Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Михайлов, Тип трансцендентности для почти всех точек m -мерного комплексного пространства, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:44:51

Тип трансцендентности для почти всех точек m -мерного комплексного пространства

С. В. Михайлов

Пусть P – многочлен с целыми коэффициентами, зависящий от m переменных. Обозначим $\deg P$ степень P по совокупности переменных, $H(P)$ – максимум модулей коэффициентов P и $t(P) = \deg P + \ln H(P)$ – тип многочлена P . Пусть $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$ – точка с алгебраически независимыми (над $\mathbb{Q}$) координатами, $\tau > 0$ – вещественное. Будем говорить, что $\bar{\xi}$ имеет *тип трансцендентности* $\leq \tau$, если для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $P \neq 0$, выполнено неравенство

$$|P(\bar{\xi})| > e^{-ct(P)^\tau}, \quad (1)$$

где $c > 0$ – константа, зависящая, вообще говоря, от $\bar{\xi}$, но не от многочлена P .

Это определение (для $m = 1$) было дано С. Ленгом в 1966 г. (см. [1; гл. 5, § 1]).

В 1971 г. К. Малер [2] выдвинул гипотезу о том, что почти все вещественные числа имеют *тип трансцендентности* ≤ 2 . Это предположение было доказано Ю. В. Нестеренко [3] в 1974 г. В этой же работе доказывается, что почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют *тип трансцендентности* $\leq m + 2$, и выдвигается предположение, что на самом деле почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют *тип трансцендентности* $\leq m + 1$.

Аналогичная гипотеза (но уже в комплексном случае) была высказана Г. В. Чудновским в 80-х годах прошлого века (см. [4; гипотеза 1.3]) и доказана Ф. Аморозо [5] в 1990 г. Доказательство, изложенное в [5], существенно использует “комплексность” ситуации, и его не удастся адаптировать к вещественному случаю. В работе [6] автором было получено доказательство того, что почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют *тип трансцендентности* $\leq m + 1$, причем это было сделано методом, который может быть использован и в комплексном случае. Цель настоящей заметки – дать новое доказательство гипотезы Чудновского, используя технику работы [6]. Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$ (в смысле $2m$ -мерной меры Лебега) имеют *тип трансцендентности* $\leq m + 1$.*

Используя принцип Дирихле, можно показать, что точка $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$ не может иметь *тип трансцендентности* $\leq m + 1 - \varepsilon$, т. е. оценка теоремы 1 точна.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Требуется доказать, что $2m$ -мерная лебегова мера μ множества Ω точек $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$, которые не удовлетворяют условию (1) с $\tau = m + 1$, равна нулю. Обозначим через Ω_0 пересечение множества Ω с единичным кубом $B = \{\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m : |\bar{\xi}| \leq 1\}$. Можно показать, что равенство $\mu(\Omega_0) = 0$ влечет за собой равенство $\mu(\Omega) = 0$ (достаточно заметить, что при умножении точки $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$ на натуральное число n ее тип трансцендентности не меняется). Поэтому достаточно доказать равенство $\mu(\Omega_0) = 0$. Для этого нам потребуются вспомогательные множества. Обозначим через S_0 множество точек $\bar{\xi} \in B$, координаты которых алгебраически зависимы. Пусть τ_1, τ_2 – положительные вещественные числа, n – натуральное число. Обозначим через $B_n(\tau_1, \tau_2)$ множество точек $\bar{\xi} \in B$, для каждой из которых существует многочлен $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ такой, что

$$t(Q) \leq n, \quad |Q(\bar{\xi})| \leq e^{-\tau_1 n^{m+1}}, \quad \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\bar{\xi}) \right| \geq e^{-\tau_2 n^{m+1}}.$$

И пусть $S(\tau_1, \tau_2)$ – множество точек, каждая из которых содержится в бесконечном числе множеств B_n . Можно доказать (см. [6; лемма 3]), что при $\tau_1 > \tau_2 + 1/m!$ мера множества $S(\tau_1, \tau_2)$ равна нулю.

Далее, пусть $\mathbb{Q}[X]$ – кольцо многочленов от переменных $x_0, \dots, x_m$ над $\mathbb{Q}$. Для любого однородного несмешанного идеала I кольца $\mathbb{Q}[X]$ можно определить понятия *степени* $\deg I$ идеала, *логарифмической высоты* $h(I)$ идеала и *величины идеала в точке* ξ' проективного комплексного пространства $\mathbb{C}^{m+1}$, обозначаемой $|I(\xi')|$. Подробные определения можно найти в работе [7]. Эти величины по своим свойствам напоминают аналогичные характеристики многочлена. По аналогии с типом многочлена можно определить понятие *типа идеала* I формулой $t(I) = \deg I + h(I)$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[X]$ – простой однородный идеал, $r = \dim \mathfrak{p} + 1 \geq 1$. Пусть $L = \min_{E \in \mathfrak{p}} t(E)$, где минимум берется по всем однородным многочленам идеала $\mathfrak{p}$. Тогда существует однородный многочлен $F \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_m]$ такой, что некоторая его частная производная не лежит в идеале $\mathfrak{p}$ и при этом $t(F) \leq c_1 L$, $c_1 = c_1(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. лемму 6 в [6].

Пусть $\lambda = \lambda(m) > 0$ – достаточно большое вещественное число. Обозначим A_r множество точек $\xi \in B \setminus S_0$, для которых существует бесконечная последовательность различных однородных несмешанных идеалов $I \subset \mathbb{Q}[X]$ таких, что

$$\dim I = r - 1, \quad \ln |I(1, \xi_1, \dots, \xi_m)| \leq -\lambda^{3^{2r}} (t(I))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \quad 1 \leq r \leq m.$$

Положим по определению $A_0 = \emptyset$. Далее, обозначим через B_r множество точек $\xi \in B \setminus S_0$, для которых существует бесконечная последовательность различных однородных *простых* идеалов $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[X]$ таких, что

$$\dim \mathfrak{p} = r - 1, \quad \ln |\mathfrak{p}(1, \xi_1, \dots, \xi_m)| \leq -\lambda^{3^{2r-1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \quad 1 \leq r \leq m.$$

И, наконец, положим $S = S(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 = (1/4)\lambda(4c_1)^{-m-1}$, $\tau_2 = \tau_1 - 2/m!$, где c_1 – константа из леммы 1. Отметим, что $\mu(S) = 0$, поскольку $\tau_1 > \tau_2 + 1/m!$.

ЛЕММА 2. Справедливы следующие включения:

$$A_r \subset B_r, \quad B_r \subset A_{r-1} \cup S, \quad r = 1, \dots, m; \quad \Omega_0 \subset A_m \cup S_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. леммы 7, 8 и раздел “доказательство теоремы 1” в [6].

Из леммы 2 следует, что справедлива цепочка включений

$$\Omega_0 \setminus S_0 \subset A_m \subset B_m \subset A_{m-1} \cup S \subset \dots \subset A_1 \cup S \subset B_1 \cup S \subset S.$$

Следовательно, $\Omega_0 \subset S \cup S_0$ и $\mu(\Omega_0) = 0$, что доказывает теорему 1.

Список литературы

- [1] S. Lang, *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley, Reading–London–Don Mills, 1966. [2] K. Mahler, *Acta Arith.*, **18** (1971), 63–76. [3] Ю. В. Нестеренко, *Матем. заметки*, **15:3** (1974), 405–414; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, *Math. Notes*, **15** (1974), 234–240. [4] G. V. Chudnovsky, *Contribution to the theory of transcendental numbers*, Math. Surveys Monogr., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984. [5] F. Amoroso, *Acta Arith.*, **56:4** (1990), 345–364. [6] С. В. Михайлов, *Матем. сб.*, **198:10** (2007), 67–88; англ. пер.: S. V. Mikhailov, *Sb. Math.*, **198:10** (2007), 1443–1463. [7] Ю. В. Нестеренко, *Аналитическая теория чисел и приложения*, Тр. МИАН, **218**, Наука, М., 1997, 299–334; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **218** (1997), 294–331.

С. В. Михайлов (S. V. Mikhailov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: serjikk@gmail.com

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
29.11.2007