Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Константинов, Инвариантные упорядочения на однородных пространствах с неприводимой группой изотропии, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9067>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:29:00

Инвариантные упорядочения на однородных пространствах с неприводимой группой изотропии

А. Л. Константинов

1. Введение. Пусть G – простая вещественная группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа Ли, которая действует в касательном пространстве однородного пространства G/H неприводимо. Тогда пространство G/H называется однородным пространством с неприводимой группой изотропии. Для краткости мы будем называть такие пространства *неприводимыми*. В настоящей работе дана полная классификация несимметрических неприводимых однородных пространств, допускающих инвариантные упорядочения, для случая неэрмитовой группы G .

Инвариантным упорядочением на однородном пространстве G/H группы Ли G называется частичное упорядочение, инвариантное относительно действия группы G . Пусть $\varphi: G \rightarrow G/H$ – каноническое отображение. Инвариантное упорядочение на G/H называется непрерывным, если множество $Q = \{x \in G/H \mid x \geq eH\}$ замкнуто и полугруппа $P = \varphi^{-1}(Q)$ порождается любой своей окрестностью единицы. Обратно, любая замкнутая полугруппа $P \subset G$, группа обратимых элементов которой совпадает с H , задает инвариантное упорядочение на G/H . Далее все инвариантные упорядочения будут считаться непрерывными.

Через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ обозначим касательные алгебры групп G и H соответственно. Каждому инвариантному упорядочению на G/H соответствует $\text{Ad } H$ -инвариантный замкнутый строго выпуклый конус C в пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Этот конус состоит из всех векторов, касательных к кривым, лежащим в Q . Упорядочение однозначно восстанавливается по C [1].

Инвариантные упорядочения на симметрических однородных пространствах простых групп Ли классифицировал Г.И. Олшанский [1]. Случай однородных пространств эрмитовых групп Ли был рассмотрен в [2].

О.В. Мантуров в работе [3] классифицировал все неприводимые однородные пространства G/H для случая компактной простой группы Ли G . Пользуясь теорией Ф.И. Карпелевича [4] о вложении вещественных форм, результаты Мантурова можно обобщить на однородные пространства G/H (H – редуктивная подгруппа Ли) произвольных простых вещественных групп Ли G .

В настоящей работе получен следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Несимметрические неприводимые однородные пространства неэрмитовых простых вещественных групп Ли, допускающие инвариантные упорядочения, – это в точности однородные пространства, локально изоморфные следующим: $\text{SL}_{n(n+1)/2}(\mathbb{R})/\text{PSL}_n(\mathbb{R})$, $\text{SL}_{n^2}(\mathbb{R})/\text{PSL}_n(\mathbb{C})$, $\text{SL}_{n(2n-1)}(\mathbb{R})/\text{PSL}_n(\mathbb{H})$, $\text{SL}_{27}(\mathbb{R})/\text{EIV}$, $\text{EV}/\text{PSL}_3(\mathbb{R})$.*

Так как группа G неэрмитова, центр ее односвязной накрывающей конечен. Поэтому достаточно доказать существование инвариантного упорядочения для одного пространства из каждого класса локально изоморфных.

2. Краткое доказательство теоремы. Пусть G – неэрмитова простая линейная группа Ли, а H – такая ее полупростая подгруппа Ли, что однородное пространство G/H неприводимо. Их максимальные компактные подгруппы обозначим через K и L соответственно, причем будем считать, что $L \subset K$. Касательные алгебры групп Ли будем обозначать соответствующими маленькими готическими буквами.

Известно [5], что в пространстве V неприводимого представления связной полупростой группы Ли H существует H -инвариантный замкнутый выпуклый конус тогда и только тогда, когда существует ненулевой L -инвариантный вектор. Если такой вектор существует, то он единствен с точностью до пропорциональности. Таким

образом, для существования инвариантного упорядочения на G/H необходимо существование ненулевого $\text{Ad } L$ -инвариантного вектора v_L в пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, которое отождествляется с H -инвариантным дополнением к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Также для существования инвариантного упорядочения на G/H необходимо, чтобы все собственные значения оператора $\text{ad } v_L$ были вещественны.

В таблице приведены все, с точностью до локального изоморфизма, однородные пространства G/H описанного выше типа, для которых в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ существует $\text{Ad } H$ -инвариантный конус. Во втором столбце указан вес Λ_h ограничения минимального представления алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ на подалгебру $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ ($\pi_i - i$ -й фундаментальный вес, $R(\Lambda)$, $S(\Lambda)$ – неприводимые представления со старшим весом Λ), в третьем столбце указан старший вес Λ_{ad} представления алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, в последнем столбце поставлен знак Re , если вектор v_L веществен, и знак Im , если v_L чисто мнимый.

G/H	Λ_h	Λ_{ad}	v_L
$\text{SL}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R})/\text{PSL}_n(\mathbb{R})$	$R(2\pi_1)$	$R(2\pi_1 + 2\pi_{n-1})$	Re
$\text{SL}_{n^2}(\mathbb{R})/\text{PSL}_n(\mathbb{C})$	$R(\pi_1) \otimes S(\pi_{n-1})$	$R(\pi_1 + \pi_{n-1}) \otimes S(\pi_1 + \pi_{n-1})$	Re
$\text{SL}_{n(2n-1)}(\mathbb{R})/\text{PSL}_n(\mathbb{H})$	$R(\pi_2)$	$R(\pi_2 + \pi_{n-2})$	Re
$\text{SL}_{27}(\mathbb{R})/\text{EIV}$	$R(\pi_1)$	$R(\pi_1 + \pi_5)$	Re
$\text{SO}_{38,32}^0/\text{PSU}_{4,4}$	$R(\pi_4)$	$R(\pi_3 + \pi_5)$	Im
$\text{SO}_{12,8}^0/\text{PSU}_{2,2}$	$R(2\pi_2)$	$R(\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3)$	Im
$\text{SO}_{2n^2-n+2,4n-2}^0/\text{PSO}_{2n-1,2}^0$	$R(2\pi_1)$	$R(2\pi_1 + \pi_2)$	Im
$\text{SO}_{22,20}^0/\text{PSP}_8(\mathbb{R})$	$R(\pi_4)$	$R(2\pi_3)$	Im
$\text{SO}_{2n^2+n+2,4n}^0/\text{PSO}_{2n,2}^0$	$R(2\pi_1)$	$R(2\pi_1 + \pi_2)$	Im
$\text{PSO}_{72,56}^0/\text{PSO}_{16}^*$	$R(\pi_8)$	$R(\pi_6)$	Im
$\text{GI}/\text{PSL}_2(\mathbb{R})$	$R(6\pi_1)$	$R(10\pi_1)$	Im
$\text{EV}/\text{PSL}_3(\mathbb{R})$	$R(6\pi_1) + R(6\pi_2)$	$R(4\pi_1 + 4\pi_2)$	Re
$\text{EVI}/\text{PSU}_{2,1}$	$R(6\pi_1) + R(6\pi_2)$	$R(4\pi_1 + 4\pi_2)$	Im

Остается доказать, что случаях, когда вектор v_L веществен, инвариантное упорядочение существует. Во всех пяти случаях ограничение представления группы G на подгруппу H имеет инвариантный выпуклый конус.

Рассмотрим любой из этих конусов. Обозначим его через D , а лежащий в нем L -инвариантный вектор обозначим через v_D . Рассмотрим полугруппу $P = \{g \in G \mid gD \subset D\}$ сжатий конуса D . Подгруппа обратимых элементов полугруппы P совпадает с группой H , а сама полугруппа P имеет непустую внутренность. Касательный конус к ней обозначим через C . Полугруппа $\langle \exp C \rangle$ задает некоторое нетривиальное инвариантное упорядочение на G/H .

Список литературы

- [1] Г. И. Олшанский, *Докл. АН СССР*, **265**:3 (1982), 537–541; англ. пер.: G. I. Ol'shanskii, *Soviet Math. Dokl.*, **26**:1 (1982), 97–101. [2] А. Л. Константинов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, №6, 15–18. [3] О. В. Мантуров, *Тр. сем. по векторному и тензорному анализу*, **13**, Изд-во МГУ, 1966, 68–145. [4] Ф. И. Карпелевич, *Тр. ММО*, **4** (1955), 3–112. [5] Э. Б. Винберг, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 1–13; англ. пер.: È. В. Vinberg, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:1 (1980), 1–10.

А. Л. Константинов (A. L. Konstantinov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: lelik_msu@rambler.ru

Представлено Э. Б. Винбергом
 Принято редколлегией
 07.12.2007