Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, Т. Ю. Гаджиева, Асимптотика собственных значений и оценка ядра резольвенты одной нерегулярной краевой задачи, порожденной дифференциальным уравнением $2n$ -го порядка на отрезке $[0, a]$, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 1, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:14:57

Асимптотика собственных значений и оценка ядра резольвенты одной нерегулярной краевой задачи, порожденной дифференциальным уравнением $2n$ -го порядка на отрезке $[0, a]$

Г. А. Айгунов, Т. Ю. Гаджиева

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2[0, a]$ краевую задачу H_0 , порождаемую дифференциальным уравнением

$$(-1)^n \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} + [q(x) - \lambda^{2n} \rho(x)] f(x) = g(x), \quad 0 < x < a, \quad 0 \leq \arg \lambda < \frac{\pi}{n},$$

и краевыми условиями $U_j(f) \equiv f^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, и

$$U_j(f) \equiv \sum_{k=1}^{2n} (i w_j \lambda)^{k-1} f^{(2n-k)}(a, \lambda) = 0, \quad j = \overline{n, 2n-1},$$

где $q(x) \in C[0, a]$, $\rho(x) \in C^{(2n)}[0, a]$ и, кроме того, $\rho(x) > 0$ при всех $x \in [0, a]$. Нумерация корней w_j определяется соотношениями $\operatorname{Re}(i \lambda \varphi_0) \leq \operatorname{Re}(i \lambda \varphi_1) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(i \lambda \varphi_{2n-1})$, где $\varphi_j = i w_j \sqrt[n]{\rho(x)}$, $k = \overline{0, 2n-1}$, $0 \leq \arg \lambda \leq \pi/(2n)$ ($\lambda = \sigma + i\tau$), w_j – корни степени $2n$ из 1.

Различают два случая: $\rho(a) \neq 1$ и $\rho(a) = 1$, которые называются регулярным и нерегулярным соответственно.

Для случая уравнения второго порядка аналогичная задача с $\rho(x) \equiv 1$ рассматривалась в работах [1], [2], а для уравнения $2n$ -го порядка – в работах [3], [4]. В [5] был рассмотрен нерегулярный случай $\rho(a) = 1$, $\rho'(a) = 0$.

Целью настоящей работы является изучение задачи в более общем нерегулярном случае:

$$\rho(a) = 1, \quad \rho'(a) = \rho''(a) = \dots = \rho^{(2n-1)}(a) = 0, \quad \alpha \rho^{(2n)}(a) + \beta q(a) \neq 0,$$

где α и β – некоторые постоянные.

Определим секторы T_k на плоскости λ посредством неравенств $k\pi/n \leq \arg \lambda \leq (k+1)\pi/n$, $k = \overline{0, 2n-1}$.

Введем также секторы $\overline{T}_k$, которые получаются из секторов T_k ($k = \overline{0, 2n-1}$) путем зеркального отображения относительно вещественной оси в плоскости λ .

ТЕОРЕМА. 1. *Спектр задачи H_0 состоит из счетного числа собственных значений λ_m , которые, кроме, быть может, конечного числа, однократны.*

2. *Ядро $R(x, t, \lambda)$ резольвенты краевой задачи H_0 при фиксированных значениях $x \geq 0$, $t \geq 0$, рассматриваемое как функция спектрального параметра λ , является мероморфной функцией, полюсы которой совпадают с числами λ_m .*

Доказательство теоремы основано на нескольких леммах.

ЛЕММА 1. *Собственные числа $\lambda_m = \sigma_m + i\tau_m$ спектральной задачи H_0 расположены в секторах T_k ($k = \overline{1, n}$) и $\overline{T}_k$ ($k = \overline{0, n-1}$). При этом, если $\lambda_m \in T_k$, то вне круга некоторого радиуса*

$$\lambda_m = \frac{w_k}{d} \left(\pi m + i n \ln m + i \ln \frac{\pi w_k}{d} - \frac{i}{2} \ln C_0 \right) + o(1),$$

если же $\lambda_m \in \overline{T}_k$, то

$$\lambda_m = \frac{\overline{w}_k}{d} \left(\pi m - i n \ln m - i \ln \frac{\pi w_k}{d} + \frac{i}{2} \ln C_0 \right) + o(1),$$

где $d = \int_0^a \sqrt[n]{\rho(x)} dx$, $m = N + 1, N + 2, \dots$ (N – некоторое натуральное число),
 $C_0 = -(\pm i)^{n-1} (2n)^{-1} C(\rho, q)$, причем знак “+” перед мнимой единицей берется при $\lambda \in \bar{T}_k$, знак “–” берется для секторов T_k и

$$C(\rho, q) = \alpha \rho^{(2n)}(a) + \beta q(a) \neq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha = & \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{(C_{2n}^2)^p}{(C_{2n}^1)^{p+2}} (-1)^{p+1} \sum_{k=2}^{2n-p} C_{2n}^k C_{2n}^{2n-(k+p-2)} \\ & + \frac{C_{2n}^3}{(C_{2n}^1)^3} \sum_{p=2}^{2n-2} \frac{(C_{2n}^2)^{p-2}}{(C_{2n}^1)^{p-2}} (-1)^{p+1} \sum_{k=2}^{2n-p} C_{2n}^k C_{2n}^{2n-(k+p-2)} \end{aligned}$$

(причем $\sum_i^j(\dots) = 0$ при $i > j$), $\beta = (-1)^n$.

ЛЕММА 2. Резольвента краевой задачи H_0 имеет вид

$$R_\lambda^0 g(x) = \int_0^a R(x, t, \lambda) g(t) dt.$$

ЛЕММА 3. В комплексной плоскости $\lambda_m = \sigma_m + i\tau_m$ существует последовательность расширяющихся замкнутых контуров Γ_N , на которых ядро резольвенты $R^0(x, t, \lambda)$ равномерно по $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq t \leq a$ допускает оценку

$$\left| \frac{\partial^l R^0(x, t, \lambda)}{\partial x^l} \right| \leq C |\lambda|^{2n^2 - 2n + l + 1}, \quad 0 \leq l \leq 2n - 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Естественно, может возникнуть вопрос, что произойдет с асимптотикой собственных значений, если отказаться от условия $\alpha \rho^{(2n)}(a) + \beta q(a) \neq 0$, т.е. допустить, что $\alpha \rho^{(2n)}(a) + \beta q(a) = 0$. Авторам удалось ответить и на этот вопрос – тогда необходимо выполнение условия $\alpha_1 \rho^{(2n+1)}(a) + \beta_1 q'(a) \neq 0$, где α_1 и β_1 – некоторые постоянные числа. Если же $\alpha_k \rho^{(2n+k)}(a) + \beta_k q^{(k)}(a) = 0$, $k \geq 1$, то необходимо выполнение условия $\alpha_{k+1} \rho^{(2n+k+1)}(a) + \beta_{k+1} q^{(k+1)}(a) = 0$, где α_{k+1} и β_{k+1} – постоянные числа.

Список литературы

- [1] Т. Regge, *Nuovo Cimento*, **8** (1958), 671–679. [2] А. О. Кравицкий, *Докл. АН СССР*, **170**:6 (1966), 1255–1258; англ. пер.: А. О. Kravickii, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 1361–1365. [3] М. М. Гехтман, *Докл. АН СССР*, **201**:5 (1971), 1025–1028; англ. пер.: М. М. Gehtman, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1755–1758. [4] Г. А. Айгунов, *Докл. АН СССР*, **213**:5 (1973), 1001–1004; англ. пер.: G. A. Aigunov, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1973), 1816–1820. [5] Г. А. Айгунов, *Функциональный анализ, теория функций и их приложения*, вып. 2, ч. I, Дагестанский государственный университет, Махачкала, 1975, 21–41.

Г. А. Айгунов (G. A. Aigunov)
 Дагестанский государственный университет

Представлено Р. А. Минлосом
 Принято редколлегией
 29.11.2007

Т. Ю. Гаджиева (T. Yu. Gadzhieva)
 Дагестанский государственный университет
 E-mail: tamila.usup@mail.ru