Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, Ю. Г. Зархин, В. А. Исковских, Д. Б. Каледин, Вик. С. Куликов, Ю. И. Манин, Д. О. Орлов, А. Н. Паршин, И. Р. Шафаревич, Федор Алексеевич Богомолов (к 60-летию со дня рождения), *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 193–197

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:22:18

Федор Алексеевич Богомолов
(к шестидесятилетию со дня рождения)

26 сентября 2006 года исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Федору Алексеевичу Богомолову. Он родился в Москве, в семье известного исследователя космоса (ныне академика РАН) Алексея Федоровича Богомолова.

Закончив механико-математический факультет Московского государственного университета в 1970 г., Ф. А. Богомолов был принят в аспирантуру Математического Института им. В. А. Стеклова АН СССР. Его научным руководителем стал С. П. Новиков. В 1974 г., после защиты кандидатской диссертации, он поступил на работу в отдел алгебры МИАН. С тех самых пор профессиональная деятельность Ф. А. Богомолова неразрывно связана с отделом алгебры. Хотя Федор Алексеевич с 1994 г. является профессором Математического института им. Р. Куранта в Нью-Йоркском университете, в настоящее время он остается внештатным сотрудником МИАН и, регулярно бывая в Москве, участвует в творческой работе отдела и семинарах. В 2006 г. 60-летие Ф. А. Богомолова было отмечено в МИАН международной конференцией.

Свою математическую деятельность Федор Алексеевич начинал как тополог (первая его статья, опубликованная в 1969 г., посвящена действию окружности на гладких нечетномерных сферах). Однако уже в начале 70-х годов он полностью изменил направление исследований и занялся алгебраической геометрией. На этом пути его ожидал блестящий успех. В настоящее время Ф. А. Богомолов – один из ведущих мировых алгебраических геометров, а его неожиданные, непредсказуемые, в полном смысле слова новаторские работы легли в основу нескольких современных направлений этой дисциплины.

Кандидатская диссертация Ф. А. Богомолова посвящена изучению компактных кэлеровых многообразий с тривиальным каноническим классом. Главная теорема, доказанная здесь, – это так называемая “теорема Богомолова о разложении”: с точностью до конечного неразветвленного накрытия, любое компактное кэлерово многообразие с рационально тривиальным каноническим классом c_1 разлагается в произведение тора, простых многообразий Калаби–Яу и простых гиперкэлеровых многообразий. Это – современная формулировка; сами термины “гиперкэлерово многообразие” и “многообразие Калаби–Яу” появились значительно позднее, после доказательства гипотезы Калаби, данного Ш.-Т. Яу в 1979 г. Впоследствии оба класса многообразий приобрели большую известность как в алгебраической геометрии, так и в математической физике, где они широко используются в струнной теории.

При этом основы современной структурной теории гиперкэлеровых многообразий были построены также Ф. А. Богомолловым, причем еще в 1978 г., за год до доказательства Яу. Среди прочего, он показал, что вторые когомологии $H^2(X)$ простого гиперкэлерова многообразия X снабжены канонической вещественной квадратичной формой сигнатуры $(3, b_2(X) - 3)$ (форма Богомоллова–Бовиля–Фуджики). Используя эту форму, Ф. А. Богомоллов построил для гиперкэлеровых многообразий теорию периодов и доказал теорему типа Торелли, аналогичную теореме Торелли для поверхностей типа КЗ, доказанной ранее И. Р. Шафаревичем и И. И. Пятецким–Шапиро. Важным техническим средством здесь явилась теорема Богомоллова об отсутствии препятствий к деформации. Она была впоследствии обобщена Г. Тианом и А. Тодоровым на многообразия Калаби–Яу и известна сейчас как “теорема Богомоллова–Тиана–Тодорова”.

Другим важным направлением деятельности Ф. А. Богомоллова в 70-е годы была теория алгебраических поверхностей. Следует отметить, что в это время школа алгебраической геометрии И. Р. Шафаревича, представленная, например, Ю. И. Маниным, А. Н. Тюриным, А. Н. Паршиным, С. Ю. Аракеловым и другими, была в изучении поверхностей несомненным мировым лидером. Ф. А. Богомоллов включился в работу этой школы и быстро достиг выдающихся результатов.

Так, в 1976 г. он изучил так называемые поверхности класса VII_0 с нулевым вторым числом Бетти – это некоторые некэлеровы компактные комплексные поверхности, примеры которых были построены М. Инуэ. Совершенно неожиданным образом, изучение таких поверхностей требует привлечения арифметических методов (а именно, рассмотрения автоморфизмов поля комплексных чисел), а сами поверхности, как оказывается, допускают аффинную структуру.

Независимо Ф. А. Богомоллов занялся теорией векторных расслоений на алгебраических многообразиях произвольной размерности и ввел для векторных расслоений новое понятие стабильности; в отличие от обычной стабильности по Мамфорду или по Гизекеру стабильность по Богомоллову не зависит от выбора поляризации и основывается на рассмотрении подфакторов всех тензорных степеней расслоения. Эта теория дает возможность получить фундаментальное неравенство между числами Черна стабильных векторных расслоений. Подход Богомоллова в духе таннакиева формализма значительно опередил свое время – рассматривать тензорные произведения векторных расслоений в контексте стабильности стало куда проще через 10 лет, после доказательства теоремы Уленбек–Яу об эрмитовых метриках Янга–Миллса. Стабильность по Богомоллову и, по выражению М. Рида, “теория инвариантов Богомоллова” по-прежнему привлекают внимание ведущих алгебраических геометров (здесь можно упомянуть, например, недавние работы Я. Коллара, где категория стабильных расслоений на многообразии рассматривается как тензорная категория и получаются результаты о соответствующей алгебраической группе).

В 70-х годах подход Богомоллова оказался особенно продуктивен в теории алгебраических поверхностей. Пожалуй, самый известный результат Богомоллова, полученный этим методом, – это тот факт, что касательное расслоение поверхности общего типа не может быть нестабильно; отсюда выводится знаменитое неравенство Богомоллова, гласящее, что для поверхности общего типа имеем неравенство $c_1^2 \leq 4c_2$ (а также, как показал Е. Мияока, и более сильное неравенство $c_1^2 \leq 3c_2$).

Эти результаты имеют большое значение не только для алгебраической геометрии над $\mathbb{C}$, но и для арифметики. Неравенство Богомоллова для стабильных расслоений было сформулировано и доказано для арифметических поверхностей в рамках геометрии Аракелова (А. Мориваки). Арифметический аналог неравенства Богомоллова для чисел Черна арифметической поверхности является труднейшей проблемой. Это неравенство имеет в качестве следствия целый ряд известных результатов и гипотез теории чисел (эффективная гипотеза Морделла, ограниченность кручения эллиптических кривых, последняя теорема Ферма и др.).

Другой замечательный результат – это две теоремы Богомолова об ограниченности. Первая гласит, что на поверхности общего типа с $c_1^2 > c_2$ кривые фиксированного рода образуют алгебраическое семейство (т.е. соответствующая схема Гильберта имеет конечное число компонент). Во второй условие на классы Черна поверхности снимается, но рассматриваются только кривые с отрицательным самопересечением (поскольку такие кривые не деформируются, теорема просто утверждает, что их конечное число).

Один частный случай этого утверждения – рациональные и эллиптические кривые; в этом случае из теоремы Богомолова выводится, что поверхность общего типа гиперболична вне замкнутого алгебраического подмножества. Следует отметить, что вопрос о гиперболичности в разных смыслах компактных комплексных многообразий – один из самых трудных и интригующих в алгебраической геометрии; и результаты, и методы работ Ф. А. Богомолова до сих пор в этом вопросе очень важны.

Помимо алгебраической геометрии над полем комплексных чисел довольно рано Федор Алексеевич начал заниматься и арифметическими аспектами алгебраической геометрии.

Так, в конце 70-х годов, в серии писем к Ж.-П. Серру, он доказал следующий факт (опубликованный в 1981 г.): представление группы Галуа числового поля K в l -адическом модуле Тэйта абелева многообразия A над K обладает следующим замечательным свойством алгебраичности: образ группы Галуа – открытая подгруппа в группе l -адических точек некоторой линейной алгебраической группы. Важным следствием этого утверждения является то, что найдется автоморфизм Галуа, действующий на модуль Тэйта как умножение на M для некоторого натурального числа $M > 1$. Отсюда вытекает, в частности, что если даны кривая над числовым полем рода ≥ 2 и целое положительное число N , то образ кривой в ее якобиане содержит не более чем конечное число точек кручения, порядок которых делит степень N . Этот результат явился важным продвижением на пути к доказательству гипотезы Манина–Мамфорда о конечности числа точек кручения на таких кривых, доказанной впоследствии М. Рейно.

Другое направление исследований Ф. А. Богомолова в алгебраической геометрии, арифметическое по духу, если и не по формальным признакам, – это вопрос о рациональности и унирациональности факторов по действию алгебраических групп. Здесь Ф. А. Богомоловым (в одиночку, а также совместно с П. Каццоло) были достигнуты важные результаты. Так, было показано, что пространство модулей гиперэллиптических кривых произвольного рода рационально. Известно, что этот вопрос сводится к изучению фактора некоторого конкретного представления V группы $GL(2)$ по действию группы; обобщая этот результат, Ф. А. Богомолов доказал, что фактор V/G любого представления V односвязной полупростой алгебраической группы G , которая не содержит компонент типа E_8 , стабильно рационален.

Затем Ф. А. Богомолов обратился к случаю конечной группы G . Здесь был старый и сложный вопрос, заданный Э. Нётер: верно ли, что фактор векторного пространства над $\mathbb{C}$ по действию конечной группы рационален? Контрпример был получен Д. Салтманом в 1985 г. Ф. А. Богомолов рассмотрел этот вопрос систематически и, в частности, нашел минимальные контрпримеры, улучшающие результаты Салтмана.

Техническое средство, используемое в этом вопросе, – это так называемая неразветвленная группа Брауэра. Именно этот бирациональный инвариант Ф. А. Богомолов последовательно изучил в серии статей в конце 80-х – начале 90-х годов. Так, он показал, что для того, чтобы вычислить неразветвленную группу Брауэра фактора V/G , достаточно иметь информацию о действии только абелевых подгрупп G' на V ; это дает возможность провести вычисление во многих конкретных случаях. Самый же удивительный результат Богомолова в этой области – это то, что неразветвленная группа Брауэра алгебраического многообразия X над $\mathbb{C}$ зависит только от группы

Галуа общей точки X и даже, более того, только от фактора этой группы Галуа по ее второму коммутанту.

При этом, обобщая этот результат, в начале 90-х годов Ф. А. Богомолов доказал факт еще более удивительный: само поле рациональных функций на алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 может быть восстановлено по своей группе Галуа (согласно Богомолову, это было предположено Гротендиком). Процедура восстановления Богомолова была им недавно в подробностях описана в совместной статье с Ю. Чинкелем и включает в себя тонкое и красивое взаимодействие между абелевыми подгруппами группы Галуа, дивизориальными нормированиями X и многомерной теорией полей классов; полученные ранее результаты о группе Брауэра играют здесь ключевую роль.

Другое обобщение работ по неразветвленной группе Брауэра – это так называемые стабильные этальные когомологии алгебраических многообразий, рассмотренные Богомоловым также в конце 80-х годов, следуя идее Гротендика. Определение здесь прямолинейно – грубо говоря, стабильные когомологии X суть прямой предел когомологий всё меньших открытых по Зарискому подмножеств $U \subset X$. Богомолов изучил эти когомологии во многих случаях, таких как фактор V/G , и, в частности, показал, что для конечной группы G стабильные когомологии V/G не зависят от выбора точного представления V , что дает понятие стабильных когомологий конечной группы. Также он показал, что стабильные когомологии группы Галуа любого поля, содержащего алгебраически замкнутое поле характеристики 0, совпадают с обычными когомологиями этой группы. Было доказано и много других результатов и Богомоловым, и другими, причем теория стабильных когомологий продолжает развиваться до сих пор; работы Ф. А. Богомолова лежат в основании этой живой и важной области.

Подводя итоги работ по когомологическим свойствам общих точек алгебраических многообразий, Ф. А. Богомолов сформулировал также некоторую функциональную версию известной гипотезы И. Р. Шафаревича о группе Галуа поля $\mathbb{Q}$: коммутант максимальной про- l -факторгруппы группы Галуа поля, содержащего алгебраически замкнутое поле, есть свободная про- l -группа. Эта гипотеза дает некоторый подход к известной гипотезе Милнора–Блоха–Като (в которой заметный прогресс был позже достигнут В. Воеводским и М. Ростом).

Еще одно важное направление исследований Ф. А. Богомолова в арифметической алгебраической геометрии – это вопрос о потенциальной плотности рациональных точек многообразия над числовым полем. Эта тема отчасти продолжает его исследования в области точек конечного порядка на абелевых многообразиях, а с другой стороны, связана и с вопросами гиперболичности – имеется известное эмпирическое, а порой и строгое, соответствие между результатами о рациональных точках на многообразиях и их “функциональными” аналогами – результатами о рациональных прямых (и в частности, о гиперболичности). Как и в вопросах гиперболичности, ожидается, что рациональные точки не будут потенциально плотны на многообразии общего типа, но будут потенциально плотны на многообразиях размерности Кодаиры 0, таких, например, как поверхности типа КЗ. В серии совместных работ с Ю. Чинкелем в 90-х годах Ф. А. Богомолов доказал, что рациональные точки потенциально плотны на поверхности Энриквеса над числовым полем, а также на некоторых поверхностях типа КЗ (например, на эллиптических КЗ).

Также Богомолов изучил аналоги этих утверждений над конечным полем; среди прочего, он доказал, что любые две точки КЗ-поверхности над конечным полем можно соединить рациональными кривыми. Предполагается, что, аналогично, рациональные кривые на КЗ-поверхности над полем $\mathbb{C}$ всюду плотны в аналитической топологии, однако доказать это на настоящий момент не удается.

В 2000-е годы Федор Алексеевич продолжает активную научную работу, как в одиночку, так и в соавторстве с молодыми математиками, для многих из которых он

является в полном смысле этого слова учителем. Кроме упомянутого выше Ю. Чинкеля (Гёттинген) можно отметить Т. Пантева (Филадельфия), Л. Кацаркова (Вена), Т. Петрова (Ирвайн) и многих других – и, конечно же, молодых математиков, аспирантов и студентов Москвы. Общаться с Ф. А. Богомоловым всегда радостно и всегда неожиданно. Федор Алексеевич – это не только математик с огромным опытом, один из лидеров мировой алгебраической и арифметической геометрии, но и человек ярких, свежих идей и нестандартных подходов. Все коллеги из отдела алгебры МИАН и других математических центров, все друзья, сотрудники и ученики желают ему сохранять научную молодость и остроту восприятия нашей науки в течение долгих лет.

*В. А. Васильев, Ю. Г. Зархин, В. А. Исковских,
Д. Б. Каледин, В. С. Куликов, Ю. И. Манин,
Д. О. Орлов, А. Н. Паршин, И. Р. Шафаревич*