Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Б. Пакович, Об аналогах теорем Ритта для рациональных функций с двумя полюсами, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9065>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:06:46

Об аналогах теорем Ритта для рациональных функций с двумя полюсами

Ф. Б. Пакович

Пусть F – рациональная функция с комплексными коэффициентами. Такая функция F называется неразложимой, если равенство $F = F_1 \circ F_2$, где F_1, F_2 – рациональные функции, а $F_1 \circ F_2$ обозначает суперпозицию $F_1(F_2(z))$, влечет, что, по крайней мере, одна из функций F_1, F_2 является преобразованием Мёбиуса. Любая рациональная функция F может быть разложена в композицию неразложимых рациональных функций, вообще говоря, не единственным образом. Такие разложения называются максимальными. Два разложения $F = F_1 \circ \dots \circ F_r$ и $F = G_1 \circ \dots \circ G_r$, максимальные или нет, называются эквивалентными, если существуют преобразования Мёбиуса μ_i , $1 \leq i \leq r-1$, такие, что

$$F_1 = G_1 \circ \mu_1, \quad F_i = \mu_{i-1}^{-1} \circ G_i \circ \mu_i, \quad 1 < i < r, \quad \text{и} \quad F_r = \mu_{r-1}^{-1} \circ G_r.$$

Теория разложений полиномов была построена Дж. Ф. Риттом в его классической статье [1]. Приводимая ниже теорема расширяет теорию Ритта на случай рациональных функций, имеющих не более двух полюсов.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$L = A \circ C = B \circ D \tag{1}$$

– разложение рациональной функции L , имеющей не более двух полюсов, в композицию рациональных функций A, B, C, D . Тогда или разложение $A \circ C$ эквивалентно разложению $B \circ D$, или существуют рациональные функции $U, W, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ такие, что

$$A = U \circ \tilde{A}, \quad B = U \circ \tilde{B}, \quad C = \tilde{C} \circ W, \quad D = \tilde{D} \circ W, \quad \tilde{A} \circ \tilde{C} = \tilde{B} \circ \tilde{D}$$

и, с точностью до замены A на B и C на D , выполняется одно из следующих условий:

$$1) \quad \tilde{A} \circ \tilde{B} \sim z^n \circ z^r L(z^n), \quad \tilde{C} \circ \tilde{D} \sim z^r L^n(z) \circ z^n,$$

где $L(z)$ – полином Лорана, $r \geq 0$, $n \geq 1$ и $\text{НОД}(n, r) = 1$;

$$2) \quad \tilde{A} \circ \tilde{C} \sim z^2 \circ \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} S\left(\frac{2z}{z^2 + 1}\right), \quad \tilde{B} \circ \tilde{D} \sim (1 - z^2) S^2(z) \circ \frac{2z}{z^2 + 1},$$

где $S(z)$ – полином;

$$3) \quad \tilde{A} \circ \tilde{C} \sim T_n \circ T_m, \quad \tilde{B} \circ \tilde{D} \sim T_m \circ T_n,$$

где $T_n(z), T_m(z)$ – полиномы Чебышёва, $m, n \geq 1$ и $\text{НОД}(n, m) = 1$;

$$4) \quad \tilde{A} \circ \tilde{C} \sim T_n \circ \frac{1}{2} \left(z^m + \frac{1}{z^m} \right), \quad \tilde{B} \circ \tilde{D} \sim \frac{1}{2} \left(z^m + \frac{1}{z^m} \right) \circ z^n,$$

где $m, n \geq 1$ и $\text{НОД}(n, m) = 1$;

$$5) \quad \tilde{A} \circ \tilde{C} \sim -T_{nl} \circ \frac{1}{2} \left(\varepsilon z^m + \frac{\bar{\varepsilon}}{z^m} \right), \quad \tilde{B} \circ \tilde{D} \sim T_{ml} \circ \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right),$$

где $T_{nl}(z), T_{ml}(z)$ – полиномы Чебышёва, $m, n \geq 1$, $l > 1$, $\varepsilon^{nl} = -1$ и $\text{НОД}(n, m) = 1$;

$$6) \quad \tilde{A} \circ \tilde{C} \sim (z^2 - 1)^3 \circ \frac{3(3z^4 + 4z^3 - 6z^2 + 4z - 1)}{(3z^2 - 1)^2},$$

$$\tilde{B} \circ \tilde{D} \sim (3z^4 - 4z^3) \circ \frac{4(9z^6 - 9z^4 + 18z^3 - 15z^2 + 6z - 1)}{(3z^2 - 1)^3}.$$

Более того, если $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ – два максимальных разложения функции L , то существует цепочка максимальных разложений $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq s$, функции L такая, что $\mathcal{F}_1 = \mathcal{D}$, $\mathcal{F}_s \sim \mathcal{E}$ и $\mathcal{F}_{i+1}$ получается из $\mathcal{F}_i$ заменой двух последовательных функций, входящих в $\mathcal{F}_i$, на две другие функции с той же композицией.

Полное доказательство теоремы дано в [2]. Отметим, что вторая часть теоремы выводится из первой, а первая часть сводится к анализу уравнений

$$A(L_1) = B(L_2), \quad A(L_1) = B(z^d),$$

где A, B – полиномы, а L_1, L_2 – полиномы Лорана. При этом наш анализ первого из этих уравнений дает новое доказательство классификации алгебраических кривых вида $A(x) - B(y) = 0$, имеющих фактор рода нуль с двумя точками на бесконечности, полученной в [3], [4]. Отметим также, что наше изложение является полностью самозамкнутым и содержит несколько новых идей, позволяющих упростить подход к проблеме. В частности, мы рассматриваем уравнение (1) в более общем контексте функционального уравнения $f \circ p = g \circ q$, где $f: C_1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $g: C_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $p: C \rightarrow C_1$, $q: C \rightarrow C_2$ – голоморфные функции на компактных римановых поверхностях.

Список литературы

- [1] J. F. Ritt, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23**:1 (1922), 51–66. [2] F. Pakovich, [arXiv: 0710.3860](#).
 [3] Yu. F. Bilu, R. F. Tichy, *Acta Arith.*, **95**:3 (2000), 261–288. [4] M. Fried, *J. Reine Angew. Math.*, **264** (1973), 40–55.

Ф. Б. Пакович (F. B. Pakovich)
 Ben-Gurion University of the Negev, Israel
 E-mail: pakovich@math.bgu.ac.il

Представлено С. К. Ландо
 Принято редколлегией
 07.12.2007