Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Ковалев, О сведениях инстантонов Янга–Миллса к уравнениям Нама, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:02:00

О СВЕДЕНИИ ИНСТАНТОНОВ ЯНГА–МИЛЛСА К УРАВНЕНИЯМ НАМА

А. Г. КОВАЛЕВ

1. Пусть P – главное G -расслоение над ориентируемым римановым 4-многообразием X с компактной полупростой группой G . Связности в P образуют аффинное пространство на линейном пространстве дифференциальных 1-форм $\Omega^1(\text{ad } P)$ со значениями в расслоении алгебр Ли, ассоциированном с P . Кривизна связности $\mathbf{A}$ выражается дифференциальной 2-формой $F(\mathbf{A}) = d\mathbf{A} + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}] \in \Omega^2(\text{ad } P)$. Связность $\mathbf{A}$ *антиавтотодуальна*, если ее кривизна удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad *F(\mathbf{A}) = -F(\mathbf{A}),$$

где $*$ – оператор Ходжа, действующий на 2-формах на X . Антиавтотодуальные связности над компактной базой реализуют минимум для функционала Янга–Миллса

$$(2) \quad \mathcal{YM}(\mathbf{A}) = \int_X -\text{Tr}(F(\mathbf{A}) \wedge *F(\mathbf{A})) = \int_X |F(\mathbf{A})|^2 dV.$$

Над некомпактной базой X действие Янга–Миллса (2), разумеется, может быть бесконечным. Нас будут интересовать *инстантонные* связности над X , т.е. антиавтотодуальные связности с квадратично-интегрируемой кривизной, рассматриваемые с точностью до *калибровочных преобразований*, или автоморфизмов расслоения P , проектирующихся в id_X .

Рассмотрим некомпактное полное риманово 4-многообразие X (без края), содержащее цилиндр $\mathbb{R}_+ \times Y$, где Y – замкнутое 3-многообразие. Тогда для любой связности $\mathbf{A}$ над X существует “временная калибровка”, изоморфизм расслоений $P|(\mathbb{R}_+ \times Y) \cong \mathbb{R}_+ \times (P|Y)$, зависящий от $\mathbf{A}$, такой что ограничение $\mathbf{A}$ на $\mathbb{R}_+ \times Y$ отождествляется с семейством связностей $A(t)$ над 3-многообразием Y . Условие антиавтотодуальности (1) для $A(t)$ принимает форму эволюционного уравнения

$$(3) \quad \dot{A} = -*_3 F(A),$$

где $*_3$ – оператор Ходжа на Y . Уравнение (3) является “бесконечномерным градиентным потоком” функционала Чженя–Саймонса на пространстве связностей над Y . Хорошо известно (см., например, [4]), что антиавтотодуальные связности с квадратично-интегрируемой кривизной и только они порождают семейства $A(t)$, $t \geq 0$, над Y , удовлетворяющие уравнению потока (3) и сходящиеся (в C^∞) к критическим точкам функционала Чженя–Саймонса при $t \rightarrow \infty$. Множество критических точек состоит из всех плоских G -связностей на $P|_{Y \times \text{pt}}$ и изоморфно *многообразию характеров* $\chi(Y; G)$, множеству всех классов сопряженности представлений $\pi_1(Y)$ в G .

2. Рассмотрим случай, когда Y – стандартный тор $T^3 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \bmod \mathbb{Z}^3\}$, и предположим, что расслоение $P|_{T^3}$ тривиально (это, в частности, всегда так, если $G = SU(n)$). Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли G и $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ – ее подалгебра Картана. Любая плоская связность над тором имеет каноническую калибровку с постоянными коэффициентами

$$\tau = d + \tau_k dx^k, \quad \tau_k \in \mathfrak{t}, \quad k = 1, 2, 3,$$

такими что все собственные значения $\text{ad}(i\tau_k) \in \text{End}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$ лежат в $[-1, 1]$. Таким образом, любая коммутирующая тройка $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ в $\mathfrak{g}$ задает плоскую G -связность над T^3 , которую мы также обозначим через τ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем плоскую G -связность τ *допустимой*, если она имеет каноническую калибровку, такую что для любого α , корня $(\mathfrak{g}^\mathbb{C}, \mathfrak{t}^\mathbb{C})$, если значения $\alpha(i\tau_k)$ целые для всех $k = 1, 2, 3$, то $\alpha(i\tau_k) = 0$.

Связность τ допустима тогда и только тогда, когда стабилизатор $C(\tau)$ тройки τ в $\mathfrak{g}$ при присоединенном представлении G совпадает со стабилизатором $C(\exp(2\pi\tau))$ тройки $\exp(2\pi\tau)$ в G при сопряжении. Вообще говоря, имеет место включение $C(\tau) \subseteq C(\exp(2\pi\tau))$. Пример недопустимой $SU(2)$ -связности будет дан ниже. Условие допустимости для одного элемента алгебры Ли

ранее возникало в теоремах о соответствии между стабильными параболическими расслоениями и антиавтодуальными связностями с особенностью вдоль вложенной поверхности [5].

Если $A(t)$, $t \geq 0$, есть траектория потока Чженя–Саймонса на торе и $A(t) = d + T_k(t) dx^k$ инвариантна при сдвигах по тору, $\partial_k A(t) = 0$, $k = 1, 2, 3$, то коэффициенты $T_k(t)$ удовлетворяют уравнениям Нама

$$(4) \quad \dot{T}_1 = -[T_2, T_3], \quad \dot{T}_2 = -[T_3, T_1], \quad \dot{T}_3 = -[T_1, T_2].$$

Таким образом, уравнения Нама реализуются на инвариантном подмногообразии потока (3), а именно, на так называемом *центральной многообразии* для этого потока. Применяя результаты [3], [4], мы получаем следующую теорему сведения.

ТЕОРЕМА I. Пусть $A(t)$ – инстантонная траектория градиентного потока Чженя–Саймонса на тривиальном G -расслоении над тором T^3 и с допустимым пределом при $t \rightarrow \infty$. Существует единственное, с точностью до присоединенного действия G , решение $T_A(t)$ уравнений Нама для $\mathfrak{g}$, такое что $\text{dist}(A(t), T_A(t)) < \text{const} \cdot e^{-\mu_\tau^- t}$. Здесь расстояние берется между орбитами калибровочных преобразований над тором, τ предполагается в канонической калибровке и за μ_τ^- можно принять половину минимума $(\sum_{k=1}^3 (i\alpha(\tau_k))^2)^{1/2}$, взятого по всем α , корням $(\mathfrak{g}^\mathbb{C}, \mathfrak{t}^\mathbb{C})$.

3. Ввиду эллиптичности уравнений Янга–Миллса (1) их пространства решений при подходящих условиях несут структуру гладких конечномерных многообразий [1]. Мы опишем пространство L^2 -модулей $\mathcal{M}_l(P, X, g)$ инстантонов на $SU(2)$ -расслоении P над 4-многообразием X с цилиндром $\mathbb{R}_+ \times T^3$. Случай $SO(3)$ -расслоения см. в [2].

Многообразие характеров $\chi(T^3, SU(2))$ изоморфно $T^3 / \pm 1$. Его особые точки соответствуют восьми вырожденным плоским связностям τ с коэффициентами τ_k , равными нулю или $\text{diag}(1/2, -1/2)$. Из них только тривиальная связность произведения является допустимой. В следующей теореме числа Бетти b^1 , b_+^2 для X следует понимать для компактификации X добавлением T^3 “в бесконечности”. О пространствах решений уравнений Нама см. [3].

ТЕОРЕМА II. Пусть (X, g) – ориентированное риманово 4-многообразие с цилиндром $\mathbb{R}_+ \times T^3$, и пусть P – главное $SU(2)$ -расслоение над X . Предположим, что $b_+^2(X) > 0$. Тогда для метрики g , стандартной на $\mathbb{R}_+ \times T^3$ и в общем положении на компактной части $X \setminus (\mathbb{R}_+ \times T^3)$, имеют место следующие утверждения.

Пространство L^2 -модулей $\mathcal{M}_l(P, X, g)$, инстантонов с действием Янга–Миллса $2\pi^2 l$, $l > 0$, стратифицировано гладкими многообразиями. Имеет место гладкое проектирование $p: \mathcal{M}_l(P, X, g) \rightarrow M_{\text{Nahm's}}(SU(2))$ на пространство ограниченных решений уравнений Нама $SU(2)$, такое что $\lim_{t \rightarrow \infty} [A(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} p([A(t)])$ для любого семейства $A(t)$ связностей на торе, полученного из инстантона на P . Пространство всех инстантонов в $\mathcal{M}_l(P, X, g)$, имеющих при $t \rightarrow \infty$ предел в гладком подмногообразии $R \subset \chi(T^3, SU(2))$, есть гладкое многообразие размерности $8l - 3(1 - b_1(X) + b_+^2(X)) - 1 + \dim R$. Для каждой из восьми вырожденных связностей τ_{nr} подпространство всех инстантонов в $\mathcal{M}_l(P, X, g)$ с пределом τ_{nr} стратифицировано двумя гладкими многообразиями, $S_0 = p^{-1}(\tau_{nr})$ и S_1 , размерностей $8l - 3(1 - b_1(X) + b_+^2(X)) - 3$ и $8l - 3(1 - b_1(X) + b_+^2(X)) - 1$, соответственно, и $\partial S_1 = S_0$.

Автор признателен С. К. Дональдсону и П. Б. Кронхеймеру за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Freed D. S., Uhlenbeck K. K. Instantons and four-manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1988. [2] Gompf R. E., Mrowka T. S. // Ann. Math. 1993. V. 138. P. 61–111. [3] Kovalev A. G. // Quat. J. Math. Oxford. 1996. V. 47. №2. P. 41–58. [4] Morgan J. W., Mrowka T. S., Ruberman D. The L^2 -moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants. Boston: International Press, 1994. [5] Munari A. D. Phil. Thesis. Oxford, 1993.