}^2$.*

Таким образом, алгебра преобразований Лапласа на правильной решетке сводится (с точностью до слабой эквивалентности и сдвигов) к двум взаимно обратным преобразованиям. Эти два преобразования можно описать по-другому.

Раскрасим треугольники, составляющие решетку, в шахматном порядке: треугольники вида $\langle n, n + T_1, n + T_2 \rangle$ покрасим в черный цвет, а $\langle n, n - T_1, n - T_2 \rangle$ — в белый. Пусть V_1, V_2, V_3 — пространства функций от вершин, черных треугольников и белых треугольников соответственно. *Ближайшими соседями* будем называть две вершины, если они соединены ребром, или два треугольника одного цвета, если они имеют общую вершину. *Оператором 2-го порядка на V_i* мы назовем оператор $L: V_i \rightarrow V_i$, ненулевые внедиагональные матричные элементы которого соответствуют парам ближайших соседей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Самосопряженный оператор $L: V_i \rightarrow V_i$ допускает представление в виде $L = Q_{ji}Q_{ji}^+ + w$, где $i \neq j$, $Q_{ji}: V_j \rightarrow V_i$ — оператор, ненулевые матричные элементы которого соответствуют в зависимости от i и j либо паре треугольников разного цвета, имеющих общее ребро, либо паре — треугольник и его вершина. Преобразование Лапласа $L \mapsto \tilde{L} = Q_{ji}^+ w^{-1} Q_{ji} + 1$ совпадает (на классах слабой эквивалентности) с введенным ранее преобразованием Лапласа на правильной треугольной решетке при надлежащем отождествлении пространств V_i и V_j .*

Такое преобразование Лапласа сопоставляет оператору на V_i оператор на V_j , задавая гомоморфизм нулевых уровней: $\psi \mapsto Q_{ji}^+ \psi$.

Пусть M — произвольная двумерная поверхность с триангуляцией и черно-белой раскраской треугольников, такой, что любые два примыкающих по ребру треугольника имеют разные цвета. Пространства V_1, V_2, V_3 и отношение ближайшего соседства определим как и ранее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если триангуляция поверхности M имеет только четырех- и шестикратные вершины, то самосопряженные операторы второго порядка на V_i , $i = 1, 2, 3$, допускают факторизацию и преобразования Лапласа так же, как и в случае правильной решетки на плоскости. Однако, если триангуляция имеет четырехкратные вершины, то факторизации операторов на V_2 и V_3 неоднозначны, причем степень неоднозначности определяется числом четырехкратных вершин.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Если триангуляция поверхности M имеет вершины кратности > 6 , то оператор Шрёдингера на черных (белых) треугольниках факторизуется только при выполнении дополнительных условий, причем условия факторизации “через вершины” и “через белые (соответственно, черные) треугольники” несовместимы. Подробнее см. в обзоре [4].

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

Пусть K – произвольный симплициальный комплекс. Симплексы размерности l будем обозначать через σ^l . Зафиксируем некоторые $k < l$. Два симплекса σ_1^l и σ_2^l будем называть *ближайшими*, если их пересечение содержит некоторый симплекс σ^k . Пусть L – оператор Шрёдингера, действующий на функции от l -симплексов так, что взаимодействуют только ближайшие соседи. *Векторной факторизацией оператора L с помощью k -симплексов* мы называем представление L в виде: $L = \sum_{\alpha=1}^m Q^\alpha (Q^\alpha)^+ + w$, где w – оператор умножения на функцию, $Q^+ = ((Q^1)^+, \dots, (Q^m)^+)$ – оператор на функциях от l -симплексов со значениями в m -вектор-функциях от k -симплексов:

$$(1) \quad (Q^+ \psi)_{\sigma^k}^\alpha = \sum_{\sigma^l \supset \sigma^k} b_{\sigma^k; \sigma^l}^\alpha \psi_{\sigma^l}.$$

Факторизацию оператора L назовем *специальной*, если $w = \text{const}$. Векторной факторизации соответствует преобразование типа Лапласа: $L \mapsto \tilde{L} = Q^+ w^{-1} Q + 1$, которое сопоставляет оператору L оператор $\tilde{L}$ на вектор-функциях от k -симплексов.

Аналогичным образом можно определить факторизацию оператора, действующего на l -симплексах, с помощью k -симплексов в случае $k > l$: будем считать два l -симплекса ближайшими соседями, если они содержатся в некотором k -симплексе.

В качестве примера рассмотрим *решетку правильных тетраэдров* в $\mathbb{R}^3$: в качестве базиса T_1, T_2, T_3 решетки $\mathbb{Z}^3$ возьмем векторы, соединяющую некоторую вершину правильного тетраэдра в $\mathbb{R}^3$ с остальными вершинами. Рассмотрим комплекс K , составленный из тетраэдров, полученных из данного всевозможными сдвигами на векторы решетки $\mathbb{Z}^3$. Пусть оператор L действует на решетке $\mathbb{Z}^3$, причем взаимодействуют только вершины, соединенные ребром.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Скалярная факторизация оператора L с помощью 3-симплексов комплекса K возможна тогда и только тогда, когда для каждого тетраэдра из K произведения коэффициентов связности, сидящих на противоположащих ребрах, совпадают. Специальная m -векторная факторизация L с помощью 3-симплексов возможна при любом $m > 1$, и притом неоднозначна.*

Отыскание основных состояний операторов Шрёдингера на l -симплексах в ряде случаев сводится к решению системы уравнений $Q^+ \psi = 0$, где оператор Q^+ имеет вид (1). Такую систему уравнений мы назовем *симплициальной связностью*, если она удовлетворяет *требованию невырожденности и требованию локальности*, определение которых смотри в обзоре [4]. Условия локальной совместности такой системы приводит к дискретным аналогам кривизны.

Примером симплициальной связности являются *уравнения треугольника*, рассмотренные в [3]. Их обобщением является *уравнение тетраэдров* в $\mathbb{R}^3$:

$$(2) \quad Q_1 \psi = 0, \quad Q_2^+ \psi = 0, \quad \text{где} \quad Q_{1,2} = 1 + x_{1,2} T_1 + y_{1,2} T_2 + z_{1,2} T_3.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Условием полной локальной совместности системы (2) является соотношение $(Q_1 - 1)(Q_2^+ - 1) - 1 = f((Q_2^+ - 1)(Q_1 - 1) - 1)$, где f – некоторая функция на $\mathbb{Z}^3$.*

Другие примеры симплициальных связностей и дискретных аналогов преобразования Лапласа см. в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Novikov S. P. Appendix I in Novikov S. P., Veselov A. P. // Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 109–132. [2] Новиков С. П. // УМН. 1997. Т. 52. № 1. С. 225–226. [3] Novikov S. P. Difference 2D Schrödinger operators: Algebraic symmetry and exact solvability // Preprint. Paris: Univ. Paris-VII, April 1997. [4] Новиков С. П., Дынников И. А. // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175–234.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
University of Maryland at College Park
E-mail: dynnikov@mech.math.msu.su novikov@ipst.umd.edu

Принято редколлегией
03.10.1997