Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, О согласованных пуассоновых структурах гидродинамического типа, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:21:10

О СОГЛАСОВАННЫХ ПУАССОНОВЫХ СТРУКТУРАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

О. И. Мохов

Задача классификации согласованных пуассоновых структур гидродинамического типа является одной из самых интересных и важных из нерешенных проблем теории гамильтоновых систем гидродинамического типа и связанной с ними дифференциальной геометрии. Напомним основные определения. Пусть M – гладкое N -мерное многообразие с локальными координатами $u^1, \dots, u^N$, ΩM – пространство петель этого многообразия, то есть пространство всех гладких параметризованных отображений γ окружности S^1 в M , $\gamma: S^1 \rightarrow M$, $\gamma(x) = \{u^i(x), 1 \leq i \leq N\}$, $x \in S^1$. Рассмотрим на ΩM скобки Пуассона гидродинамического типа

$$(1) \quad \{I, J\} = \int_{S^1} \frac{\delta I}{\delta u^i} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta u^j} dx,$$

где I, J – произвольные функционалы на ΩM . Скобки Пуассона вида (1) были введены и изучены Дубровиным и Новиковым в [1] (см. обзор [2]). В [1] доказано, что если $\det(g^{ij}) \neq 0$ (невырожденные скобки), то формула (1) задает скобку Пуассона, т.е. скобка (1) кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, тогда и только тогда, когда, во-первых, $g^{ij}(u)$ – произвольная плоская псевдориманова метрика (метрика нулевой римановой кривизны), и, во-вторых, $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита). Таким образом, любая невырожденная скобка Пуассона вида (1) является постоянной в плоских координатах метрики $g^{ij}(u)$. Напомним также [1], [2], что локальные координаты $u^1, \dots, u^N$ называются *лиувиллевыми*, если в них $g^{ij}(u) = \gamma^{ij}(u) + \gamma^{ji}(u)$, $b_k^{ij}(u) = \partial \gamma^{ij} / \partial u^k$, где $\gamma^{ij}(u)$ – некоторая матричная функция. Две скобки Пуассона, $\{I, J\}_1$ и $\{I, J\}_2$, называются *согласованными*, если любая их линейная комбинация $\{I, J\} = \lambda \{I, J\}_1 + \mu \{I, J\}_2$, $\lambda, \mu = \text{const}$, также является скобкой Пуассона [3].

ЛЕММА 1. *Если две скобки Пуассона гидродинамического типа согласованы, то плоские координаты одной из них являются лиувиллевыми для другой.*

По теореме Дубровина–Новикова [1] для любой невырожденной скобки Пуассона гидродинамического типа существуют локальные координаты $v^1, \dots, v^N$, в которых эта скобка Пуассона имеет вид

$$(2) \quad \{I, J\}_1 = \int_{S^1} \frac{\delta I}{\delta v^i} \left(\varepsilon^i \delta^{ij} \frac{d}{dx} \right) \frac{\delta J}{\delta v^j} dx, \quad \varepsilon^i = \pm 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

По лемме 1 любая скобка Пуассона гидродинамического типа, согласованная со скобкой (2), обязана иметь лиувиллев вид в локальных координатах $v^1, \dots, v^N$:

$$(3) \quad \{I, J\}_2 = \int_{S^1} \frac{\delta I}{\delta v^i} \left((r^{ij}(v(x)) + r^{ji}(v(x))) \frac{d}{dx} + \frac{\partial r^{ij}}{\partial v^k} v_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta v^j} dx,$$

где $r^{ij}(v)$ – некоторая матричная функция.

ЛЕММА 2. *Если матричные функции $r^{ij}(v)$ таковы, что лиувиллева скобка (3) является скобкой Пуассона, то эта скобка Пуассона согласована со скобкой Пуассона (2) тогда и только тогда, когда существуют функции $h^i(v)$, $i = 1, \dots, N$, такие, что*

$$(4) \quad r^{ij}(v) = \varepsilon^i \partial h^j / \partial v^i.$$

Таким образом, полная классификация согласованных невырожденных пуассоновых структур гидродинамического типа эквивалентна классификации таких лиувиллевых скобок вида

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-01-01623), РФФИ-ННИО (грант № 96-01-00050G) и INTAS (грант № 96-0770).

(3), (4), которые являются одновременно скобками Пуассона, т.е. локальной заменой координат приводятся к постоянному виду. Легко написать соответствующие уравнения на функции $h^i(v)$, описывающие все решения нашей задачи. Если существует функция $F(v)$ такая, что $h^j(v) = \pm \partial F / \partial v^j$, то F удовлетворяет уравнению ассоциативности двумерной топологической теории поля с метрикой $\eta^{ij} = \varepsilon^i \delta^{ij}$ (без так называемого условия нормализации, эквивалентного условию наличия единицы в соответствующей алгебре Фробениуса) [4], [5]

$$\varepsilon^s \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial u^i \partial u^j} \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial u^k \partial u^l} = \varepsilon^s \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial u^i \partial u^l} \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial u^k \partial u^j}.$$

С точки зрения систем гидродинамического типа такие уравнения ассоциативности были изучены в [6]–[8]. Детальное исследование взаимосвязей между условиями согласованности пуассоновых структур гидродинамического типа и уравнениями ассоциативности и теорией фробениусовых многообразий представляет особый интерес (см. [5]).

ТЕОРЕМА. При $N = 2$ имеется два принципиально различных случая. 1. Если $r^{12}(v) + r^{21}(v) = 0$, т.е. метрика $g^{ij} = r^{ij} + r^{ji}$ скобки (3) диагональна, то ливиллева скобка (3) является скобкой Пуассона, согласованной со скобкой Пуассона (2), тогда и только тогда, когда либо $r^{11} = a(v^1)$, $r^{22} = b(v^2)$, $r^{12} = c_0$, где $a(v^1)$, $b(v^2)$ – произвольные функции указанных аргументов, c_0 – произвольная константа, либо (только при $\varepsilon^1 \varepsilon^2 = -1$ в вещественном случае) $r^{11} = -r^{22} = \pm r^{12} + c = f(v^1 \pm v^2)$, где $f(z)$ – произвольная функция одной переменной z , c – произвольная константа. 2. Если $r^{12}(v) + r^{21}(v) \neq 0$, т.е. метрика $g^{ij} = r^{ij} + r^{ji}$ скобки (3) недиагональна, то ливиллева скобка (3) является скобкой Пуассона, согласованной со скобкой Пуассона (2), тогда и только тогда, когда функции $r^{ij}(v)$ удовлетворяют следующей четырехкомпонентной однородной системе гидродинамического типа:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial r^{11}}{\partial v^1} &= \frac{\partial r^{21}}{\partial v^2} + 2 \frac{(\varepsilon^1 \varepsilon^2 r^{11} - r^{22})}{(r^{12} + r^{21})} \frac{\partial r^{11}}{\partial v^2}, & \frac{\partial r^{21}}{\partial v^1} &= \varepsilon^1 \varepsilon^2 \frac{\partial r^{11}}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial r^{12}}{\partial v^1} &= \frac{\partial r^{22}}{\partial v^2} + 2 \frac{(\varepsilon^1 \varepsilon^2 r^{11} - r^{22})}{(r^{12} + r^{21})} \frac{\partial r^{12}}{\partial v^2}, & \frac{\partial r^{22}}{\partial v^1} &= \varepsilon^1 \varepsilon^2 \frac{\partial r^{12}}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Система (5) весьма любопытна и наверняка интегрируема, хотя ее свойства достаточно необычны (общая теория интегрируемости такого типа систем гидродинамического типа пока не построена): она недиагонализуема, обладает двумя инвариантами Римана, не является слабо нелинейной, матрица этой системы имеет два двукратных собственных значения и четыре различных собственных вектора в каждой точке. Система (5) обладает двухкомпонентной интегрируемой редукцией $r^{12} = r^{21}$, $r^{11} = \varepsilon^1 \varepsilon^2 r^{22} + \text{const } r^{21}$. Анзац $r^{ij} = \varepsilon^i \varepsilon^j \partial^2 F / \partial v^i \partial v^j$, связанный с уравнениями ассоциативности, приводит к линейному уравнению $\alpha(\varepsilon^1 \partial^2 F / \partial (v^1)^2 - \varepsilon^2 \partial^2 F / \partial (v^2)^2) = \beta \partial^2 F / \partial v^1 \partial v^2$, где α , β – произвольные константы, и порождает приведенную выше редукцию системы (5). Этот анзац в точности соответствует условиям согласованной потенциальной деформации двух фробениусовых алгебр, теория которых, а также системы, возникающие при большем числе компонент N , будут рассмотрены в другой статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785. [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98. [3] Magri F. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162. [4] Witten E. // Surveys Differential Geom. 1991. V. 1. P. 243–310. [5] Dubrovin B. // Lect. Notes Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; hep-th/9407018. [6] Mokhov O. I. // Geometry from the Pacific Rim. Proc. Pacific Rim Geometry Conf. National Univ. Singapore, December 12–17, 1994. Berlin: Walter de Gruyter, 1997. P. 285–309. [7] Ferapontov E. V., Mokhov O. I. // Proc. First Int. Workshop “Nonlinear Physics”. Gallipoli (Lecce), Italy. 29 June – 7 July, 1995. Singapore: World Scientific, 1996. P. 104–115. [8] Мохов О. И. Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН, 1996.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru

Принято редколлегией
25.11.1997