Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кудинов, О топологической модальной логике $\mathbb{R}$ с неравенством, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 1, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9066>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:54:49

О топологической модальной логике $\mathbb{R}$ с неравенством

А. В. Кудинов

В работе рассматриваются пропозициональные модальные логики с двумя модальностями. Формулы строятся стандартно из счетного множества пропозициональных переменных PROP , связок $\perp$ (ложь) и $\rightarrow$ и одноместных модальностей $\Box$ и $\mathcal{D}$. Как обычно, определяются $\neg$, $\vee$, $\wedge$, а также $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$, $\mathcal{D}A \equiv \neg\mathcal{D}\neg A$, $[\forall]A \equiv \mathcal{D}A \wedge A$.

Топологической моделью называется пара $M = (\mathfrak{X}, \theta)$, где $\mathfrak{X}$ – топологическое пространство, а функция $\theta: \text{PROP} \rightarrow 2^{\mathfrak{X}}$ – оценка на $\mathfrak{X}$. Шкалой Крипке F называется тройка (W, R, R_D) , где $W \neq \emptyset$ и $R, R_D \subseteq W \times W$. Модель Крипке на F – это пара $M = (F, \theta)$, где $\theta: \text{PROP} \rightarrow 2^W$ – оценка на F . Истинность формулы A в точке определяется, как обычно, рекурсивно; в частности:

	в топологической модели	в модели Крипке
$M, x \models \Box A$	$\exists U(x) \forall y \in U(x) (M, y \models A)$	$\forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A)$
$M, x \models \mathcal{D}A$	$\forall y (y \neq x \Rightarrow M, y \models A)$	$\forall y (xR_D y \Rightarrow M, y \models A)$

где $U(x)$ – окрестность точки x . Формула A общезначима в шкале F (обозначение: $F \models A$), если $\forall x \forall \theta (F, \theta, x \models A)$; аналогично для топологического пространства.

Логикой класса $\mathcal{C}$ пространств (шкал Крипке) называется множество всех формул, общезначимых во всех пространствах (шкалах) из $\mathcal{C}$; обозначение – $L(\mathcal{C})$. Шкала F такая, что $\forall A \in L(F \models A)$, называется L -шкалой. Если $L(F) \upharpoonright n = L(G) \upharpoonright n$ (фрагменты с первыми n переменными), то мы пишем $F \sim_n G$.

Возьмем логику класса всех пространств **S4D** (см. [1]) и добавим аксиомы:

(AT_1) $\mathcal{D}p \rightarrow \mathcal{D}\Box p$; (DS) $\mathcal{D}p \rightarrow \Diamond p$; (AC) $[\forall](\Box p \vee \Box \neg p) \rightarrow [\forall]p \vee [\forall]\neg p$;
 (AE_2) $\mathcal{D}p \wedge \neg p \wedge \Box(p \rightarrow \bigvee_{i=1}^3 \Box Q_i) \rightarrow \bigvee_{1 \leq i < j \leq 3} \Box(p \rightarrow Q_i \vee Q_j)$,

где $Q_1 = q_1 \wedge q_2$, $Q_2 = q_1 \wedge \neg q_2$ и $Q_3 = \neg q_1$. Пусть **LC**₂ = **S4D** + $\{AT_1, DS, AC, AE_2\}$.

Известно, что в **S4D**-шкале отношение R рефлексивно и транзитивно, а рефлексивное замыкание R_D – эквивалентность.

Напомним, что пространство локально связно, если любая окрестность любой точки содержит связную подокрестность. Локально связное T_1 -пространство $\mathfrak{X}$ назовем локально двухкомпонентным, если любое связное открытое подмножество после удаления любой точки содержит не более двух компонент связности.

Для **S4D**-шкалы F пусть $\hat{R} \equiv R \circ R^{-1}$ и $\tilde{R}$ – транзитивное замыкание $\hat{R}$, тогда $\tilde{R}$ – эквивалентность. Шкала F – связная, если $\forall x \forall y (x\tilde{R}y)$. Пусть $R^* \equiv \tilde{R}|_{W^-}$, где $W^- \equiv \{w \in W \mid wR_D w\}$. Шкала F локально двухкомпонентна, если каждое $R(x) = \{y \mid xRy\}$ пересекает не более двух R^* -классов.

Отметим свойства, соответствующие перечисленным выше аксиомам.

Аксиома	Топологическое пространство	Шкала Крипке
(DS)	плотность в себе	$\forall x (R(x) \cap R_D(x) \neq \emptyset)$
(AT_1)	T_1 -пространство	$\forall x (\neg xR_D x \Rightarrow \neg \exists y (yRx \ \& \ y \neq x))$
(AE_2)	локальная двухкомпонентность	
(AC)	связность	

Из таблицы видно, что $L(\mathbb{R}) \supseteq \text{LC}_2$. Но $L(\mathbb{R}) \neq \text{LC}_2$ и, более того, справедлива

ТЕОРЕМА 1. Логика $L(\mathbb{R})$ не является n -аксиоматизируемой для любого n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $F = (W, R, R_D)$ – **S4D**-шкала, $\mathfrak{X}$ – пространство. Сюръективная функция $f: \mathfrak{X} \rightarrow F$ называется *сдр-морфизмом* (обозначение $f: \mathfrak{X} \xrightarrow{cd} F$), если для любого $w \in W$: 1) $\mathbf{C}f^{-1}(w) = f^{-1}(R^{-1}(w))$, где $\mathbf{C}$ – оператор замыкания, 2) если $\neg wR_D w$, то $f^{-1}(w)$ одноэлементно.

ЛЕММА 1 [1]. Если $f: \mathfrak{X} \xrightarrow{cd} F$ и F – конечная **S4D**-шкала, то $L(\mathfrak{X}) \subseteq L(F)$.

Здесь графом Γ мы называем (V, E, ε) , где V – множество вершин, E – множество ребер, $\varepsilon: E \rightarrow \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V\}$. Элементы $\varepsilon(e)$ называются концами e . Путь в графе $\Gamma = (V, E, \varepsilon)$ – это кортеж $P = (v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n)$, где $\varepsilon(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Граф эйлеров, если существует путь, содержащий все его ребра по одному разу.

Пусть $F = (W, R, R_D)$ – $\mathbf{LC}_2$ -шкала. Построим граф $\Gamma(F) = (V, W^\circ, \varepsilon)$, где $W^\circ = \{w \mid \neg w R_D w\}$, $W^- = W - W^\circ$, $V = W^- / R^*$, $\varepsilon(x) = \{[w] \in V \mid [w] \cap R(x) \neq \emptyset\}$. Так как $F \models DS \wedge AE_2$, то $\varepsilon(x)$ – одно- или двухэлементное множество.

ЛЕММА 2. Если F – конечная $\mathbf{LC}_2$ -шкала и $f: \mathbb{R} \xrightarrow{cd} F$, то $\Gamma(F)$ эйлеров.

Пусть $F = (W, R, R_D)$ и $W^\circ = \{v_1, \dots, v_k\}$. Каждой v_i соответствует единственная x_i такая, что $f(x_i) = v_i$. Перенумеруем точки v_i так, чтобы $x_1 < \dots < x_k$ и положим $x_0 = -\infty$, $x_{k+1} = +\infty$.

Рассмотрим интервал (x_i, x_{i+1}) и его образ $f(x_i, x_{i+1}) = G_i \subset F$ ($i = 0, \dots, k$). По определению 1 $f|_{(x_i, x_{i+1})}: (x_i, x_{i+1}) \xrightarrow{cd} G_i$. Так как $(x_i, x_{i+1}) \models AC$, то $G_i \models AC$, т.е. G_i связна. Поскольку R_D универсально на G_i , то G_i полностью содержится в некотором R^* -классе. Так как любая окрестность точки x_i пересекает (x_{i-1}, x_i) и (x_i, x_{i+1}) , то $R(v_i)$ пересекает G_i и G_{i-1} , $\varepsilon(v_i) = \{[g_i], [g_{i-1}]\}$ ($g_j \in G_j$) и $[g_0]v_1[g_1]v_2 \dots v_k[g_k]$ – эйлеров путь.

ЛЕММА 3 [2]. Даны логика $\mathbf{L}$ и шкалы $\{F_n\}_{n \in \omega}$ и $\{F'_n\}_{n \in \omega}$ такие, что $\mathbf{L} \not\subseteq L(F_n)$, $\mathbf{L} \subseteq L(F'_n)$ и $F_n \sim_n F'_n$. Тогда $\mathbf{L}$ не является n -аксиоматизируемой для любого n .

Зададим F_n и F'_n диаграммами Хассе, в которых стрелками отмечено отношение R , а отношение R_D – универсальное минус все пары (x, x) , где x – белая точка:

Так как существует p -морфизм (см. [3]) $F_n \twoheadrightarrow F'_n$ (склейка d_0 и d_1), то $L(F_n)[n \subseteq L(F'_n)]n$. Обратно, пусть M – контрмодель для A на F_n . Так как $R(d_i) = R(d_j)$ и $R_D(d_i) = R_D(d_j)$ для всех i и j , то значения формул в точках d_i зависят только от значения переменных. Тогда найдутся точки d_i, d_j , неразличимые n -формулами. Отождествив их, получим контрмодель для A на F'_n .

Так как $\Gamma(F_n)$ – не эйлеров, то по лемме 2 $\mathbb{R} \not\xrightarrow{cd} F_n$. Используя формулу Янкова–Файна для F_n , выводим, что $L(\mathbb{R}) \not\subseteq L(F_n)$ (см. [3; п. 3.4], [2; лемма 7.2]).

Докажем, что $L(\mathbb{R}) \supseteq L(F'_n)$. Построим $f: \mathbb{R} \xrightarrow{cd} F'_n$ таким образом: $(-\infty, 0) \mapsto a_1$, $0 \mapsto b$, $(2i-1, 2i) \mapsto a_4$, $(2i, 2i+1) \mapsto a_3$ ($0 \leq i \leq 2^{n-1}$), $1 \mapsto d_{0,1}$, $j \mapsto d_j$ ($2 \leq j \leq 2^n$), $2^n + 1 \mapsto c$, $(2^n + 1, +\infty) \mapsto a_2$. Применив лемму 3, мы докажем теорему.

Список литературы

- [1] A. Kudinov, *Advances in Modal Logic*, v. 6, College Publ., London, 2006, 319–332. [2] I. Shapirovsky, V. Shehtman, *J. Logic Comput.*, **15**:4 (2005), 559–579. [3] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal logic*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

А. В. Кудинов (A. V. Kudinov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kudinov.andrey@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
07.12.2007