Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева, К теории полутел,
УМН, 2008, том 63, выпуск 2, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9069>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 07:26:34

К теории полутел

Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева

1. Определения. Дистрибутивность и ограниченность. Полутелом называется система, являющаяся одновременно мультипликативной группой и аддитивной коммутативной полугруппой, причем умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Коммутативное полутело называется *полуполем*. Всякая конгруэнция на полутеле полностью определяется своим классом единицы, который будем называть *ядром*. Подмножество A полутела U является ядром тогда и только тогда, когда A – нормальная подгруппа в U , для которой выполняется условие: $x, y \in U \ \& \ x + y = 1 \ \& \ a, b \in A \Rightarrow ax + by \in A$ [1]. Ядро конгруэнции, порожденной парой $(1, a)$, будем обозначать $\text{Ker}_U(a)$ и называть *главным*. Решетка $\text{Con } U$ всех конгруэнций полутела U изоморфна решетке его ядер относительно операций пересечения и умножения ядер. Известно, что решетка $\text{Con } U$ всегда модулярна и дистрибутивна для идемпотентных полутел. Полутело U называется: *сократимым*, если в нем выполняется квазитожество $a + c = b + c \Rightarrow a = b$; *идемпотентным*, если оно удовлетворяет тождеству $a + a = a$; *зериодным*, если $a + b = a$ для некоторых его элементов a и b ; *ограниченным*, если $U = (2)$; *дистрибутивным*, если решетка $\text{Con } U$ дистрибутивна; *простым*, если $\text{Con } U$ есть двухэлементная цепь; *бирегулярным*, если все главные ядра в U дополняемы. Собственное ядро A полутела U называется *неприводимым*, если из $B \cap C \subseteq A$ следует $B \subseteq A$ или $C \subseteq A$ для любых $B, C \in \text{Con } U$.

ТЕОРЕМА 1 [2]. Для любого полутела U следующие условия эквивалентны:

- 1) U – ограниченное;
- 2) U/A – сократимое полутело для любого $A \in \text{Con } U$;
- 3) решетка $\text{Con } U$ изоморфна решетке всех идеалов кольца разностей полутела U .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если ядро K полутела U является дистрибутивным полутелом, то и само полутело U дистрибутивно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого полуполя U решетка конгруэнций его подполуполя (2) есть ретракт решетки $\text{Con } U$.

ТЕОРЕМА 2. Полуполе U дистрибутивно тогда и только тогда, когда дистрибутивно его подполуполе (2).

Эти утверждения показывают, что при изучении полутел и полуполей возможно применение методов теории колец.

2. Полутела сечений. Будем обозначать через $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ полутело сечений пучка Π полутел U_x над нульмерным компактом X [3]. *Компактом* называется компактное хаусдорфово пространство. Для произвольной точки $x \in X$ обозначим через π_x эпиморфизм $\Gamma \rightarrow U_x$, определенный правилом $\pi_x(s) = s(x)$ для всех $s \in \Gamma$.

ЛЕММА 1. Для любого ядра A полутела Γ , сечения $a \in A$ и открыто-замкнутого множества $Y \subseteq X$ сечение из Γ , равное a на Y и 1 на $X \setminus Y$, также принадлежит ядру A .

Эта лемма важна в техническом плане; она используется при доказательстве следующих утверждений. Для ее доказательства пучок Π расширяется до пучка $\Pi' = \Pi \dot{\cup} X$ полутел с нулем $U_x \cup \{0_x\}$, в котором $0_x \equiv x$ для всех $x \in X$, и X открыто-замкнуто в Π' . Полукольцо сечений $\Gamma(X, \Pi')$ будет булевым полукольцом [4], множеством обратимых элементов которого служит Γ .

ЛЕММА 2. Если для ядра A полутела Γ верны равенства $\pi_x^{-1}(A) = U_x$ для всех $x \in X$, то $A = \Gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Максимальные (неприводимые) ядра полутела Γ – это в точности ядра вида $\pi_x^{-1}(K_x)$, где $x \in X$ и K_x – максимальное (неприводимое) ядро в U_x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Полутело Γ дистрибутивно (ограничено, сократимо, коммутативно, идемпотентно, зероидно) тогда и только тогда, когда дистрибутивны (соответственно: ограничены, сократимы, коммутативны, идемпотентны, зероидны) все слои U_x .

ТЕОРЕМА 3. Полутело $U = (e_1) \dots (e_n)$ изоморфно полутелу $\Gamma(X, \Pi)$ сечений некоторого пучка Π простых полутел U_x над нульмерным компактом X тогда и только тогда, когда U бирегулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полутело $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$. Покажем, что главное ядро $A = (a)$, $a \in U$, дополняемо. Рассмотрим открытое множество $Y = \{x \in X \mid a(x) = 1_x\}$ и ядро $B = \{s \in \Gamma \mid s = 1 \text{ на } X \setminus Y\}$. Ясно, что $A \cap B = \{1\}$. Если $AB \neq \Gamma$, то по лемме 2 найдется точка $x \in Y$, в которой все сечения из AB равны 1_x . Точка x отделяется от замкнутого множества $X \setminus Y$ некоторым открыто-замкнутым множеством. Значит, по лемме 1 существует сечение $b \in B$, не равное 1_x в точке x ; противоречие. Поэтому $AB = \Gamma$, стало быть, B является дополнением (a) в $\text{Con } \Gamma$.

Обратно, пусть полутело U бирегулярно. Такое U дистрибутивно. Рассмотрим компактное T_1 -пространство $\mathcal{M}$ всех максимальных ядер полутела U со стоуновской топологией. Поскольку ядро (u) , $u \in U$, дополняемо, то, множество $D(u) = \{M \in \mathcal{M} \mid u \notin M\}$ открыто-замкнуто в $\mathcal{M}$. Поэтому $\mathcal{M}$ – нульмерный компакт, и множества $\mathcal{M} \setminus D(u)$ по всем $u \in U$ открыты. Тогда над пространством $\mathcal{M}$ существует пучок Π простых полутел U/M , $M \in \mathcal{M}$ [5]. Полутело U вкладывается в полутело сечений $\Gamma(\mathcal{M}, \Pi)$: $u \mapsto \hat{u}$, $\hat{u}(M) = uM \in U/M$ для $u \in U$, $M \in \mathcal{M}$. Докажем сюръективность $\hat{}$. Пусть s – сечение пучка Π . Для любого $M \in \mathcal{M}$ найдется $v \in U$, для которого $\hat{v} = s$ на некоторой открыто-замкнутой окрестности Y точки M . Очевидно, ядра $A = \bigcap (\mathcal{M} \setminus Y)$ и $B = \bigcap Y$ являются дополнениями друг друга в $\text{Con } U$. Поэтому найдется элемент $u \in A$, для которого $u^{-1}v \in B$, т.е. $\hat{u} = \hat{v} = s$ на Y , $\hat{u} = 1$ на $\mathcal{M} \setminus Y$. Эти множества Y образуют открытое покрытие $\mathcal{M}$. Поэтому существует конечное покрытие $\mathcal{M}$ попарно непересекающимися открыто-замкнутыми множествами $Y_1, \dots, Y_n$ и существуют такие $u_1, \dots, u_n \in U$, что $\hat{u}_i = s$ на Y_i и $\hat{u}_i = 1$ на $\mathcal{M} \setminus Y_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $s = \hat{u}_1 \cdots \hat{u}_n = \widehat{u_1 \cdots u_n}$.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 3 полутело U изоморфно прямому произведению (однозначно определенных) ограниченного полуполя и идемпотентного полутела, а накрывающее пространство Π хаусдорфово.

Список литературы

- [1] J. S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer, Dordrecht, 1999. [2] А. В. Черанева, *Чебышевский сб.*, 6:4(16) (2005), 164–171. [3] Г. Е. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill Book, New York–Toronto, ON–London, 1967. [4] Е. М. Вечтомов, А. В. Михалёв, В. В. Чермных, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 20 (1997), 282–309; англ. пер.: V. V. Chermnyh, A. V. Mikhalev, E. M. Vechtomov, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 97:3 (1999), 4162–4176. [5] С. В. Полин, *Сиб. матем. журн.*, 15:1 (1974), 90–101; англ. пер. S. V. Polin, *Siberian Math. J.*, 15:1 (1974), 64–72.

Е. М. Вечтомов (E. M. Vechtomov)
Вятский государственный гуманитарный университет
E-mail: vecht@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
17.12.2007

А. В. Черанева (A. V. Cheraneva)
Вятский государственный гуманитарный университет
E-mail: A_Cheraneva@inbox.ru