Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Коробов, О конечных цепных дробях, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:16:17

О КОНЕЧНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЯХ

Н. М. КОРОВОВ

В настоящем сообщении предложен алгоритм, позволяющий, не прибегая к вычислению неполных частных, получить все несократимые правильные дроби $\frac{a}{m}$, для которых неполные частные разложения в цепную дробь не превосходят заданной величины $s \geq 2$. Как известно (см. [1]), такие дроби представляют интерес для теории приближенного интегрирования, так как числа 1, a будут оптимальными коэффициентами по модулю m .

Обычно из двух разложений $\frac{a}{m}$ в цепную дробь выбирают то, в котором последнее неполное частное больше единицы. В отличие от этого, мы будем рассматривать разложения с последним неполным частным, равным единице. Рассмотрим группу дробей

$$(1) \quad \frac{a(1)}{m(1)}, \dots, \frac{a(\nu)}{m(\nu)} \quad (\nu \geq 1).$$

Строки, составленные из чисел

$$a(1), \dots, a(\nu); \quad m(1), \dots, m(\nu); \quad m(1) + a(1), \dots, m(\nu) + a(\nu),$$

будем называть, соответственно, *строкой числителей*, *строкой знаменателей* и *строкой суммы группы* (1).

Пусть $s \geq 2$, $\nu_s \geq \nu_1 + \dots, \nu_{s-1}$ и даны s групп дробей

$$(2) \quad \frac{a_1(1)}{m_1(1)}, \dots, \frac{a_1(\nu_1)}{m_1(\nu_1)}; \dots; \frac{a_s(1)}{m_s(1)}, \dots, \frac{a_s(\nu_s)}{m_s(\nu_s)}.$$

Группу дробей будем называть *группой*, *порожденной группами* (2), если для нее выполняются условия.

1°. Строка числителей группы составлена из выписанных последовательно строк знаменателей групп (2), начиная с s -й и кончая первой из них:

$$m_s(1), \dots, m_s(\nu_s), m_{s-1}(1), \dots, m_{s-1}(\nu_{s-1}), \dots, m_1(1), \dots, m_1(\nu_1).$$

2°. Строка знаменателей группы состоит из двух частей. Первая ее часть совпадает со строкой сумм последней из групп (2), а вторая часть повторяет начальные числа первой части:

$$\underbrace{m_s(1) + a_s(1), \dots, m_s(\nu_s) + a_s(\nu_s)}, \\ \underbrace{m_s(1) + a_s(1), \dots, m_s(\nu_1 + \dots + \nu_{s-1}) + a_s(\nu_1 + \dots + \nu_{s-1})}.$$

Так, например, при $s = 2$ и $\nu_2 \geq \nu_1$ группа дробей, порожденная группами

$$\frac{a_1(1)}{m_1(1)}, \dots, \frac{a_1(\nu_1)}{m_1(\nu_1)}; \quad \frac{a_2(1)}{m_2(1)}, \dots, \frac{a_2(\nu_2)}{m_2(\nu_2)},$$

будет иметь вид

$$(3) \quad \frac{m_2(1)}{m_2(1) + a_2(1)}, \dots, \frac{m_2(\nu_2)}{m_2(\nu_2) + a_2(\nu_2)}, \frac{m_1(1)}{m_2(1) + a_2(1)}, \dots, \frac{m_1(\nu_1)}{m_2(\nu_1) + a_2(\nu_1)}.$$

Дадим еще определение порядка последовательности дробей. При $s = 2$ зададим две группы дробей:

$$(4) \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{3}, \frac{1}{3}.$$

Каждую следующую группу будем выбирать так, чтобы она была порождена двумя предыдущими группами. В итоге получим последовательность

$$(5) \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}; \quad \frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}; \quad \dots$$

Действительно, в этой последовательности третья группа дробей

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5},$$

согласно порождающему алгоритму (3), получается из двух первых групп:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{3+2}, \frac{3}{3+1}, \frac{2}{3+2}.$$

Аналогично, четвертая группа

$$\frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}$$

получается из второй и третьей групп:

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{5+3}, \frac{4}{4+3}, \frac{5}{5+2}, \frac{3}{5+3}, \frac{3}{5+2},$$

и т.д. Последовательность дробей (5), построенную с помощью начальных групп (4) и порождающего алгоритма (3), будем называть *последовательностью второго порядка*.

Пусть теперь $s \geq 3$. Выберем первые s групп дробей так, чтобы они отличались от первых s групп последовательности $(s-1)$ -го порядка только тем, что конце s -й группы добавлена дробь $\frac{1}{s+1}$. Каждая следующая группа дробей выбирается так, чтобы она была порождена s предыдущими группами. Полученную последовательность дробей будем называть *последовательностью s -го порядка*. Так, например, последовательность третьего порядка будет иметь вид

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}; \frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}; \dots$$

Здесь первые три группы дробей отличаются от соответствующих групп последовательности второго порядка (5) тем, что в третьей группе добавлена дробь $\frac{1}{4}$. Каждая группа, начиная с четвертой, получается из трех предыдущих в соответствии с порождающим алгоритмом. В частности, четвертая группа

$$\frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$$

получается из трех первых групп:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4} \rightarrow \frac{5}{5+3}, \frac{4}{4+3}, \frac{5}{5+2}, \frac{4}{4+1}, \frac{3}{5+3}, \frac{3}{4+3}, \frac{2}{5+2},$$

и т.д.

ТЕОРЕМА. При каждом $s \geq 2$ последовательность s -го порядка содержит все те и только те правильные несократимые дроби, для которых неполные частные разложения в цепную дробь не превосходят s .

Доказательство теоремы проводится по индукции с использованием легко выявляемых особенностей разложений в цепную дробь чисел, когда дроби принадлежат одной и той же группе дробей последовательности s -го порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дроби, принадлежащие последовательности s -го порядка, удобно располагать в виде таблицы, составленной из строк числителей групп, образующих последовательность. Так, например, при $s = 2$ получим следующую таблицу

1																			
2	1																		
3	3	2																	
5	4	5	3	3															
8	7	7	8	7	5	4	5												
13	11	12	11	10	13	11	12	8	7	7	8	7							
.....																			

Отношения чисел из любой строки этой таблицы к стоящим под ними числам следующей строки образуют последовательность второго порядка (5) и, согласно утверждению теоремы, неполные частные их разложений в цепную дробь ограничены числом 2.

Считаю своим приятным долгом отметить, что стимулом к появлению этого сообщения послужила статья [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963. [2] Мошевитин Н. Г. // Матем. заметки. 1996. Т. 2. С. 99–109.

Принято редколлегией
03.09.1997