Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, Об одной проблеме О. А. Олейник, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:40:50

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ О.А. ОЛЕЙНИК

Ю. В. ЕГОРОВ, В. А. КОНДРАТЬЕВ

Рассмотрим решение уравнения $\Delta u(x) = 0$ в цилиндре

$$Q = \{x = (x', x_n), x' \in \Omega, 0 < x_n < \infty\},$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с гладкой границей Γ , удовлетворяющее граничному условию

$$(1) \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + u(x)|u(x)|^{p-1} = 0, \quad p > 1, \quad x \in \Gamma \times (0, \infty),$$

где ν – направление внешней нормали к Γ .

ТЕОРЕМА 1. *Существуют положительные постоянные a и b такие, что если $|u(x)| \leq ae^{bx_n}$, то $u(x) \rightarrow 0$ при $x_n \rightarrow \infty$.*

Эта теорема отвечает на вопрос, поставленный академиком О.А. Олейник.

Рассмотрим также решение $v(x)$ того же уравнения, но с краевым условием

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} - v|v|^{p-1} = 0, \quad p > 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $v(x) \geq 0$ в Q , то $v(x) \equiv 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $S_T = \Gamma \times [0, T]$.

Если $|u(x)| \leq ae^{bx_n}$, то

$$I(T) = \int_{Q_T} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{S_T} |u(x)|^{p+1} dx \leq C_1 e^{2bT} + C_2 e^{(p+1)bT}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{Q_T} u \Delta u dx = 0.$$

После интегрирования по частям получаем, что $I(T) \leq c_1 + c_2 I'(T)$. Отсюда следует, что либо $I(T) \leq c$, либо $I(T) \geq c + C_1 e^{c_2 T}$. Так как последнее невозможно, если $b(p+1) < c_2$, получаем, что $I(T) \leq c$.

Докажем, что u ограничена. Пусть $\max_{x_n=0} |u(x)| = M$. Рассмотрим функцию $w(x) = \max(0, u(x) - M)$. Пусть $\theta(x_n) = 1$ при $0 < x_n < T$, $\theta(x_n) = 0$ при $2T < x_n$, θ – линейная функция на $[T, 2T]$, $\theta(x_n)$ непрерывна при $x_n > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int_Q \theta(x_n) w(x) \Delta w(x) dx = 0.$$

После интегрирования по частям и стандартных оценок, получаем, что $\nabla w(x) = 0$ и, следовательно, $w(x) \equiv 0$. Таким образом, $u(x) < M$ в Q . Аналогично доказывается, что $u(x) > -M$ в Q .

Используя теорему 8.17 из работы [1], можно доказать, что

$$\max_{Q_{T+1} \setminus Q_T} |u|^2 \leq C \int_{Q_{T+2} \setminus Q_{T-1}} u(x)^2 dx.$$

Так как

$$\int_{Q_{T+2} \setminus Q_{T-1}} u(x)^2 dx \leq C_1 \int_{Q_{T+2} \setminus Q_{T-1}} |\nabla u(x)|^2 dx + C_1 \int_{S_{T+2} \setminus S_{T-1}} |u(x)|^{p+1} dS,$$

и интегралы в правой части стремятся к 0 при $T \rightarrow \infty$, то теорема доказана.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 960100504).

СЛЕДСТВИЕ. Если два решения уравнения $\Delta u = 0$ удовлетворяют краевому условию (1) на боковой поверхности цилиндра и оценке $|u(x)| \leq ae^{bx_n}$ с постоянными a, b , зависящими от Ω , и совпадают при $x_n = 0$, то они совпадут в Q .

Следующий пример показывает, что ограничение на рост решения существенно. Пусть $n = 2$ и $Q = \{(x_1, x_2) : -2\pi < x_1 < 2\pi, 0 < x_2 < \infty\}$, $u(x_1, x_2) = e^{x_2} \sin x_1 - e^{x_2/4} \sin(x_1/4)$. Легко видеть, что u — гармоническая функция в Q и $\frac{\partial u}{\partial \nu} + u|u|^3 = 0$ при $x_1 = \pm 2\pi$.

Асимптотика решений u , удовлетворяющих (1) и стремящихся к 0 при $x_n \rightarrow \infty$, исследовалась в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из принципа максимума следует, что $v(x) > 0$ при $x_n > 0$ или $v(x) \equiv 0$. В первом случае $v(x) \geq \min_{x_n=\delta} v(x) = k > 0$ при $x_n > \delta > 0$. Следовательно, на границе цилиндра при $x_n > \delta$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} - k^{p-1}v \geq 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_Q \theta(x_n) \frac{\Delta v(x)}{v(x)} dx = 0,$$

где $\theta(x_n) = 1$ при $\delta < x_n < T - 1$, $\theta(x_n) = 0$ при $T < x_n$ и при $x_n > \delta$, θ — гладкая функция при $x_n < \delta$. После интегрирования по частям, используя неравенство $|\nabla \theta(x_n)|^2 \leq C\theta(x_n)$ при $x_n > \delta$ и устремляя T к бесконечности, получаем, что $|\nabla v(x)| = 0$, а значит, и $v(x) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1977. [2] Кондратьев В. А. // Труды сем. им. И. Г. Петровского 1997. № 19.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
12.11.1997