Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Калашников, О начальном скачке свободной границы в краевой задаче для полулинейного уравнения теплопроводности с поглощением, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:18:00

**О НАЧАЛЬНОМ СКАЧКЕ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ
В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОГЛОЩЕНИЕМ**

А. С. КАЛАШНИКОВ

1. Постановка вопроса. В [1] исследовались свойства решения $u(x, y) \geq 0$ задачи Дирихле для уравнения $\Delta u - u^p = 0$ ($0 < p < 1$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < +\infty$) с условиями $u(x, 0) = 1$ при $x > 0$, $u(x, 0) = 0$ при $x < 0$. Было установлено, что так называемая свободная граница, описываемая функцией $\eta(y) = \inf\{x \mid u(x, y) > 0\}$, локализована, т.е. $\inf\{\eta(y) \mid 0 < y < +\infty\} > -\infty$, и обладает скачком при $y = 0$, т.е. $\sup\{\eta(y) \mid 0 < y < y_*\} < 0$ при достаточно малом $y_* > 0$.

Ниже доказывается, что при определенных предположениях аналогичные эффекты имеют место также в первой краевой задаче для полулинейного уравнения теплопроводности с поглощением.

2. Формулировка результатов. Рассмотрим в четверти плоскости $Q = \{(x, t) \mid 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty\}$ уравнение

$$(1) \quad Au \equiv D_t u - D_x^2 u + g(x, t)|u|^p \operatorname{sgn} u = 0$$

с условиями

$$(2) \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty; \quad u(0, t) = f(t), \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Здесь

$$(3) \quad 0 < p < 1, \quad f \in C^1([0, +\infty)), \quad g \in C^1(\overline{Q})$$

и существуют такие функции $f_i(t)$, $g_i(t)$ ($i = 0, 1$), что

$$(4) \quad f_0(t) \leq f(t) \leq f_1(t) \quad \forall t \in [0, +\infty); \quad f_i \in C^1([0, +\infty)) \cap L_\infty([0, +\infty)), \\ f_i(t) > 0 \quad \forall t > 0, \quad f_i(0) = 0 \quad (i = 0, 1); \quad D_t f_1(t) \geq 0;$$

$$(5) \quad g_0(t) \leq g(x, t) \leq g_1(t) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}; \quad g_i \in C^1([0, +\infty)) \cap L_\infty([0, +\infty)), \\ g_i(t) > 0 \quad \forall t > 0, \quad g_i(0) = 0 \quad (i = 0, 1); \quad D_t g_1(t) \geq 0.$$

Как известно из теории параболических уравнений, при предположениях (3)–(5) существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), принадлежащее $C_{x,t}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ и ограниченное при ограниченных t . По принципу максимума $0 \leq u(x, t) \leq \sup f_1 \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}$. Для каждого $t \in [0, +\infty)$ положим $\zeta(t) = \sup\{x \mid u(x, t) > 0\}$. Будут доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1 (о локализации). *Если наряду с предположениями (3)–(5) выполняется соотношение $\frac{f_1(t)}{g_0(t)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0)$, то*

$$\sup\{\zeta(t) \mid 0 < \delta \leq t < +\infty\} < +\infty \quad \forall \delta > 0.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00165).

ТЕОРЕМА 2 (о начальном скачке). Пусть наряду с предположениями (3)-(5) выполняются соотношения $f_0(t) \geq k \operatorname{Erfc}(\mu_0 t^{-\alpha})$ при $0 < t \leq t_0$, $\int_0^t [f_1(s)]^p g_1(s) ds / \operatorname{Erfc}(\mu_1 t^{-\alpha}) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$), где $\alpha > 1/2$, $\mu_1 > \mu_0 > 0$, $k > 0$, $t_0 > 0$. Тогда существует такое $t_* > 0$, что $\inf\{\zeta(t) \mid 0 < t < t_*\} > 0$.

Здесь использовано обозначение $\operatorname{Erfc}(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} \exp(-s^2) ds$.

Эффект локализации для различных нелинейных уравнений изучался во многих работах: см., например, [2], [3], где можно найти дальнейшие ссылки. Наша теорема 1 относится к случаю, который, по-видимому, ранее не исследовался: ответственный за локализацию младший член уравнения (1) обращается в тождественный нуль при $t = 0$. По этой причине удалось доказать локализацию только для значений t , отделенных от нуля.

Основным результатом настоящей заметки является теорема 2. Насколько известно автору, в существующей литературе нет публикаций об условиях начального скачка свободной границы в нестационарных краевых задачах. Гипотеза о возможности такого эффекта была высказана Г. И. Баренблаттом, обратившим внимание автора на желательность изучения этого вопроса.

Излагаемые результаты допускают обобщение на более широкие классы уравнений, содержащие (1) как частный случай.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\beta > 0$, $\gamma \in (0, \beta(1-p))$, $\omega = 2/(1-p)$, $G(t) = \int_0^t g_0(s) ds$, $\tau_1 > 0$ таково, что $G(\tau_1) < 1/2$. Рассмотрим функцию $U(x, t) = 2f_1(t)(1+x)^{-\beta} \times [1 - G(t)(1+x)^{\gamma}]_+^{\omega}$, где $\xi_+ = \max\{\xi, 0\}$. Сравним $u(x, t)$ и $U(x, t)$ в $\overline{Q}_{\tau}$, где $Q_{\tau} = (0, +\infty) \times (0, \tau]$, а $\tau > 0$ будет выбрано позже. Легко видеть, что $u \leq U$ на $\overline{Q}_{\tau} \setminus Q_{\tau}$, если $\tau \leq \tau_1$. Для $(x, t) \in Q_{\tau}$ находим $\mathcal{A}U(x, t) \geq g_0(t)[U(x, t)]^p \{1 - M[(f_1(t))^{1-p} + f_1(t)/g_0(t)]\}$, где $M = \operatorname{const} > 0$. Поэтому существует такое $\tau_2 > 0$, что $\mathcal{A}U \geq 0$ в Q_{τ} , если $\tau \leq \tau_2$. Возьмем $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$. Применив принцип сравнения, получим, что $u \leq U$ в $\overline{Q}_{\tau}$. Следовательно, $\sup\{\zeta(t) \mid 0 < \delta \leq t \leq \tau\} < [G(\delta)]^{-1/\gamma} < +\infty \quad \forall \delta \in (0, \tau)$. В силу известных теорем о локализации (см., например, [4]) отсюда вытекает, что $\sup\{\zeta(t) \mid \tau \leq t < +\infty\} < +\infty$, поскольку $\inf\{g(x, t) \mid (x, t) \in Q \setminus Q_{\tau}\} > 0$.

4. Доказательство теоремы 2. По принципу сравнения $u(x, t) \leq f_1(t) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}$. Положим $w(x, t) = k \operatorname{Erfc}[\mu_0 t^{-\alpha}(1+x)]$, $z(t) = \int_0^t [f_1(s)]^p g_1(s) ds$, $v(x, t) = w(x, t) - z(t)$ для $t > 0$, $v(x, 0) = 0$. Сравним $u(x, t)$ и $v(x, t)$ в $\overline{Q}_{\tau}$, где $0 < \tau \leq t_0$. Находим $u(x, t) \geq v(x, t) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_{\tau} \setminus Q_{\tau}$. Для $(x, t) \in Q_{\tau}$ получаем $(D_t - D_x^2)(u-v) = -gu^p + f_1^p g_1 + k\mu_0 t^{-3\alpha}(1+x) \times (2\mu_0^2 - \alpha t^{2\alpha-1}) \exp[-\mu_0^2 t^{-2\alpha}(1+x)^2] \geq 0$, если $\tau \leq t_1 = (2\mu_0^2/\alpha)^{1/(2\alpha-1)}$. Следовательно, $u(x, t) \geq w(x, t)[1 - z(t)/w(x, t)] \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_{\tau}$, если $\tau \leq \min\{t_0, t_1\}$.

Положим $x_* = \mu_1/\mu_0 - 1$. По условию существует такое $t_* > 0$, что $z(t)/w(x_*, t) < 1$ при $0 < t < t_*$. Тем самым установлено, что $u(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in (0, x_*) \times (0, t_*)$. Это позволяет заключить, что $\zeta(t) \geq x_* \quad \forall t \in (0, t_*)$.

5. Пример. Пусть $f(t) = \operatorname{Erfc}(1/t)$, $g(x, t) = g(t) = t^{-1/2} \operatorname{Erfc}(1/t)$ при $t > 0$, $f(0) = g(0) = 0$. Тогда можно считать, что $f_i(t) \equiv f(t)$, $g_i(t) \equiv g(t)$ ($i = 0, 1$). Легко видеть, что выполняются условия обеих теорем при следующих значениях параметров: $k = \alpha = \mu_0 = 1$, $\mu_1 = (1 + p_1)^{1/2}$, где $0 < p_1 < p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Duijn C. J. van, Peletier L. A. // J. Reine Angew. Math. 1992. V. 432. P. 1-21.
 [2] Калашников А. С. // УМН. 1987. Т. 42. № 2. С. 135-176. [3] Antontsev S., Diaz J. I., Shmarev S. // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 1995. V. 4. № 1. P. 5-30. [4] Diaz J. I., Veron L. // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 20. № 2. P. 787-814.